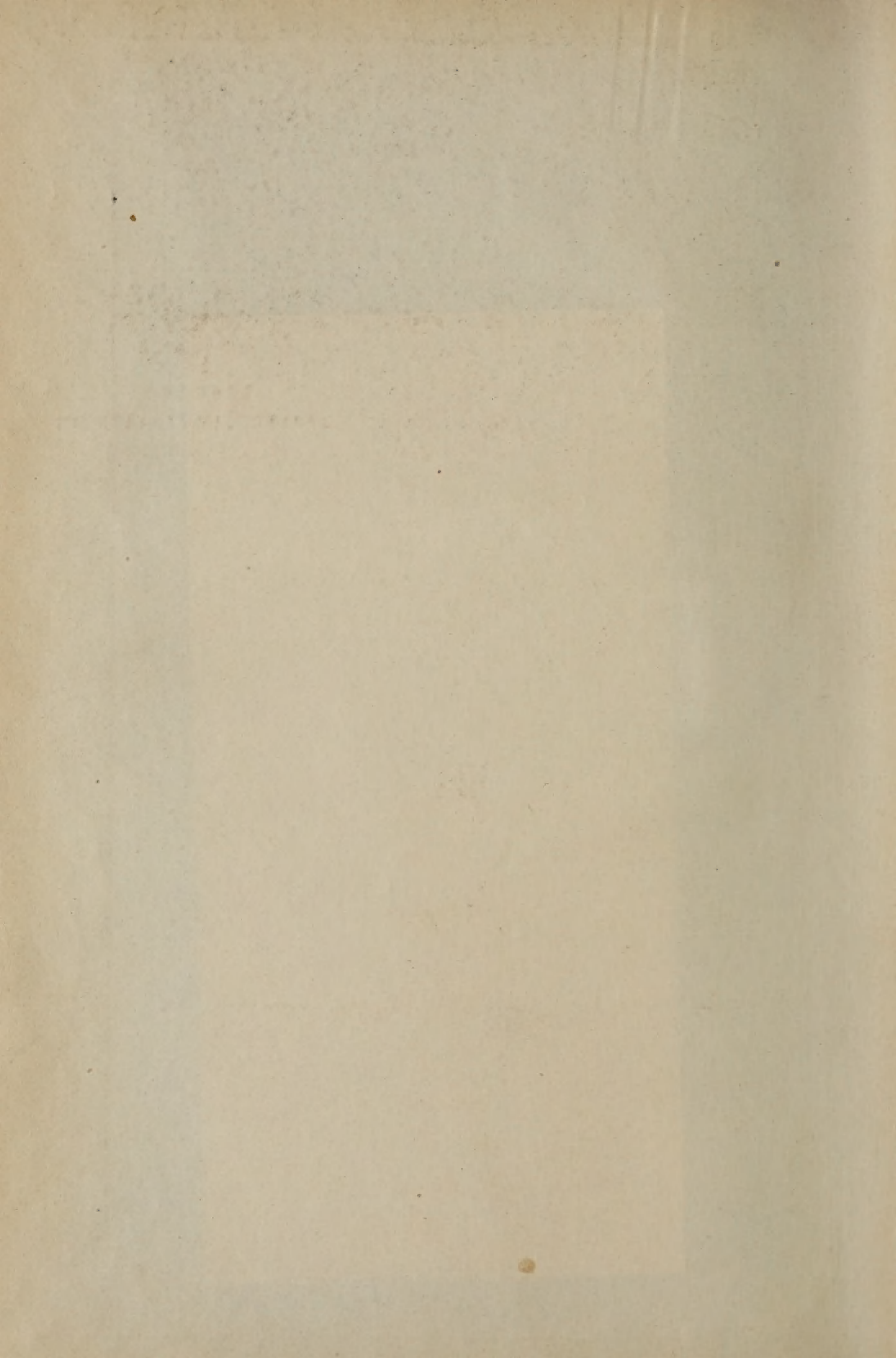




Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

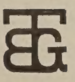
unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXXVII. Jahrgang.

Mit in den Text gedruckten Figuren und neun lithographirten Tafeln.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1892.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

Kinematik und Mechanik.

Physik.

I.

Ueber diejenigen Berührungstransformationen, welche das Verhältniss der Krümmungsmaasse irgend zwei sich berührender Flächen im Berührungspunkte unverändert lassen.

Von

G. Vivanti

in Mantua.

---

1. Herr Dr. R. Mehmke hat bewiesen,* dass die linearen (projectiven) Transformationen die einzigen Punkttransformationen sind, welche das Verhältniss der zum Berührungspunkte gehörigen Krümmungsmaasse irgend zwei sich berührender Flächen unverändert lassen. Dass jene Transformationen auch die einzigen Berührungstransformationen sind, welchen eine solche Eigenschaft zukommt, wollen wir im Folgenden zeigen.

2. Es werden zwei sich berührende Flächen σ, $\bar{\sigma}$ durch eine Berührungstransformation:

$$1)\quad \begin{gathered} X=X(x,y,z,p,q),\quad Y=Y(x,y,z,p,q),\quad Z=Z(x,y,z,p,q),\\ P=P(x,y,z,p,q),\quad Q=Q(x,y,z,p,q) \end{gathered}$$

in Σ bezw. $\bar{\Sigma}$ übergeführt. Bezeichnen wir durch x, y, z, p, q die Coordinaten des den zwei Flächen σ, $\bar{\sigma}$ gemeinschaftlichen Elementes, durch r, s, t die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von z nach x und y für die Fläche σ, durch $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$ dieselben Ableitungen für die Fläche $\bar{\sigma}$. Erwägt man, dass die Krümmungsmaasse von σ und $\bar{\sigma}$ im Berührungspunkte durch $\dfrac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$ bezw. $\dfrac{\bar{r}\bar{t}-\bar{s}^2}{(1+p^2+q^2)^2}$ dargestellt werden, so ersieht man, dass die Transformation 1) die angegebene Eigenschaft dann und nur dann besitzt, wenn die Gleichung:

$$2)\qquad \frac{\bar{r}\bar{t}-\bar{s}^2}{rt-s^2}=\frac{\bar{R}\bar{T}-\bar{S}^2}{RT-S^2}$$

stattfindet, welches auch die betrachteten Flächen sein mögen.

---

* Diese Zeitschrift, S. 206 flgg.

Es ist nun bekanntlich:*

$$RT - S^2 = \frac{\varphi(P, Q)}{\varphi(X, Y)},$$

wo:

$$\varphi(H, K) = H_1 K_2 - H_2 K_1 + r(H_p K_2 - H_2 K_p)$$
$$+ s(H_1 K_p - H_p K_1 + H_q K_2 - H_2 K_q) + t(H_1 K_q - H_q K_1)$$
$$+ (rt - s^2)(H_p K_q - H_q K_p),$$
$$H_1 = H_x + pH_z, \quad H_2 = H_y + qH_z.$$

Setzt man:

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = \alpha, \quad P_p Q_2 - P_2 Q_p = \beta, \quad P_1 Q_p - P_p Q_1 + P_q Q_2 - P_2 Q_q = \gamma,$$
$$P_1 Q_q - P_q Q_1 = \delta, \quad P_p Q_q - P_q Q_p = \varepsilon,$$
$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = \lambda, \quad X_p Y_2 - X_2 Y_p = \mu, \quad X_1 Y_p - X_p Y_1 + X_q Y_2 - X_2 Y_q = \nu,$$
$$X_1 Y_q - X_q Y_1 = \varrho, \quad X_p Y_q - X_q Y_p = \sigma,$$
$$rt - s^2 = u, \quad \bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2 = \bar{u},$$

so folgt aus 2):

$$\frac{\bar{u}}{u} = \frac{(\alpha + \beta\bar{r} + \gamma\bar{s} + \delta\bar{t} + \varepsilon\bar{u})(\lambda + \mu r + \nu s + \varrho t + \sigma u)}{(\lambda + \mu\bar{r} + \nu\bar{s} + \varrho\bar{t} + \sigma\bar{u})(\alpha + \beta r + \gamma s + \delta t + \varepsilon u)}$$

oder:

$$\bar{u}(\alpha + \mu\bar{r} + \nu\bar{s} + \varrho\bar{t} + \sigma\bar{u})(\alpha + \beta r + \gamma s + \delta t + \varepsilon u)$$
$$= u(\alpha + \beta\bar{r} + \gamma\bar{s} + \delta\bar{t} + \delta\bar{u})(\lambda + \mu r + \nu s + \varrho t + s u),$$

eine Gleichung, welche nach r, s, t, u, $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$, $\bar{u}$ identisch bestehen muss. Da die rechte Seite $\bar{u}$ als Factor enthalten muss, so ist:

3) $$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0,$$

und die Gleichung reducirt sich auf:

$$\varepsilon u\bar{u}(\lambda + \mu\bar{r} + \nu\bar{s} + \varrho\bar{t} + \sigma\bar{u}) = \varepsilon\bar{u}u(\lambda + \mu r + \nu s + \varrho t + \sigma u),$$

woraus folgt:

4) $$\mu = \nu = \varrho = \sigma = 0.$$

3. Das System 4) nimmt wegen der Gleichung $[XY] = 0$** die Form:

5) $$X_p Y_2 - X_2 Y_p = 0, \quad X_1 Y_p - X_p Y_1 = 0;$$

6) $$X_q Y_2 - X_2 Y_q = 0, \quad X_1 Y_q - X_q Y_1 = 0;$$

7) $$X_p Y_q - X_q Y_p = 0$$

an. Aus 5) folgt, wenn man beachtet, dass λ nicht identisch Null sein darf:

8) $$X_p = Y_p = 0,$$

und ebenso aus 6):

9) $$X_q = Y_q = 0.$$

Die Gleichungen $[XZ] = [YZ] = 0$*** reduciren sich, wegen 8) und 9), auf:

$$X_1 Z_p + X_2 Z_q = 0, \quad Y_1 Z_p + Y_2 Z_q = 0,$$

woraus folgt:

10) $$Z_p = Z_q = 0.$$

---

* Siehe meine Note: „Sulle trasformazioni di contatto che trasformano qualunque sviluppabile in una sviluppabile“, Rend. del Circ. mat. di Palermo, 1891.

** Siehe Lie, „Theorie der Transformationsgruppen“, II. Abschnitt S. 145.

*** Lie, a. a. O.

Die Gleichungen 8), 9), 10) sagen aus, dass die gesuchten Berührungstransformationen lauter erweiterte Punkttransformationen sind; diese Transformationen sind aber nach dem Mehmke'schen Satze nothwendig linear, folglich ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

4. Die Thatsache, dass die gesuchten Transformationen linear sind, kann aber auch auf Grund der Gleichungen 3) und 4) nachgewiesen werden.

Wir waren schon* dem Gleichungssysteme 3) begegnet und sind dabei zu folgenden Resultaten gelangt:

$$P_1 = Q_1 = 0, \quad P_2 = Q_2 = 0, \quad Z_1 = PX_1 + QY_1, \quad Z_2 + PX_2 + QY_2.$$

Aus diesen letzten Gleichungen folgt:

$$P = -\frac{Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}, \quad Q = -\frac{Z_1 X_2 - Z_2 X_1}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}$$

oder:

$$P = -\frac{\frac{d(Y,Z)}{d(y,z)}p + \frac{d(Y,Z)}{d(z,x)}q - \frac{d(Y,Z)}{d(x,y)}}{\frac{d(X,Y)}{d(y,z)}p + \frac{d(X,Y)}{d(z,x)}q - \frac{d(X,Y)}{d(x,y)}},$$

$$Q = -\frac{\frac{d(Z,X)}{d(y,z)}p + \frac{d(Z,X)}{d(z,x)}q - \frac{d(Z,X)}{d(x,y)}}{\frac{d(X,Y)}{d(y,z)}p + \frac{d(X,Y)}{d(z,x)}q - \frac{d(X,Y)}{d(x,y)}}.$$

Schreiben wir der Kürze halber:

$$P = -\frac{ap + bq + c}{gp + hq + k}, \quad Q = -\frac{dp + eq + f}{gp + hq + k},$$

wo sämmtliche Coefficienten von p und q unabhängig sind. Berechnet man P_1 und P_2, und setzt die Coefficienten der verschiedenen Potenzen und Potenzproducte von p und q einzeln gleich Null, so erhält man:

$$11)\quad ga_z - ag_z = 0,$$

$$12)\quad gb_z + ha_z - ah_z - bg_z = 0,$$

$$13)\quad hb_z - bh_z = 0,$$

$$14)\quad ga_x - gc_z - ka_z - ag_x + ak_z + cg_z = 0,$$

$$15)\quad gb_x + ha_x - hc_z - kb_z - ah_x - bg_x + bk_z + ch_z = 0,$$

$$16)\quad hb_x - bh_x = 0,$$

$$17)\quad -gc_x - ka_x + kc_z + ak_x + cg_x - ck_z = 0,$$

$$18)\quad -hc_x - kb_x + bk_x + ch_x = 0,$$

$$19)\quad kc_x - ck_x = 0,$$

$$ga_z - ag_z = 0, \quad gb_z + ha_z - ah_z - bg_z = 0, \quad hb_z - bh_z = 0,$$

$$20)\quad ga_y - ag_y = 0,$$

$$21)\quad gb_y - gc_z + ha_y - ka_z - ah_y + ak_z - bg_y + cg_z = 0,$$

$$22)\quad hb_y - hc_z - kb_z - bh_y + bk_z + ch_z = 0,$$

$$23)\quad -gc_y - ka_y + ak_y + cg_y = 0,$$

* Siehe die oben angeführte Note.

24) $$-hc_y - kb_y + kc_z + bk_y + ch_y - ck_z = 0,$$
25) $$kc_y - ck_y = 0.$$

Subtrahirt man 22) von 15) und 14) von 21), so folgt:

26) $$gb_x + ha_x - hb_y - ah_x - bg_x + bh_y = 0,$$
27) $$gb_y + ha_y - ga_x - ah_y - bg_y + ag_x = 0.$$

5. Aus 11), 20), 13), 16), 19), 25) ergiebt sich:

$$a = gA(x), \quad b = hB(y), \quad c = kC(z);$$

die Gl. 12), 18), 23) reduciren sich dann auf:

$$(B-A)(gh_z - hg_z) = -(C-B)(hk_x - kh_x) = -(A-C)(kg_y - gk_y) = 0.$$

Da höchstens zwei von den drei Functionen A, B, C constant und einander gleich sein dürfen (denn sonst wäre P constant), so sind vier Fälle möglich: entweder nämlich verschwindet der zweite Factor von jeder der letzten Gleichungen, oder der zweite Factor von irgend zwei dieser Gleichungen und der erste Factor der übrigen.

6. Ist erstens $gk_z - hg_z = hk_x - kh_x = kg_y - gk_y = 0$, so folgt:

$$g = hw(x, y), \quad h = ku(y, z), \quad k = gv(z, x), \quad uvw = 1.$$

Differentiiren wir diese letzte Gleichung logarithmisch nach x, so haben wir:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

da aber v von y, w von z unabhängig ist, so dürfen $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}$ nur die Veränderliche x enthalten; setzt man also:

$$-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)},$$

so folgt $v = \frac{\nu(z)}{\lambda(x)}$, $w = \frac{\lambda(x)}{\mu(y)}$, und hieraus $u = \frac{\mu(y)}{\nu(z)}$. Man kann also setzen:

$$a = A\lambda t, \quad b = B\mu t, \quad c = C\nu t, \quad g = \lambda t, \quad h = \mu t, \quad k = \nu t,$$

und die Gl. 14), 17), 22), 24), 26), 27) geben:

28) $$\begin{cases} -\lambda t^2[C'\nu - A'\lambda + (C-A)\nu'] = 0, & \nu t^2[C'\nu - A'\lambda + (C-A)\lambda'] = 0, \\ \mu t^2[B'\mu - C'\nu + (B-C)\nu'] = 0, & -\nu t^2[B'\mu - C'\nu + (B-C)\mu'] = 0, \\ \mu t^2[A'\lambda - B'\mu + (A-B)\lambda'] = 0, & -\lambda t^2[A'\lambda - B'\mu + (A-B)\mu'] = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt $\lambda' = \mu' = \nu'$, und da λ' nur von x, μ' nur von y, ν' nur von z abhängig sein darf, so muss der gemeinschaftliche Werth von λ', μ', ν' eine Constante δ_3 sein. Es ist dann:

$$\lambda(x) = \delta_3(x + \alpha_3), \quad \mu(y) = \delta_3(y + \beta_3), \quad \nu(z) = \delta_3(z + \gamma_3),$$

wo α_3, β_3, γ_3 constante Grössen bedeuten; und aus 28) folgt:

$$A'\lambda + A\lambda' = B'\mu + B\mu' = C'\nu + C\nu'.$$

Der gemeinschaftliche Werth dieser Ausdrücke muss eine Constante δ_1 sein; folglich ist, wenn α_1, β_1, γ_1 constante Grössen bedeuten:

$$A\lambda = \delta_1(x+\alpha_1), \quad B\mu = \delta_1(y+\beta_1), \quad C\nu = \delta_1(z+\gamma_1),$$

und endlich:

$$29) \begin{cases} a:b:c:g:h:k \\ = \delta_1(x+\alpha_1):\delta_1(y+\beta_1):\delta_1(z+\gamma_1):\delta_3(x+\alpha_3):\delta_3(y+\beta_3):\delta_3(z+\gamma_3). \end{cases}$$

7. Ist zweitens $B = C = const.$, $gh_z - hg_z = kg_y - gk_y = 0$, so hat man: $g = hw(x, y)$, $k = gv(z, x)$, und die Gleichungen 14), 17), 26), 27) erhalten die Form:

$$30) \qquad A' - (B-A)\frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$31) \qquad A' + (B-A)\frac{1}{v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$32) \qquad A' - (B-A)\frac{1}{w}\,\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$33) \qquad A' + (B-A)\frac{1}{w^2}\,\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Aus 31), 32) folgt:

$$\frac{1}{v}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{w}\,\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

und hieraus wie früher $v(z, x) = \frac{\nu(z)}{\lambda(x)}$, $w(x, y) = \frac{\lambda(x)}{\mu(y)}$; man hat dann wegen 30), 32), 33):

$$\frac{A'}{B-A} = \frac{\nu'(z)}{\lambda(x)} = \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\mu'(y)}{\lambda(x)},$$

also $\lambda'(x) = \mu'(y) = \nu'(v) = Const.$, die wir, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit, gleich 1 annehmen dürfen. Man erhält durch Integration:

$$\lambda(x) = x + \alpha_3, \quad \mu(y) = y + \beta_3, \quad \nu(z) = z + \gamma_3, \quad A - B = \frac{Const.}{\lambda(x)} = \frac{B\varepsilon}{x+\alpha_3},$$

folglich:

$$a:b:c:g:h:k = B(x+\alpha_3+\varepsilon):B(y+\beta_3):B(z+\gamma_3):x+\alpha_3:y+\beta_3:z+\gamma_3.$$

Die zwei übrigen Fälle werden ganz analog erledigt.

Ueberhaupt ersieht man, dass die allgemeine Lösungsform durch 29) gegeben wird, mit der Beschränkung, dass nicht zugleich $\alpha_1 = \alpha_3$, $\beta_1 = \beta_3$, $\gamma_1 = \gamma_3$ sein darf.

8. Die Behandlung des Gleichungssystems $Q_1 = Q_2 = 0$ führt zu einer Relation von der Form:

$$34) \begin{cases} d:e:f:g:h:k = \delta_2(x+\alpha_2):\delta_2(y+\beta_2) \\ = \delta_2(z+\gamma_2):\delta_3(x+\alpha_3):\delta_3(y+\beta_3):\delta_3(z+\gamma_3), \end{cases}$$

wo nicht zugleich $\alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_2 = \beta_3$, $\gamma_2 = \gamma_3$ sein darf.

9. Das System 29), 34) besteht aus acht Gleichungen, die leicht auf die folgende Form gebracht werden können:

$$35) \begin{cases} (x+\alpha_2)X_x + (y+\beta_2)X_y + (z+\gamma_2)X_z = 0, \\ (x+\alpha_3)X_x + (y+\beta_3)X_y + (z+\gamma_3)X_z = 0; \end{cases}$$

$$36) \begin{cases} (x+\alpha_3)Y_x + (y+\beta_3)Y_y + (z+\gamma_3)Y_z = 0, \\ (x+\alpha_1)Y_x + (y+\beta_1)Y_y + (z+\gamma_1)Y_z = 0; \end{cases}$$

$$37)\quad \begin{cases} (x+\alpha_1) Z_x + (y+\beta_1) Z_y + (z+\beta_1) Z_z = 0, \\ (x+\alpha_2) Z_x + (y+\beta_2) Z_y + (z+\gamma_2) Z_z = 0; \end{cases}$$

$$38)\quad \frac{\frac{d(Y,Z)}{d(y,z)}}{\delta_1(x+\alpha_1)} = \frac{\frac{d(Z,X)}{d(y,z)}}{\delta_2(x+\alpha_2)} = \frac{\frac{d(X,Y)}{d(y,z)}}{\delta_3(x+\alpha_3)}.\text{*}$$

Die Anwendung der Mayer'schen Integrationsmethode auf das Gleichungssystem 35) giebt als das allgemeine Integral derselben:

$$X = \Phi\left(\frac{(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)x + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)y + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)z}{(\beta_3 - \beta_2)x - (\alpha_3 - \alpha_2)y + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)}\right),$$

wo Φ eine willkürliche Function ist. Das Argument Θ dieser Function kann durch das Argument:

$$\xi = \frac{1}{(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_3)\Theta}\left\{(\alpha_3 - \alpha_2 - \beta_3 + \beta_2)\Theta + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}\right\}$$

ersetzt werden, welches eine symmetrische Form besitzt. Wir werden der Kürze halber schreiben:

$$X = F(\xi) = F\left(\frac{\mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{b}_1 y + \mathfrak{c}_1 z + \mathfrak{d}_1}{\mathfrak{e}_1 x + \mathfrak{f}_1 y + \mathfrak{g}_1 z}\right) = F\left(\frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{D}_1}\right).$$

Aus 36) und 37) ergiebt sich ganz analog:

$$Y = G(\eta) = G\left(\frac{\mathfrak{a}_2 x + \mathfrak{b}_2 y + \mathfrak{c}_2 z + \mathfrak{d}_2}{\mathfrak{e}_2 x + \mathfrak{f}_2 y + \mathfrak{g}_2 z}\right) = G\left(\frac{\mathfrak{N}_2}{\mathfrak{D}_2}\right),$$

$$Z = H(\zeta) = H\left(\frac{\mathfrak{a}_3 x + \mathfrak{b}_3 y + \mathfrak{c}_3 z + \mathfrak{d}_3}{\mathfrak{e}_3 x + \mathfrak{f}_3 y + \mathfrak{g}_3 z}\right) = H\left(\frac{\mathfrak{N}_3}{\mathfrak{D}_3}\right).$$

10. Man findet durch leichte Rechnungen:

$$39)\quad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{-\mathfrak{e}_1\xi + \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{D}_1},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{-\mathfrak{f}_1\xi + \mathfrak{b}_1}{\mathfrak{D}_1},\quad \frac{\partial\xi}{\partial z} = \frac{-\mathfrak{g}_1\xi + \mathfrak{c}_1}{\mathfrak{D}_1},\ \ldots,$$

$$\frac{d(\eta,\zeta)}{d(y,z)} = \frac{\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3}{\mathfrak{D}_2^2\mathfrak{D}_3^2}(x+\alpha_1)U,\ \ldots,$$

wo:

$$U = |1\beta\gamma|x + |1\gamma\alpha|y + |1\alpha\beta|z + |\alpha\beta\gamma|,$$

und hieraus:

$$\frac{d(Y,Z)}{d(y,z)} = G'(\eta)\ H'(\zeta)\frac{d(\eta,\zeta)}{d(y,z)} = G'\ H'\frac{\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3}{\mathfrak{D}_2^2\mathfrak{D}_3^2}(x+\alpha_1)U,\ \ldots.$$

Es folgt dann aus 38):

$$\frac{1}{\delta_1}G'\,H'\frac{d_2\,d_3}{D_2^2\,D_3^2} = \frac{1}{\delta_2}H'\,F'\frac{d_3\,d_1}{D_3^2\,D_1^2} = \frac{1}{\delta_3}F'\,G'\frac{d_1\,d_2}{D_1^2\,D_2^2},$$

oder wenn man $\delta_r\dfrac{\mathfrak{d}_r}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3} = \mathfrak{i}_r$ setzt:

$$40)\quad \frac{\mathfrak{i}_1 F'}{\mathfrak{D}_1^2} = \frac{\mathfrak{i}_2 G'}{\mathfrak{D}_2^2} = \frac{\mathfrak{i}_3 H'}{\mathfrak{D}_3^2}.$$

Differentiiren wir nach x, so folgt wegen 39):

---

* Wäre $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, so würden wir 38) durch das nach y oder nach z analog gebildete Gleichungssystem ersetzen.

$$\frac{\mathfrak{j}_1}{\mathfrak{D}_1^{\,3}}[F''(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{c}_1\xi)-2F'\mathfrak{c}_1]=\frac{\mathfrak{j}_2}{\mathfrak{D}_2^{\,3}}[G''(\mathfrak{a}_2-\mathfrak{e}_2\eta)-2G'\mathfrak{c}_2]$$
$$=\frac{\mathfrak{j}_3}{\mathfrak{D}_1^{\,3}}[H''(\mathfrak{a}_3-\mathfrak{e}_3\zeta)-2H'\mathfrak{e}_3],$$

und nach Division durch die $(\frac{3}{2})^{\text{te}}$ Potenz von 40):

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{j}_1}}\frac{(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{c}_1\xi)F''-2\mathfrak{c}_1F'}{F'^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{j}_2}}\frac{(\mathfrak{a}_2-\mathfrak{e}_2\eta)G''-2\mathfrak{e}_2G'}{G'^{3/2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{j}_3}}\frac{(\mathfrak{a}_3-\mathfrak{e}_3\zeta)H''-2\mathfrak{e}_3H'}{H'^{3/2}}.$$

Der erste Ausdruck hängt nur von ξ, der zweite nur von η, der dritte nur von ζ ab, folglich ist ihr gemeinschaftlicher Werth eine Constante 2ε. Durch Integration der Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{j}_1}}\frac{(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{e}_1\xi)F''-2\mathfrak{c}_1F'}{F'^{3/2}}=2\varepsilon$$

erhält man, wenn $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{k}_1$ zwei willkürliche Constanten bezeichnen:

$$F=-\frac{\dfrac{1}{\mathfrak{h}_1\mathfrak{j}_1}}{\mathfrak{h}_1\xi-\dfrac{\mathfrak{h}_1\mathfrak{a}_1+\varepsilon}{\mathfrak{e}_1}}+\mathfrak{k}_1 \tag{41}$$

oder, wenn man:

$$\mathfrak{h}_1\mathfrak{R}_1-\frac{h_1\mathfrak{a}_1+\varepsilon}{\mathfrak{e}_1}\mathfrak{D}_1=\mathfrak{R}_1,\quad \mathfrak{k}_1R_1-\frac{1}{\mathfrak{h}_1\mathfrak{j}_1}\mathfrak{D}_1=\mathfrak{Q}_1$$

setzt:

$$F=\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{R}_1},$$

und analog:

$$G=\frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{R}_2},\quad H=\frac{\mathfrak{Q}_3}{\mathfrak{R}_3}.$$

Aus 41) folgt:

$$F'=\frac{1}{\mathfrak{j}_1\left(h_1\xi-\dfrac{\mathfrak{h}_1\mathfrak{a}_1+\varepsilon}{\mathfrak{e}_1}\right)^2}=\frac{D_1^{\,2}}{\mathfrak{j}_1R_1^{\,2}}$$

und ebenso:

$$G'=\frac{\mathfrak{D}_2^{\,2}}{\mathfrak{j}_2\mathfrak{R}_2^{\,2}},\quad H'=\frac{\mathfrak{D}_3^{\,2}}{\mathfrak{j}_3\mathfrak{R}_3^{\,2}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in 40) ein, so hat man $\mathfrak{R}_1^{\,2}=\mathfrak{R}_2^{\,2}=\mathfrak{R}_3^{\,2}$, und hieraus, wenn man beachtet, dass ε der Coefficient von x in allen drei Polynomen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ ist:

$$\mathfrak{R}_1=\mathfrak{R}_2=\mathfrak{R}_3.$$

Damit ist bewiesen, dass:

$$X=\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{R}_1},\quad Y=\frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{R}_2},\quad Z=\frac{\mathfrak{Q}_3}{\mathfrak{R}_3}$$

eine projective Punkttransformation bildet.

Mantua, den 24. September 1891.

II.

Bewegung eines materiellen mit Elektricität geladenen Theilchens unter der Einwirkung eines ruhenden Centrums bei Giltigkeit des Weber'schen Gesetzes.

Von

E. Ritter

in Cassel.

Hierzu Taf. I u. II.

Die Bewegung eines Punktes, der von einem Centrum nach dem Weber'schen Gesetz angezogen wird, ist schon in verschiedenen Arbeiten Gegenstand der Betrachtung gewesen. Diese früheren Behandlungen kann man in zwei Gattungen unterscheiden, von denen die eine wesentlich astronomische Tendenz verfolgt, indem sie die Anwendbarkeit des Weber'schen Gesetzes auf die Bewegung der Weltkörper darzuthun sucht, die andere mehr physikalisch-chemische Gesichtspunkte voranstellt.

In die erste Gattung gehören die Abhandlungen von:

Seegers, De motu perturbationibusque planetarum secundum legem Weberianam solem ambientium. (Inaug.-Diss. Göttingen 1884);

Tisserand, Sur le mouvement des planètes autour du soleil d'après la loi électrodynamique de Weber. (Comptes rendus 1872).

Beide Arbeiten behandeln naturgemäss nur einen beschränkten Fall, nämlich nur den der Anziehung, bei Geschwindigkeiten, die klein sind im Verhältniss zu der Constanten c des Weber'schen Gesetzes, und zwar Seegers in voller Strenge, Tisserand als Störungsproblem mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{1}{c^2}$. Es sind dies die Fälle von Taf. I Fig. 1 u. 2.

Zur andern Classe von Arbeiten sind zu rechnen:

W. Weber, Elektrodynamische Massbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. (Abh. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 10 u. 11).

In dieser Abhandlung wird das Problem der Bewegung zweier Theilchen, die nach dem Weber'schen Gesetz aufeinander wirken, nur beiläufig, als Beispiel für allgemeinere Untersuchungen, betrachtet. Demgemäss wird das Problem auch nicht vollständig durchgeführt, sondern nur qualitativ, mit besonderer Rücksicht auf die „Molecularbewegungen“ discutirt. Zugleich

wird dort aus gewissen allgemeineren Gründen die Beschränkung getroffen, dass die Constante des Energiesatzes unter einer gewissen Grenze bleibe, wodurch eine Reihe von Bewegungen wegfällt.

Ed. Riecke, Ueber Molekularbewegung zweier Theilchen, deren Wechselwirkung durch das Weber'sche Gesetz bestimmt wird. (Gött. Nachr. 1874.)

Hierin wird nur der in dem innern Theile von Taf. I Fig. 6 dargestellte Bewegungstypus, und zwar in voller Strenge, untersucht.

G. Lolling, Ueber Bewegungen elektrischer Theilchen nach dem Weber'schen Grundgesetz der Elektrodynamik. (Nova acta d. kaiserl. Leopold. Carol. Deutschen Akademie der Naturf., Bd. 44.)

Diese Arbeit ist, wenigstens ihrer Absicht nach, von allen die umfassendste, indem sie sämmtliche möglichen Bewegungsarten zu untersuchen beabsichtigt; aber freilich hat sie eine Reihe von Mängeln, auf die ich zum Schlusse meiner Arbeit ausführlicher eingehen will, und die eine neue Bearbeitung desselben Problems nicht nur nicht überflüssig, sondern nothwendig erscheinen lassen.

Ich meinerseits werde in der vorliegenden Abhandlung mit elementaren Hilfsmitteln, mit Vermeidung der für die Discussion überflüssigen, ja nur die Uebersicht erschwerenden elliptischen Functionen alle vorkommenden Bewegungsvorgänge mit besonderer Berücksichtigung ihrer Grenzfälle und ihres Zusammenhanges untereinander untersuchen, und so nicht allein die Lolling'schen Angaben berichtigen, sondern auch zu detaillirteren Resultaten kommen, als Herr Lolling mit seinem umständlichen Formelapparat.

---

§ 1.

Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Es sei gegeben ein festes Centrum mit der elektrischen Ladung ε_1 und ein im Raume frei beweglicher materieller Punkt mit der Masse m und der elektrischen Ladung ε_2. Dann findet aus Symmetrierücksichten die Bewegung dieses Punktes stets in derjenigen durch das Centrum gelegten Ebene statt, in welcher die Anfangsbewegung liegt. In dieser Ebene construire ich ein rechtwinkliges Coordinatensystem (x, y) mit dem festen Centrum als Nullpunkt; es sei ferner $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Entfernung des bewegten Punktes vom Centrum, und $\frac{dr}{dt} = r'$, $\frac{d^2 r}{dt^2} = r''$.

Dann ist

$$V = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r} \left\{ 1 + \frac{r'^2}{c^2} \right\}$$

die Kräftefunction des Weber'schen Gesetzes, durch welche sich die in der Richtung des Radius vector auf das bewegte Theilchen wirkende Kraft folgendermassen ausdrückt:

$$R = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial r'}\right) = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2} \left\{ 1 - \frac{r'^2 - 2 r r''}{c^2} \right\}.$$

Die Componenten der Kraft nach der x- und y-Richtung ergeben sich hieraus durch die Formeln:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = X = -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right) = R \cdot \frac{x}{r},$$

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = Y = -\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) = R \cdot \frac{y}{r}.$$

Führt man Polarcoordinaten (r, φ) ein, so lauten die Bewegungsgleichungen, unter φ', φ'' bezw. $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ verstanden:

$$m(r'' - r\varphi'^2) = R = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2}\left\{1 - \frac{r'^2 - 2rr''}{c^2}\right\},$$

$$m(r\varphi'' + 2r'\varphi') = 0.$$

§ 2.

Aufstellung der ersten Integrale der Bewegungsgleichungen.

Beim Weber'schen Gesetz ist die bei einer kleinen Bewegung von der Kraft geleistete Arbeit das vollständige Differential einer Function, die vom Ort und dem Bewegungszustande abhängt, der negativ genommenen potentiellen Energie:

$$P = V - r'\frac{\partial V}{\partial r'} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r}\left\{1 - \frac{r'^2}{c^2}\right\}.$$

In solchem Falle gilt aber das Princip der Erhaltung der Energie:

$$T + P = k_1,$$

wenn man unter T die kinetische Energie versteht.

Eine zweite Integralgleichung wird uns durch den Flächensatz geliefert, da ja die Kraft eine Centralkraft ist.

Die so gefundenen Integralgleichungen lauten in Polarcoordinaten, deren ich mich fortan bedienen werde:

1) $$\tfrac{1}{2} m(r'^2 + r^2\varphi'^2) + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right) = k_1,$$

2) $$r^2 \varphi' = k_2.$$

Hieraus folgt durch Elimination von φ' die Gleichung:

$$r'^2 = \frac{2k_1}{m} \cdot \frac{r^2 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{k_1} r - \frac{k_2^2 m}{2k_1}}{r\left(r - \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{c^2 m}\right)}.$$

Ich setze zur Abkürzung:

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{k_1} = \varrho_1 + \varrho_2, \quad -\frac{k_2^2 m}{2k_1} = \varrho_1 \varrho_2, \quad \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{c^2 m} = \varrho_3.$$

Dann wird

3) $$r' = \pm c\sqrt{\frac{\varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_2}}\sqrt{\frac{(r - \varrho_1)(r - \varrho_2)}{r(r - \varrho_3)}},$$

4) $$\varphi' = c\sqrt{-\frac{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_2}} \cdot \frac{1}{r^2}.*$$

* φ' werde ich, da der Punkt seinen Rotationssinn nie ändert, ein- für allemal positiv voraussetzen.

Es ist noch ϱ_1 und ϱ_2 durch den Anfangszustand des bewegten Theilchens auszudrücken; für die auf den Anfangszustand bezüglichen Grössen will ich folgende Bezeichnungen einführen:

$$r' = c.p, \quad r\varphi' = c.q, \quad r = \varrho_3.s.$$

Im Falle, dass ϱ_1 und ϱ_2 reell sind, soll ϱ_1 den grösseren absoluten Werth besitzen; falls ϱ_1 und ϱ_2 conjugirt imaginär sind, soll der reelle und imaginäre Theil von ϱ_1 gleiches Vorzeichen haben. Es ist dann, wenn man die Quadratwurzeln immnr positiv oder positiv imaginär annimmt:

$$5)\quad \begin{cases} \varrho_1 = \dfrac{\frac{1}{2}\varrho_3 s}{1-p^2+s(p^2+q^2)}\left\{1+\sqrt{1+4sq^2[1-p^2+s(p^2+q^2)]}\right\}, \\ \varrho_2 = \dfrac{\frac{1}{2}\varrho_3 s}{1-p^2+s(p^2+q^2)}\left\{1-\sqrt{1+4sq^2[1-p^2+s(p^2+q^2)]}\right\}, \\ \varrho_3 = \dfrac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{m.c^2}. \end{cases}$$

§ 3.

Allgemeine Discussion der ersten Integrale.

Für die physikalische Deutung der Formeln kommen nur positive r in Betracht, da man bei absoluter Deutung negativer r jedesmal einen andern physikalischen Fall, statt Anziehung Abstossung und umgekehrt erhalten würde.

Ich werde zunächst ganz allgemein das Verhalten der Bewegung für $r = \varrho_1$ oder ϱ_2, für ϱ_3, 0, ∞ untersuchen, vorausgesetzt, dass die Bewegung einen dieser Punkte wirklich erreicht.

Wird $r = \varrho_1$ oder $= \varrho_2$, so wird $r' = 0$. Würde r den Werth ϱ_1 oder ϱ_2 überschreiten, so würde der Radicand in r', wenn er erst positiv war, negativ, r' also imaginär werden. Bei der wirklichen Bewegung muss folglich r umkehren, sobald es an ϱ_1 oder ϱ_2 gelangt, und zwar derart, dass r' durch Null hindurchgehend sein Zeichen wechselt. Da für $r = \varrho_1$ oder ϱ_2 φ' endlich und im Allgemeinen von Null verschieden ist, so berührt die Bahncurve die Kreise ϱ_1 und ϱ_2, falls sie dieselben überhaupt erreicht. Die Bahn besitzt dort ein Perihel.

Auch an dem Kreise $r = \varrho_3$ muss r umkehren; doch ist hier $r' = \infty$, φ' endlich; also muss der Punkt, wenn er den Kreis $r = \varrho_3$ erreicht, auf ihn mit unendlicher Geschwindigkeit auf- und von ihm zurückprallen. Die Bahncurve besitzt dort eine auf dem Kreise $r = \varrho_3$ senkrecht stehende Spitze.

Erreicht die Bewegung den Nullpunkt, so wird daselbst sowohl r', als auch φ' unendlich. Die Bahn umkreist den Nullpunkt unendlich oft spiralförmig und zwar schneidet sie die Radii vectores um so mehr rechtwinklig, je näher sie dem Centrum kommt. Die Gesammtgeschwindigkeit wird für $r = 0$ unendlich wie $\dfrac{1}{r}$.

Erstreckt sich die Bewegung ins Unendliche, so kommt der Punkt daselbst mit der Grenzgeschwindigkeit

$$v = c\sqrt{\frac{\varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_2}}$$

an.

Da $\varphi' = 0$ wird, so wird die Bewegung immer mehr radial gerichtet.

Der Grenzwerth der Subtangente wird

$$lim\, \mathfrak{S}_t = lim\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = \sqrt{-\varrho_1 \varrho_2}.$$

Die Curve besitzt also, wenn sie sich ins Unendliche erstreckt, immer eine im Endlichen gelegene Asymptote, falls nicht $\varrho_1 = \infty$ ist.

Ferner interessiren uns noch die Inflexionspunkte der Bahn, welche physikalisch dadurch charakterisirt sind, dass in ihnen die Kraft verschwindet. Demgemäss ist in ihnen:

$$r'' - r\varphi'^2 = 0, \quad r'^2 - 2rr'' = c^2$$

oder, indem man r'' eliminirt:

$$r'^2 - 2r^2\varphi'^2 = c^2.$$

Setzt man die Werthe von r' und φ' aus 3) und 4) ein, so ergiebt sich für die Radii vectores der Wendepunkte die Gleichung:

$$6) \qquad f(r) = r^3 - 3r \cdot \frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3} + \frac{2\varrho_1\varrho_2\varrho_3^2}{\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3} = 0.$$

Um die reellen Wurzeln dieser Gleichung abzusondern, stelle ich nach dem Sturm'schen Verfahren die Reihe folgender vier Functionen auf:

$$7) \quad \begin{cases} f(r), \quad f_1(r) = r^2 - \dfrac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3}, \\ f_2(r) = \dfrac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3(r - \varrho_3)}{\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3}, \quad f_3(r) = \dfrac{\varrho_3(\varrho_1 - \varrho_3)(\varrho_2 - \varrho_3)}{\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3}, \end{cases}$$

Die Anzahl der zwischen zwei Grenzen α und β enthaltenen reellen Wurzeln ist dann gleich der Anzahl der Zeichenwechsel, welche in der Reihe f, f_1, f_2, f_3 beim Fortschritt von α bis β verloren gehen.

§ 4.

Eintheilung der möglichen Bewegungsvorgänge.

Die im vorigen Paragraphen ausgesprochenen allgemeinen Sätze sind, soweit sie sich auf die Bahncurve beziehen, natürlich nur so lange giltig, als man überhaupt eine Bewegung in zwei Dimensionen vor sich hat, d. h. so lange ϱ_2 und damit k_2 von Null verschieden ist. Der Fall $\varrho_2 = 0$ erfordert überhaupt eine besondere Behandlung.

Ich will daher bei der speciellen Untersuchung erst unter A. den allgemeinen Fall $\varrho_2 \gtrless 0$ behandeln, dann besonders unter B. den Fall $\varrho_2 = 0$.

Berücksichtigt man, dass in den Formeln 4) und 5) r' und φ' reell sein müssen und dass r nur positive Werthe annehmen darf, so findet man folgende Eintheilung der physikalisch möglichen Bewegungsvorgänge:

A. $\varrho_2 \gtrless 0$. Bewegung in zwei Dimensionen.

I. $\varrho_3 < 0$. Ladungen der Punkte ungleichnamig.

1) $+\infty > \varrho_1 \geqq \varrho_2 > 0$ oder $\frac{1}{4(-s).q^2} \geqq 1 - p^2 + s(p^2+q^2) > 0$,

2) $\varrho_2 > 0 > \varrho_1 \geqq -\infty$ oder $0 \geqq 1 - p^2 + s(p^2+q^2)$.

II. $\varrho_3 > 0$. Ladungen der Punkte gleichnamig.

1) $0 > \varrho_2 \geqq \varrho_1 \geqq -\infty$ oder $0 \geqq 1 - p^2 + s(p^2+q^2) \geqq -\frac{1}{4sq^2}$,

2) $\varrho_1 = -a - bi$, $\varrho_2 = -a + bi$ oder $0 > -\frac{1}{4sq^2} > 1 - p^2 + s(p^2+q^2)$,

3) $+\infty > \varrho_1 > 0 > \varrho_2$ oder $1 - p^2 + s(p^2+q^2) > 0$,

a) $\varrho_3 > \varrho_1$,

b) $\varrho_1 > \varrho_3$,

c) $\varrho_1 = \varrho_3$.

B. $\varrho_2 = 0$. Bewegung in einer Dimension.

I. $\varrho_3 < 0$. Ladungen der Punkte ungleichnamig.

1) $+\infty > \varrho_1 > 0$ oder $1 - p^2 + sp^2 > 0$,

2) $0 > \varrho_1 \geqq -\infty$ oder $0 \geqq 1 - p^2 + sp^2$.

II. $\varrho_3 > 0$. Ladungen der Punkte gleichnamig.

1) $0 > \varrho_1 \geqq -\infty$ oder $0 \geqq 1 - p^2 + sp^2$,

2) $+\infty > \varrho_1 > 0$ oder $1 - p^2 + sp^2 > 0$,

a) $\varrho_3 > \varrho_1$,

b) $\varrho_1 > \varrho_3$,

c) $\varrho_1 = \varrho_3$.

§ 5.

A. Bewegung in zwei Dimensionen.

$\varrho_2 \gtrless 0$. (Figurentafel I.)

I. $\varrho_3 < 0$. Ladungen der Punkte ungleichnamig.

1) $+\infty > \varrho_1 \geqq \varrho_2 > 0$ oder $\frac{1}{4(-s)q^2} \geqq 1 - p^2 + s(p^2+q^2) > 0$;

$$r' = \pm c \sqrt{\frac{-\varrho_3}{\varrho_1+\varrho_2}} \sqrt{\frac{(\varrho_1 - r)(r - \varrho_2)}{r(r-\varrho_3)}},$$

$$\varphi' = c \sqrt{\frac{\varrho_1\varrho_2(-\varrho_3)}{\varrho_1+\varrho_2}} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

r' ist nur dann reell, wenn r sich zwischen ϱ_1 und ϱ_2 befindet. Die Bahncurve wird demnach der vorangeschickten allgemeinen Discussion zufolge die beiden Grenzkreise $r = \varrho_1$ und $r = \varrho_2$ abwechselnd berühren.

Die Zeichenfolge in der Functionsreihe 7) ist sowohl für $r = \varrho_2$, wie für $r = \varrho_1$: $+ + - +$. Die Bahn besitzt also keine Inflexionspunkte und ist mithin überall concav gegen das Centrum (Fig. 2).

Die Zeit, welche zwischen der Berührung des innern und der nächsten des äussern Grenzkreises vergeht, ist endlich und durch das Integral gegeben:

$$T = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{-\varrho_3}} \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} dr \sqrt{\frac{r(r-\varrho_3)}{(\varrho_1 - r)(r - \varrho_2)}}.$$

Der Winkel, den die Radii vectores nach zwei aufeinanderfolgenden Perihelien miteinander bilden, ist

$$\Phi = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2} \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{r - \varrho_3}{r(\varrho_1 - r)(r - \varrho_2)}}.$$

Im Grenzfall $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ oder $1 - p^2 + s(p^2 + q^2) = \frac{1}{4(-s)q^2}$ geht die Bewegung in eine Kreisbewegung über (Fig. 1). Dann ist

$$r = \varrho, \quad r' = 0, \quad \varphi' = c\sqrt{\tfrac{1}{2}(-\varrho_3)} \cdot \varrho^{-3/2},$$

$$p = 0, \quad q = \sqrt{\tfrac{1}{2}(-\varrho_3)} \cdot \varrho^{-1/2}, \quad s = \frac{1}{\varrho_3} \cdot \varrho;$$

$$1 - p^2 + s(p^2 + q^2) = \frac{1}{4(-s)q^2} = \tfrac{1}{2}.$$

2) $\qquad + \infty > \varrho_2 > 0 > \varrho_1 \geqq - \infty$ oder $0 \geqq 1 - p^2 + s(p^2 + q^2)$;

$$r' = \pm c \sqrt{\frac{-\varrho_3}{-(\varrho_1 + \varrho_2)}} \sqrt{\frac{(r - \varrho_1)(r - \varrho_2)}{r(r - \varrho_3)}},$$

$$\varphi' = \quad c \sqrt{\frac{(-\varrho_1) \cdot \varrho_2 (-\varrho_3)}{-(\varrho_1 + \varrho_2)}} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Damit r' reell sei, muss $r \geqq \varrho_2$ sein; die Bewegung bleibt stets ausserhalb des Kreises mit dem Radius ϱ_2, denselben einmal berührend, indem sich die Bahncurve symmetrisch zum Berührungspunkte beiderseits ins Unendliche erstreckt, und zwar mit je einer Asymptote, deren kürzester Abstand vom Nullpunkte $= \sqrt{(-\varrho_1)\varrho_2}$ ist (Fig. 3 u. 4).

Der Winkel, den eine dieser beiden Asymptoten mit dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Radius vector bildet, ist durch das Integral gegeben:

$$\Phi = \sqrt{(-\varrho_1)\varrho_2} \int_{\varrho_2}^{\infty} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{r - \varrho_3}{r(r - \varrho_1)(r - \varrho_2)}}.$$

Für dieses Integral kann man leicht eine untere Grenze angeben:

$$\Phi = \sqrt{-\varrho_1 \varrho_2} \int\limits_{\varrho_2}^{\infty} \sqrt{\frac{r + (-\varrho_3)}{r}} \cdot \frac{dr}{r\sqrt{(r-\varrho_1)(r-\varrho_2)}}$$

$$> \sqrt{-\varrho_1 \varrho_2} \int\limits_{\varrho_2}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{(r-\varrho_1)(r-\varrho_2)}} = 2\, arctg \sqrt{\frac{-\varrho_1}{\varrho_2}}.$$

Es ist aber $-\varrho_1 \geqq \varrho_2$, also $\Phi > \frac{1}{2}\pi$. D. h.: der Punkt wird im Ganzen nach dem Centrum hin von seiner geradlinigen Bahn abgelenkt, so dass die Kraft mehr anziehend als abstossend wirkt.

Ob aber die Curve überall gegen das Centrum concav ist oder ob sie Wendepunkte besitzt, ist noch besonders zu untersuchen.

Die Curve ist gegen das Centrum convex oder concav, je nachdem an der betreffenden Stelle die Kraft eine Abstossung oder eine Anziehung ist.

In der Nähe des Perihels ist $r' = 0$, $r'' > 0$, also

$$R = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2} + 2\frac{rr''}{c^2}\right) < 0,$$

die Kraft folglich eine Anziehung, die Curve concav gegen das Centrum.

Im Unendlichfernen ist

$$r'^2 = c^2 \cdot \frac{\varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_2}, \quad r'' = 0,$$

$$R = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2} \cdot \frac{\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_2}$$

die Kraft, folglich Anziehung oder Abstossung, je nachdem $(-\varrho_3)$ kleiner oder grösser als $-(\varrho_1 + \varrho_2)$ ist, und ebenso die Curve gegen das Centrum concav oder convex. Im ersten Falle muss die Curve zwischen $r = \varrho_2$ und $r = \infty$ zu jeder Seite des Perihels eine gerade, im zweiten Falle eine ungerade Anzahl von Wendepunkten haben. Man kann aber leicht durch Untersuchung der Functionen 7) sehen, dass im ganzen Intervall $r = 0$ bis $r = \infty$ im ersten Falle kein, im zweiten nur ein Wendepunkt auf jeder Seite des Perihels liegen kann.

Die Curve ist also, wenn $(-\varrho_3) < -(\varrho_1 + \varrho_2)$ ist, von der in Fig. 3 dargestellten Art, wenn dagegen $(-\varrho_3) > -(\varrho_1 + \varrho_2)$ ist, von der Gestalt der Fig. 4. Den Uebergang zwischen beiden Fällen bildet $(-\varrho_3) = -(\varrho_1 + \varrho_2)$: dann liegen die Inflexionspunkte unendlich fern und die Asymptoten sind selbst Wendetangenten.

Ein Grenzfall von 2) ist:

$$\varrho_1 = -\infty \quad \text{oder} \quad 1 - p^2 + s(p^2 + q^2) = 0.$$

In diesem Falle rücken die Asymptoten der Fig. 3 ins Unendliche; sonst bleibt die Figur dieselbe. Man kann sich die Curve auch aus Fig. 2 entstanden denken, indem der äussere Kreis $r = \varrho_1$ unendlich gross wird.

Man sieht, wie man durch allmälige Aenderung von ϱ_1 alle in den Figuren 1—4 dargestellten Bewegungsarten erhalten kann, und wie diese ineinander übergehen. Ich will ϱ_2 und ϱ_3 festhalten, ϱ_1 dagegen von ϱ_2

bis $+\infty$, dann von $-\infty$ bis $-\varrho_2$ wachsen lassen. Es folgen dann die einzelnen Bewegungsarten nach folgendem Schema aufeinander:

$\varrho_1 = \varrho_2$ . . . . . . Fig. 1,
$+\infty > \varrho_1 > \varrho_2$ . . . „ 2,
$\varrho_1 = \pm\infty$ . . . . . „ 3 mit unendlich fernen Asymptoten,
$\varrho_3 - \varrho_2 > \varrho_1 > -\infty$. . „ 3,
$\varrho_1 = \varrho_3 - \varrho_2$ . . . . „ 3 mit Wendepunkten im Unendlichen,
$-\varrho_2 > \varrho_1 > \varrho_3 - \varrho_2$. . „ 4.

Endlich kann man noch als einen Grenzfall von I den Fall ansehen, dass

$$\varrho_3 = 0,$$

also einer der Punkte nicht elektrisch geladen ist.

Falls hier überhaupt eine Bewegung vorliegen soll, muss dann zugleich

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0$$

sein, $\dfrac{\varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_2}$ aber einen bestimmten, von 0 verschiedenen Werth haben, etwa $\dfrac{a}{c}$. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$r' = \pm a \cdot \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - \varrho_2^2}, \quad \varphi' = a \cdot \frac{\varrho_2}{r^2}, \quad \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\varrho_2}{r\sqrt{r^2 - \varrho_2^2}}.$$

Das Integral dieser letzteren Differentialgleichung lautet, wenn man für $r = \varrho_2$ $\varphi = 0$ setzt:

$$r . \cos\varphi = \varrho_2,$$

welches die Gleichung einer Geraden mit der Entfernung ϱ_2 vom Centrum ist. Die Geschwindigkeit ist überall constant, nämlich

$$v = a.$$

Man kann die Bewegung (Fig. 5) als Grenzfall von Fig. 3 oder von Fig. 4 auffassen, indem der Asymptotenwinkel den kleinstmöglichen Werth π annimmt und die Curve mit den Asymptoten zusammenfällt.

II. $\varrho_3 > 0$. Ladungen der Punkte gleichnamig.

1) $0 > \varrho_2 \geqq \varrho_1 \geqq -\infty$ oder $0 \geqq 1 - p^2 + s(p^2 + q^2) \geqq -\dfrac{1}{4sq^2}$,

$$r' = \pm c\sqrt{\frac{\varrho_3}{-(\varrho_1 + \varrho_2)}}\sqrt{\frac{(r - \varrho_1)(r - \varrho_2)}{r(\varrho_3 - r)}},$$

$$\varphi' = c\sqrt{\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{-(\varrho_1 + \varrho_2)}} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Die Bahn windet sich unendlich oft spiralförmig um das Centrum herum und steht mit einer Spitze senkrecht auf dem Kreise $r = \varrho_3$ auf, so dass eine Bahncurve entsteht, wie sie sich in dem innern Kreise der Fig. 9 befindet, doch ohne den andern ausserhalb ϱ_1 in derselben Figur dargestellten Ast.

Die Grenzfälle $\varrho_1 = \varrho_2$ und $\varrho_1 = -\infty$ ändern den Charakter dieser Bewegung nicht.

2) $\varrho_1 = -a - bi$, $\varrho_2 = -a + bi$ oder $0 > -\frac{1}{4sq^2} > 1 - p^2 + s(p^2 + q^2)$;

$$r' = \pm c \sqrt{\frac{\varrho_3}{2a}} \sqrt{\frac{(r+a)^2 + b^2}{r(\varrho_3 - r)}},$$

$$\varphi' = c \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)\varrho_3}{2a}} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Die Bewegung hat wieder dieselbe Form wie in II 1), so dass man II 1) und II 2) physikalisch in eine Kategorie zusammenfassen kann, charakterisirt durch die Bedingung:

$$0 \geqq 1 - p^2 + s(p^2 + q^2).$$

In beiden Fällen 1) und 2) ist die Zeit, in welcher der Punkt von $r = 0$ bis $r = \varrho_3$ gelangt, endlich, nämlich:

$$T = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{-(\varrho_1 + \varrho_2)}{\varrho_3}} \int_0^{\varrho_3} dr \sqrt{\frac{r(\varrho_3 - r)}{(r - \varrho_1)(r - \varrho_2)}}.$$

3) $+\infty > \varrho_1 > 0 > \varrho_2$ oder $1 - p^2 + s(p^2 + q^2) > 0$;

$$r' = \pm c \sqrt{\frac{\varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_2}} \sqrt{\frac{(r - \varrho_1)(r - \varrho_2)}{r(r - \varrho_3)}},$$

$$\varphi' = c \sqrt{\frac{\varrho_1(-\varrho_2)\varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_2}} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Es existiren zwei Grenzkreise, $r = \varrho_1$ und $r = \varrho_3$. Reell ist die Bewegung nur innerhalb des innern und ausserhalb des äussern der beiden Kreise. Man erhält so jedesmal zwei Curvenzweige, die zwar analytisch zusammengehören, physikalisch jedoch zwei verschiedene Bedingungen darstellen, die nur im Falle c), in welchem die beiden Grenzkreise zusammenfallen, in Zusammenhang treten. In den Figuren habe ich immer beide Zweige zugleich gezeichnet, um so den Zusammenhang der Figuren untereinander besser hervortreten zu lassen.

Derjenige Curvenzweig, dessen Gebiet durch den Kreis $r = \varrho_1$ begrenzt ist, berührt diesen Grenzkreis, der andere steht mit einer Spitze senkrecht auf dem Grenzkreise $r = \varrho_3$ auf.

a) $\varrho_3 > \varrho_1$ (Fig. 6).

Die Bahncurve besteht aus einem innern Curvenzweige, der sich unendlich oft um das Centrum herumschlingt und den Kreis $r = \varrho_1$ von innen berührt (α), und einem äussern Zweige, der mit zwei Asymptoten ins Unendliche reichend, mit einer Spitze auf dem Kreise $r = \varrho_3$ aufsteht (β). Weder der innere, noch der äussere Curvenast besitzt Wendepunkte, da weder im innern, noch im äussern Intervall die Reihe der Functionen 7) Zeichenwechsel verliert. Beide Aeste sind gegen das Centrum überall concav, bei beiden Bewegungen liegt also durchweg Anziehung vor.

Die Zeit, welche zur Durchlaufung der inneren Bahn von $r=0$ bis $r=\varrho_1$ gebraucht wird, ist endlich:

$$T=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_3}}\int_0^{\varrho_1} dr\sqrt{\frac{r(r-\varrho_3)}{(r-\varrho_1)(r-\varrho_2)}}.$$

Der Winkel zwischen den Asymptoten des äusseren Astes und dem Radius vector nach der Spitze ist:

$$\Phi=\sqrt{\varrho_1(-\varrho_2)}\int_{\varrho_3}^{\infty}\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{r-\varrho_3}{r(r-\varrho_1)(r-\varrho_2)}}.$$

b) $\varrho_1>\varrho_3$ (Fig. 8 u. 9).

Auch hier besteht die Bahncurve aus zwei getrennten Aesten, von denen jedoch der innere eine Spitze besitzt, der äussere den Grenzkreis berührt.

Der innere Curvenast (α) besitzt stets zu jeder Seite der Spitze je einen Inflexionspunkt, der äussere (β) nur dann auf jeder Seite des Perihels je einen Inflexionspunkt, wenn $\varrho_1+\varrho_2>\varrho_3$, wie man ebenso wie im Falle I 2) schliesst. Die Wendepunkte rücken ins Unendliche, wenn $\varrho_1+\varrho_2=\varrho_3$ wird, und verschwinden für $\varrho_1+\varrho_2<\varrho_3$.

Für die Bewegung im innern Kreise ist:

$$T=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_3}}\int_0^{\varrho_1} dr\sqrt{\frac{r(r-\varrho_3)}{(r-\varrho_1)(r-\varrho_2)}}.$$

Der halbe Asymptotenwinkel der äusseren Curve ist:

$$\Phi=\sqrt{\varrho_1(-\varrho_2)}\int_{\varrho_1}^{\infty}\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{r-\varrho_3}{r(r-\varrho_1)(r-\varrho_2)}}.$$

Dieser Winkel ist, wie leicht nachzuweisen, stets $<\frac{1}{2}\pi$. Der Punkt ist also, entgegengesetzt wie im Falle I 2) (Fig. 3), vom Centrum weg von der geradlinigen Bahn abgelenkt, so dass hier die Abstossung vorherrscht.

c) $\varrho_1=\varrho_3$ (Fig. 7);

$$r'=\pm c\sqrt{\frac{\varrho_3}{\varrho_1+\varrho_2}}\sqrt{\frac{r-\varrho_2}{r}},$$

$$\varphi'=\quad c\sqrt{\frac{\varrho_1^{\,2}(-\varrho_2)}{\varrho_1+\varrho_2}}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Die Bewegung findet statt in einer Spirale zwischen $r=0$ und $r=\infty$, welche eine Asymptote besitzt; die Kreise $r=\varrho_1$ und $r=\varrho_3$ haben beim Zusammenrücken ihre Singularität für die Bewegung eingebüsst.

Den Zusammenhang der verschiedenen unter II betrachteten Bewegungsarten untereinander sieht man am deutlichsten, wenn man bei festgehal-

tenem ϱ_2 und ϱ_3 (ich wähle $-\varrho_2 < \varrho_3$) ϱ_1 von $-\varrho_2$ bis $+\infty$, dann von $-\infty$ bis ϱ_2 wachsen lässt und endlich ϱ_1 und ϱ_2 complex von der Form $-a-bi$ und $-a+bi$ werden lässt.

So lange $\varrho_1 < \varrho_3$ ist, hat man Fig. 6, und zwar wird bei Annäherung von ϱ_1 an ϱ_3 die Krümmung der inneren Curve in der Nähe des Perihels immer schärfer und die Spitze der äusseren Curve immer kürzer, bis für $\varrho_1 = \varrho_3$ beide Curven mit je einer Ecke zusammenstossen; in diesem Augenblicke geht für die physikalische Bewegung die eine (punktirte) Hälfte jedes Curvenastes verloren, und die übrig bleibenden Hälften der äussern und der innern Curve treten in physikalischen Zusammenhang, so dass die ausgezogene Curve der Fig. 7 entsteht.

Rückt nun ϱ_1 über ϱ_3 hinaus, so trennt sich der Doppelpunkt der Fig. 7 wieder, doch jetzt so, dass der innere Curvenzweig eine Spitze besitzt, der äussere ein Perihel mit je einem Wendepunkte zu beiden Seiten des Perihels, zunächst in unmittelbarer Nähe desselben, die aber nun immer weiter nach dem Unendlichen hin rücken, während zugleich die an der innern Curve in unmittelbarer Nähe der Spitze auftauchenden Wendepunkte weiter nach innen rücken. Es entsteht so Fig. 8. Nunmehr ändert sich der innere Curvenast nicht mehr wesentlich. Im äussern Aste dagegen rücken für $\varrho_1 = \varrho_3 - \varrho_2$ die Wendepunkte ins Unendliche und verschwinden für $\varrho_1 > \varrho_3 - \varrho_2$ vollständig, so dass dann Fig. 9 vorliegt. Wächst nun ϱ_1 weiter, so entfernt sich der ganze äussere Curvenast mehr und mehr und verschwindet für $\varrho_1 = \infty$ ganz, um für die nun folgenden ϱ_1 nicht wieder zu erscheinen. Es liegt dann die unter II 1) und II 2) beschriebene Bewegungsart vor.

Die Figuren (die übrigens nur schematische Bedeutung haben) entsprechen mithin folgender Reihe von Bedingungen:

$\varrho_3 > \varrho_1$	Fig. 6,
$\varrho_1 = \varrho_3$	Fig. 7,
$\varrho_3 - \varrho_2 > \varrho_1 > \varrho_3$ . .	Fig. 8,
$\varrho_1 = \varrho_3 - \varrho_2$	Fig. 9 mit Wendepunkten im Unendlichen,
$+\infty > \varrho_1 > \varrho_3 - \varrho_2$.	Fig. 9,
$\varrho_2 > \varrho_1 > -\infty$; $\left.\begin{matrix}\varrho_1\\ \varrho_2\end{matrix}\right\}$ complex . .	innerer Ast von Fig. 9.

Ich will zum Schlusse der Untersuchung der Bewegung in zwei Dimensionen noch bemerken, dass in den Fällen, wo der bewegte Punkt das Centrum erreicht, unsere ersten Integrale uns nur über den Verlauf der Bewegung bis zum Centrum Aufschluss geben, und dass wir das weitere Verhalten der Bewegung erst durch Ausführung der zweiten Integration erkennen werden. Ich werde das Nöthige davon später nachtragen.

§ 6.

B. Bewegung in einer Dimension. (Figurentafel II.)

$$\varrho_2 = 0,$$

$$r' = \pm c \sqrt{\frac{\varrho_3}{\varrho_1}} \sqrt{\frac{r - \varrho_1}{r - \varrho_3}}.$$

Kommt der bewegte Punkt an die Stelle $r = \varrho_1$, so wird seine Geschwindigkeit allmälig 0 und die Bewegung kehrt um. Kommt der Punkt an die Stelle $r = \varrho_3$, so wird seine Geschwindigkeit ∞, um dann plötzlich das Zeichen zu wechseln. Der Punkt prallt mit unendlicher Geschwindigkeit auf und wieder zurück. Erstreckt sich die Bewegung ins Unendliche, so hat der Punkt dort die Geschwindigkeit $c \sqrt{\frac{\varrho_3}{\varrho_1}}$. Erreicht die Bewegung den Nullpunkt, so überschreitet der bewegte Punkt denselben mit der Geschwindigkeit c.

Da r wesentlich positiv ist, so stimmt r immer mit dem absoluten Werthe der Abscisse überein. Beim Durchgang durch den Nullpunkt wechselt also r das Zeichen nicht, wohl aber r', indem die Geschwindigkeit selbst ihre Richtung nicht wechselt. Nach dem Durchgange durch den Nullpunkt sind die Kräfte, also auch die Bewegung symmetrisch zu den Kräften und der Bewegung vor Erreichung des Nullpunktes, während in den analytischen Formeln, sofern man in ihnen r einfach als Abscisse deutet, diese Symmetrie nicht stattfindet. Deswegen darf man die analytischen Formeln, auch wenn der Punkt das Centrum überschreiten kann, nur für $r \geqq 0$ benutzen.

Ich untersuche jetzt die einzelnen Bewegungsvorgänge.

I. Ladungen der Punkte ungleichnamig. (Fig. 1.)

$$\varrho_3 < 0.$$

1) $$+\infty > \varrho_1 > 0 \text{ oder } 1 - p^2 + sp^2 > 0 \text{ (Fig. 1a);}$$

$$r' = \pm c \sqrt{\frac{-\varrho_3}{\varrho_1}} \sqrt{\frac{\varrho_1 - r}{r - \varrho_3}}.$$

r liegt zwischen 0 und ϱ_1, woselbst $r' = 0$ wird. Der Punkt vollführt Schwingungen zwischen den Abscissen $-\varrho_1$ und $+\varrho_1$, indem er den Nullpunkt jedesmal mit der Geschwindigkeit $\pm c$ überschreitet und an den Stellen $\pm \varrho_1$ allmälig zum Stillstand kommt und umkehrt. (Fig. 1a.)

Die Dauer einer Viertelschwingung (von $r = 0$ bis $r = \varrho_1$) beträgt:

$$T = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\varrho_1}{-\varrho_3}} \cdot \int_0^{\varrho_1} dr \sqrt{\frac{r - \varrho_3}{\varrho_1 - r}}.$$

2) $0 > \varrho_1 \geqq -\infty$ oder $0 \geqq 1 - p^2 + sp^2$ (Fig. 1b, c, d, e);

$$r' = c\sqrt{\frac{-\varrho_3}{-\varrho_1}}\sqrt{\frac{r-\varrho_1}{r-\varrho_3}}.$$

r' wird nirgends 0 oder ∞. Der Punkt bewegt sich von $-\infty$ mit der Geschwindigkeit $c\sqrt{\frac{\varrho_3}{\varrho_1}}$ beginnend, überschreitet mit der Geschwindigkeit c das Centrum und gelangt mit der Geschwindigkeit $c\sqrt{\frac{\varrho_3}{\varrho_1}}$ nach $+\infty$.

Der Grenzfall $\varrho_1 = -\infty$ (Fig. 1b) unterscheidet sich vom allgemeinen nur dadurch, dass die Geschwindigkeit im Unendlichen $= 0$ wird.

Ein specieller Fall der geschilderten Bewegungsart ergiebt sich, wenn $\varrho_1 = \varrho_3$ wird (Fig. 1d). Dann bewegt sich der Punkt mit der gleichförmigen Geschwindigkeit c, gerade als ob die Punkte nicht aufeinander einwirkten. Dieser Fall kann auch als Grenzfall anderer Bewegungsformen auftreten. Er entspricht der Beziehung

$$1 - p^2 + sp^2 = s$$

oder

$$1 - p^2 = 0, \text{ da hier } s < 1 \text{ ist},$$

$$p = \pm 1,$$

d. h. er tritt ein, sobald irgend einmal (ausser für $r = 0$) $r' = \pm c$ ist.

Zur Erklärung der Figuren der Tafel II diene Folgendes:

Ueber jeder Abscisse ist der zugehörige absolute Werth der Geschwindigkeit als Ordinate aufgetragen; zugleich sind die Curven, die sich ins Unendliche erstrecken, verkürzt gezeichnet, das Unendliche ins Endliche gerückt, so dass man sich den punktirten Theil der Curven als unendlich lang zu denken hat.

Die einzelnen unter I gefundenen, in Fig. 1 zusammengestellten Bewegungstypen erhält man der Reihe nach, wenn man bei festgehaltenem ϱ_3 ϱ_1 von 0 bis $+\infty$, dann von $-\infty$ bis 0 wachsen lässt, in folgender Aufeinanderfolge:

$+\infty > \varrho_1 > 0$. Fig. 1a,
$\varrho_1 = \pm\infty$. . . „ 1b,
$\varrho_3 > \varrho_1 > -\infty$. „ 1c,
$\varrho_1 = \varrho_3$ . . . . „ 1d,
$0 > \varrho_1 > \varrho_3$ . . „ 1e.

II. Ladungen der Punkte gleichnamig. (Fig. 2 u. 3.)

$$\varrho_3 > 0.$$

1) $0 > \varrho_1 \geqq -\infty$ oder $0 \geqq 1 - p^2 + sp^2$;

$$r' = \pm c\sqrt{\frac{\varrho_3}{-\varrho_1}}\sqrt{\frac{r-\varrho_1}{\varrho_3 - r}}.$$

Der Punkt schwingt zwischen $-\varrho_3$ und $+\varrho_3$, indem er an den Grenzen mit unendlicher Geschwindigkeit ankommt und zurückprallt, und sein Mini-

mum der Geschwindigkeit, $\pm c$, bei Ueberschreitung des Centrums besitzt (Fig. 3 innerer Theil).

Die Dauer einer Viertelschwingung beträgt

$$T = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{-\varrho}{\varrho_3}}\int_0^{\varrho_3} dr \sqrt{\frac{\varrho_3 - r}{r - \varrho_1}}.$$

2) $$+\infty > \varrho_1 > 0 \text{ oder } 1 - p^2 + sp^2 > 0;$$

$$r' = \pm c \sqrt{\frac{\varrho_3}{\varrho_1}} \sqrt{\frac{r - \varrho_1}{r - \varrho_3}}.$$

Die Bewegung ist nur reell ausserhalb der Strecke $\varrho_1 \varrho_3$. Sie besteht aus zwei getrennten Bewegungsarten, die nur im Falle $\varrho_1 = \varrho_3$ physikalisch zusammenhängend werden (ebenso wie für $\varrho_2 \lesseqgtr 0$).

a) $$\varrho_3 > \varrho_1 \text{ oder } 1 - p^2 \quad s(1 - p^2) \text{ (Fig. 2).}$$

Die eine Bewegung α) besteht aus Schwingungen zwischen $-\varrho_1$ und $+\varrho_1$, die andere (β) aus einer Bewegung von $+\infty$ nach ϱ_3, Umkehr daselbst und Rückkehr nach $+\infty$.

Die Dauer einer Viertelschwingung der Bewegung (α) beträgt:

$$T = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_3}}\int_0^{\varrho_1} dr \sqrt{\frac{r - \varrho_3}{r - \varrho_1}}.$$

b) $$\varrho_1 > \varrho_3 \text{ oder } 1 - p^2 < s(1 - p^2) \text{ (Fig. 3).}$$

Die Bewegung (α) besteht aus Schwingungen zwischen $-\varrho_3$ und $+\varrho_3$ mit Reflexion an den Grenzen, die andere (β) aus einer Bewegung von $+\infty$ nach ϱ_1, Umkehr, dann Rückkehr nach $+\infty$.

c) $$\varrho_1 = \varrho_3 \text{ oder } p = \pm 1 \text{ (Fig. 1 d).}$$

Der Punkt bewegt sich mit der constanten Geschwindigkeit c, als ob das Centrum gar nicht auf ihn einwirkte.

Die Fig. 1d kann man sich als Grenzfall von Fig. 2 oder Fig. 3 denken, indem man sich vorstellt, dass beim Zusammenrücken von ϱ_1 und ϱ_3 sowohl die innere, wie die äussere Curve immer mehr an die Gerade $r' = c$ sich anschmiegen, und das Aufsteigen der einen, wie das Abfallen der andern Curve erst in immer grösserer Nähe der Grenze merkbar wird. Es würde also zu der Geraden $r' = c$ analytisch noch die senkrechte Gerade $r = \varrho_1 = \varrho_3$ hinzugehören.

Lässt man ϱ_1 von 0 bis $+\infty$, dann von $-\infty$ bis 0 wachsen, so folgen die Bewegungen in folgender Weise aufeinander:

$\varrho_3 > \varrho_1 > 0$ . . Fig. 2,
$\varrho_1 = \varrho_3$ . . . . „ 1d,
$+\infty > \varrho_1 > \varrho_3$. „ 3,
$0 > \varrho_1 > -\infty$. „ 3 innerer Theil allein.

§ 7.

Einige Bemerkungen über die Ausführung der zweiten Integration.

Was die Ausführung der zweiten Integration betrifft, so ist es zwar nicht möglich, r und φ direct als explicite Functionen von t darzustellen; wohl aber gelingt es mit Hilfe der elliptischen Functionen, r, φ, t als Functionen einer vierten Variablen u darzustellen, die mit t monoton wächst. In Specialfällen degeneriren die elliptischen Functionen in trigonometrische und Exponentialfunctionen. Ich verzichte hier auf die Ausführung der zweiten Integration, da sie nicht zu neuen physikalisch interessanten Resultaten führen würde, ausser einem einzigen, welches ich ohne Beweis hier wiedergeben will.

In den Fällen, wo eine Bewegung auftritt zwischen dem Centrum und einem Grenzkreise, also in den Fällen II 1), 2), 3a), 3b), gaben uns die ersten Integrale nur Aufschluss über die Bewegung bis zum Nullpunkte.

Analytisch setzen sich die Curven aber weiter fort, und zwar so, dass sich der in der Zeit von $-T$ bis $+T$ durchlaufene Curvenzug in der Zeit von T bis $3T$ wiederholt, aber gegen den ersten, in den Figuren gezeichneten Curvenzug um einen bestimmten Winkel 2Φ gedreht, der sich durch ein vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung bestimmt.

Im Falle der Fig. 7 endlich setzt sich die Bahncurve, welche die Gleichung hat:

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{\varphi^2}{4\varrho_1} = \frac{1}{r},$$

ebenfalls über den Nullpunkt fort, und zwar in einer Spirale, welche mit der punktirten Spirale congruent ist, aber nicht mit ihr zusammenfällt, sondern gegen dieselbe um einen Winkel gedreht ist, derart, dass der halbe Winkel zwischen den beiden Asymptoten der nunmehr vervollständigten Curve den Werth hat:

$$\Phi = 2\sqrt{-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}.$$

§ 8.

Vergleich mit Lolling. Schlussbemerkungen.

Zum Schlusse komme ich, wie ich in der Einleitung versprochen habe, nochmals auf die Abhandlung von Herrn Lolling zurück, um ihre Mängel kurz zu beleuchten.

Erstens ist die Lolling'sche Arbeit unvollständig. Denn alle diejenigen Bewegungen, die kein Perihel haben, kommen bei Lolling nur als Zweige mit negativen r (die ich gar nicht berücksichtigt habe, und die übrigens nur einer Zeichenänderung der Kraft entsprechen), ohne physikalische Bedeutung, als „geometrische Bewegungen", wie er sie nennt, vor.

Der Grund davon ist der, dass er zum Zweck der Constantenbestimmung voraussetzt, das bewegte Theilchen habe zu einer bestimmten Anfangszeit nur eine Geschwindigkeit α senkrecht zum Radiusvector r. Es ist aber von vornherein gar nicht ersichtlich, ob es überhaupt jemals einen solchen Zeitpunkt geben kann, in dem $r' = 0$ ist. Wollte Lolling als Grund der Unmöglichkeit der anderen Bewegungen anführen, dass dann r' an einer Stelle ∞ werden würde, so würde dasselbe von der Bewegung im innern Kreise von Fig. 6 gelten, die Lolling doch nicht als unmöglich bezeichnet. Oder sollte etwa Lolling die Weber'sche Beschränkung der Grösse von k_1 adoptirt haben? Davon sagt er gar nichts, und dann wäre es doch immer ein Fortschritt meinerseits, diese Beschränkung, deren Berechtigung fraglich ist, fallen gelassen zu haben, schon um des analytischen Interesses der Resultate willen.

Zweitens geht Lolling auf die verschiedenen Grenzfälle gar nicht ein, und so kommt es, dass er über den Zusammenhang der Curven unter einander, insbesondere auch über den Fall der Fig. 7 ganz irrige Vorstellungen hat. Er meint, dass dann die Bahncurve aus zwei geraden Linien bestehe, die sich bei $r = \varrho_1$ unter einem bestimmten Winkel aneinandersetzen (pag. 329 bei Lolling). Ausser diesem directen Fehler ist mir übrigens noch ein kleiner Irrthum Lolling's aufgefallen, nämlich, dass er den Radiusvector für $r = \infty$ direct als Asymptote der Bahncurve ansieht, während doch die letztere die stets von 0 verschiedene Entfernung $\sqrt{-\varrho_1 \varrho_2}$ vom 0-Punkt besitzt.

Drittens ist es doch wünschenswerth, das, was mit einfacheren Mitteln besser geleistet werden kann, auch mit diesen Mitteln zu leisten. Statt so die qualitative Untersuchung der Bewegung direct an die Ausdrücke für die Geschwindigkeitscomponenten zu knüpfen, wie ich es gethan habe, führt Lolling sofort die elliptischen Functionen ein und führt die zweite Integration aus. Um nachher die Curven zu untersuchen, was nur sehr dürftig geschieht, muss Lolling erst wieder differentiiren, was doch sicher ein Umweg ist.

Aus allen diesen Gründen bitte ich meine Arbeit, eine erschöpfende qualitative Untersuchung aller vorkommenden Bewegungsformen, als eine Ergänzung zu derjenigen von Lolling zu betrachten.

III.

Einige Sätze über reguläre Polygone.

Von

Benedikt Sporer.

I.

Es ist folgender Satz allgemein bekannt:

Hat irgend eine Curve n^{ten} Grades mehrere Symmetrieachsen, etwa l, d. h. sind in der Ebene derselben l solche gerade Linien gelegen, die sie in zwei symmetrische Hälften zerlegen, so gehen diese l Symmetrieachsen alle durch einen und denselben Punkt O.

Es ist weiter in dem Begriffe Symmetrieachse selbst enthalten, dass alle übrigen Symmetrieachsen mit einer beliebigen paarweise im Punkte O gleiche Winkel bilden. Eine Ausnahme hiervon macht nur eine zu der beliebig gewählten etwa senkrecht stehende Symmetrieachse. Wenden wir diese Betrachtung auf jede einzelne der Symmetrieachsen an, so folgt ferner der Satz:

Die Symmetrieachsen theilen den Vollwinkel von 360^0 in gleiche Winkel, d. h. irgend zwei auf einander folgende derselben bilden einen Winkel $= \frac{180^0}{l}$.

Beschreiben wir weiter um O durch einen beliebigen Curvenpunkt einen Kreis, so sind durch die l Symmetrieachsen auf dem Kreise und der Curve $2l$ gemeinsame Punkte derart bestimmt, dass die Symmetrieachsen auf je l Seiten und Diagonalen des durch die $2l$ Punkte bestimmten Vielecks senkrecht stehen. Jeder Kreis um l durch einen beliebigen Punkt der Curve hat also mindestens $2l$ Punkte mit der Curve gemein. Wir schliessen daraus:

Hat irgend eine algebraische Curve n^{ten} Grades mehr als n Symmetrieachsen, so muss sie nothwendig in Kreise zerfallen, die alle den gemeinsamen Punkt O der Symmetrielinien zum Mittelpunkte haben.

Geht also aus der Art der Entstehung einer algebraischen Curve hervor, dass sie eine bestimmte Anzahl Symmetrieachsen besitzen muss, die grösser ist als ihr Grad, so können wir von vornherein behaupten, dass diese Curve aus einem oder mehreren concentrischen Kreisen bestehen wird.

II.

Ist

$$L = \alpha x + \beta y = 0$$

die Gleichung irgend einer Geraden durch den Coordinatenursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und ist zudem

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

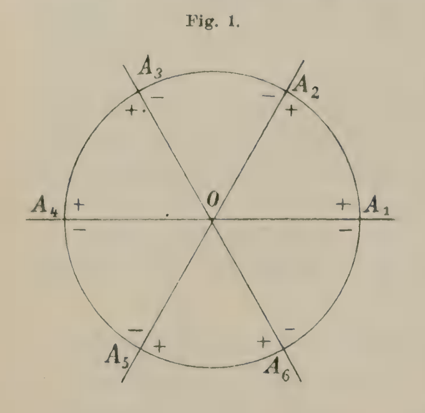
so stellt der Werth $\alpha x_1 + \beta y_1$ die Entfernung des Punktes $(x_1 y_1)$ von der Geraden L dar. Diese Entfernung kann entweder einen positiven oder negativen Werth haben, und zwar werden für alle Punkte auf der einen Seite der Geraden L die Entfernungen positiv, auf der andern Seite negativ. Wir sind also gewissermassen berechtigt, von einer positiven und einer negativen Seite der Geraden L zu reden.

Sind insbesondere n Geraden, deren Gleichungen sind

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= x \sin\left(\frac{2\pi}{n} + \beta\right) + y \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \beta\right) = 0 \\
L_2 &= x \sin\left(\frac{2.2\pi}{n} + \beta\right) + y \cos\left(\frac{2.2\pi}{n} + \beta\right) = 0 \\
L_3 &= x \sin\left(\frac{3.2\pi}{n} + \beta\right) + y \cos\left(\frac{3.2\pi}{n} + \beta\right) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_n &= x \sin\left(\frac{n.2\pi}{n} + \beta\right) + y \cos\left(\frac{n.2\pi}{n} + \beta\right) = 0
\end{aligned}\right\}$$

gegeben, so stellen dieselben n durch den Ursprung gehende Geraden dar, die den Vollwinkel zusammen in $2n$ gleiche Theile zerlegen. Durch die in den Gleichungen festgestellten Coefficienten von x und y ist für ungerade n, zudem die durch Fig. 1 ersichtliche Feststellung der positiven und negativen Seiten der einzelnen Geraden geschehen. Irgend zwei der aufeinanderfolgenden $2n$ Halbstrahlen kehren sich also stets die gleiche Seite zu, oder ein Punkt zwischen 2 solchen auf einander folgenden Halbstrahlen ist bei beiden auf der positiven oder negativen Seite gelegen.

Fig. 1.



Bilden wir nun irgend eine Function ungeraden Grades

$$\varphi(L_1, L_2, L_3, \ldots L_n) = 0,$$

die in Bezug auf die Indices 1 bis n die Eigenschaften hat, dass sie sich nicht ändert, wenn wir jeden Indices durch den folgenden ersetzen, also etwa anstatt dem Indices 4 den 5, anstatt 5 den 6 u. s. w. schreiben und welche zudem die weitere Eigenschaft hat, dass sie auch unveränderlich bleibt, wenn wir einen der Indices festhalten und die in dem Cyklus von ihm gleich weit abstehenden mit einander vertauschen, so können wir in Bezug auf diese Function folgende geometrische Betrachtung veranstalten.

Ist P irgend ein Punkt des durch die Gleichung

$$\varphi(L_1, L_2, \ldots L_n) = 0$$

dargestellten Ortes, und ist OB_1 die Halbirungslinie des Winkels A_1OA_2, so wird ein zweiter Punkt P_1, der zu P so gelegen ist, dass OB_1 das Halbirungsloth von PP_1 ist, auch auf dem Orte gelegen sein, denn die Function wird sich nach dem Obigen nicht ändern, wenn wir die Entfernungen des Punktes P von den Geraden $L_1, L_2, \ldots L_n$ durch die Entfernungen des Punktes P_1 von diesen Geraden ersetzen; es wird dies gleichbedeutend sein mit einer Vertauschung der Indices in der oben als statthaft angegebenen zweiten Art.

Daraus schliessen wir:

Die Gerade OB_1 ist Symmetrieachse des Ortes $\varphi(L_1, L_2, \ldots L_n) = 0$.

Und da diese Eigenschaft auch jeder andern Geraden OB in gleicher Art zukommt, die einen Winkel von 2 aufeinander folgenden Geraden OA halbirt, so haben wir:

Die durch die Gleichung $\varphi = 0$ dargestellte Curve hat diejenigen n Geraden, welche die Winkel zweier aufeinanderfolgenden Geraden OA halbiren, zu Symmetrieachsen.

Ist ferner die Function $\varphi = 0$ eine homogene in den Geraden L, und zwar vom Grade p, so haben wir für gerade p zudem noch, dass auch die Geraden OA Symmetrieachsen des Ortes sind. Tritt nämlich ein Punkt P von dem Winkel A_1OA_2 etwa in den Winkel A_2OA_3 über, so sind zwar die Werthe $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n$ für 2 Punkte P und P_2, von denen OA_2 das Halbirungsloth der Verbindungslinie ist, gleich aber nicht alle von demselben Vorzeichen; aber diese verschiedenen Vorzeichen treten paarweise auf, so dass also der Werth $\varphi(L_1, L_2, \ldots L_n) = 0$ auch für den Punkt P_2 befriedigt ist. Fassen wir diese Resultate zusammen, so haben wir also:

Ist irgend eine homogene Function p^{ten} Grades $\varphi(L_1, L_2, \ldots L_n) = 0$ gegeben, die in Bezug auf die Indices $1, 2 \ldots n$ die oben angegebene Eigenschaft hat, und ist n ungerade, und stellen $L_1, L_2, \ldots L_n$ n durch einen Punkt gehende Gerade, die mit einander gleiche Winkel bilden, dar, so hat die durch $\varphi = 0$

dargestellte Curve n oder $2n$ Symmetrieachsen, je nachdem p ungerade oder gerade ist.

Berücksichtigen wir die in I erwähnten Eigenschaften der Symmetrieachsen, so folgen daraus für diese Functionen $\varphi=0$, wenn wir bedenken, dass für ungerade p die Gleichung $\varphi=0$ mindestens eine reelle Gerade enthalten müsste:

Für ungerade p, die zudem $< n$ sind, verschwindet die oben genannte homogene Function $\varphi(L_1, L_2, \ldots L_n)=0$ identisch. Und:

Für gerade $p < 2n$ ist die Function $\varphi(L_1, L_2, L_n \ldots)=0$ eine mit einer Constanten multiplicirte Potenz von (x^2+y^2).

Für letztern Fall können wir dieses Resultat auch so fassen:

Für gerade $p < 2n$ zerfällt der durch die Gleichung $\varphi(L_1, L_2, L_3 \ldots L_n)=k^p$ dargestellte Ort in Kreise, die entweder alle oder bis auf einen imaginär werden.

III.

Die in II. entwickelten Sätze lassen eine interessante geometrische Fassung zu. Beschreiben wir nämlich über der Verbindungslinie eines Punktes P, der im Falle p ungerade ist, beliebig, im Falle p gerade ist auf dem Ortskreise gewählt ist, und dem Coordinatenaufange O einen Kreis, der OP zum Durchmesser hat, so bestimmen auf diesem Kreise die n Geraden OA ein reguläres n-Eck, und die Lothe von P auf die Geraden OA sind nichts anderes als die Verbindungslinien des Punktes P mit den Ecken dieses regulären n-Ecks. Denken wir uns anstatt dem Punkte P die Geraden OA um den Punkt O gedreht, so ist weiter klar, dass die oben genannten Sätze auch für diese Systeme von Geraden gelten, oder dass die Function $\varphi(L_1, L_2, L_3 \ldots L_n)$ für einen Punkt P in Bezug auf jede beliebige Lage der n Geraden OA, wenn nur letztere gegen einander ihre Winkel beibehalten, ihren festen Werth k behält. Wir können uns also auch auf dem Kreise über OP als Durchmesser den Punkt P als fest denken und das System der Geraden OA um O drehen. Es wird sich nun das reguläre Polygon, das diesem Kreise einbeschrieben ist, so bewegen, dass jede Ecke den ganzen Kreis durchläuft, so oft die Geraden OA eine volle Drehung von 360^0 gemacht haben. Umgekehrt können wir wieder in diesem Kreise die Ecken des regulären Polygons festhalten und den Punkt P sich bewegen lassen, ohne dass die Function $\varphi=0$ ihren Werth ändert. Dies vorausgeschickt, gehen unsere Hauptsätze in II. in folgende über:

Ist irgend einem Kreise ein reguläres Polygon mit ungerader Seitenzahl n einbeschrieben und nehmen wir auf dem Kreise irgend einen beliebigen Punkt P an und verbinden denselben mit den Ecken des regulären Polygons durch Gerade $L_1, L_2, L_3 \ldots L_n$, so ist der Werth jeder homogenen obigen Function φ vom Grade p gleich Null für ungerade p und $p < n$ und gleich einer Constanten für gerade $p < 2n$.

IV.

Es dürfte nicht unnütz sein, diese Resultate an einigen Beispielen näher zu erörtern.

a) Das reguläre Polygon sei ein Dreieck $A_1 A_2 A_3$.

Wir erhalten für $p=1$ das bekannte Resultat:

Für irgend einen Punkt P des Kreises zwischen A_1 und A_3 ist:

α) $PA_1 - PA_2 + PA_3 = 0$. Für $p=2$:

β) $PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 = 2s^2$,

γ) $-PA_1 . PA_2 + PA_1 . PA_3 - PA_2 . PA_3 = -s^2$, und für $p=4$:

δ) $PA_1^4 + PA_2^4 + PA_3^4 = 2s^4$,

ε) $PA_1^2 . PA_2^2 + PA_2^2 . PA_3^2 + PA_1^2 . PA_3^2 = s^4$.

b) Für das reguläre Fünfeck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$:

Setzen wir $p=1$, so ist:

α) $PA_1 - PA_2 + PA_3 - PA_4 + PA_5 = 0$.

Setzen wir ebenso $p=3$, so haben wir:

β) $PA_1^3 - PA_2^3 + PA_3^3 - PA_4^3 + PA_5^3 = 0$,

γ) $PA_1 . PA_2 . PA_3 - PA_2 . PA_3 . PA_4 + PA_3 . PA_4 . PA_5$
$- PA_4 . PA_5 . PA_1 + PA_5 . PA_1 . PA_2 = 0$,

δ) $PA_1 . PA_4 . PA_5 - PA_2 . PA_5 . PA_1 + PA_3 . PA_1 . PA_2$
$- PA_4 . PA_2 . PA_3 + PA_5 . PA_3 . PA_4 = 0$.

Für $p=2$:

ε) $PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PA_4^2 + PA_5^2 = \text{const}$,

ζ) $PA_1 . PA_2 + PA_2 . PA_3 + PA_3 . PA_4 + PA_4 . PA_5 + PA_5 . PA_1 = \text{const}$

u. s. w.

Für $p=4$; z. B.:

η) $PA_1^4 + PA_2^4 + PA_3^4 + PA_4^4 + PA_5^4 = \text{const}$.

Und wenn $p=6$ und 8; z. B.:

ϑ) $PA_1^6 + PA_2^6 + PA_3^6 + PA_4^6 + PA_5^6 = \text{const}$,

ι) $PA_1^8 + PA_2^8 + PA_3^8 + PA_4^8 + PA_5^8 = \text{const}$

u. s. w.

Alle diese Relationen lassen sich wieder in Sätze fassen; so haben wir z. B. für eine der einfachsten Relationen folgenden Ausdruck:

Verbindet man irgend einen Punkt P eines Kreises mit den Ecken eines regulären Polygons, das dem Kreise einbeschrieben ist und das eine ungerade Anzahl n von Ecken hat, durch Strahlen von der Länge $q_1, q_2 \ldots q_n$, so ist

$$q_1^p - q_2^p + q_3^p - q_4^p + \ldots + q_n^p = 0,$$

wenn p ungerade und $< n$ ist, und

$$q_1^p + q_2^p + q_3^p + \ldots + q_n^p = \text{const}, \quad \text{wenn } p \text{ gerade}$$

und $< 2n$ ist.

V.

Die entwickelten Relationen lassen aber noch eine weitergehende geometrische Deutung zu. Beschreiben wir nämlich um den Mittelpunkt des regulären Polygons einen Kreis, so schneidet derselbe jeden der Strahlen PA noch in 2 Punkten C und D, so dass $AC = PD$ und $PA = PC - PD$ ist. Da die durch den Punkt P gehenden Strahlen den Vollwinkel von 360^0 in $2n$ gleiche Theile zerlegen, so folgt aus der Relation

$$q_1 - q_2 + q_3 - q_4 + \ldots + q_n = 0$$

folgender Satz:

Schneiden sich in einem Punkte P eine ungerade Anzahl von n Strahlen, so dass je zwei auf einander folgende Strahlen mit einander denselben Winkel bilden (nämlich $= \frac{\pi}{n}$), so sind dadurch $2n$ von P ausgehende Halbstrahlen bestimmt, die von irgend einem Kreise, in welchem P innerhalb beliebig gelegen ist, in Punkten C so geschnitten werden, dass die Summe der ungeraden Halbstrahlen PC, also des ersten, dritten, fünften u. s. w. gerade so gross ist als die Summe der gerade gezählten Strahlen PC, also des zweiten, vierten, sechsten. Dabei ist es gleichgiltig, welchen Strahl man als den ersten betrachtet.

Soweit ist der Satz bereits in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik in Bd. 17. p. 367 von E. F. Auguste ohne Beweis gegeben worden.

Bezeichnen wir weiter die Strecken PC und BD mit r und s, so dass also

$$q = r - s$$

ist, und bedenken wir, dass für den Punkt P der Werth rs derselbe ist, wir mögen den Strahl durch P ziehen wie wir wollen, indem derselbe gleich der Potenz von P in Bezug auf den zweiten beliebigen Kreis ist, und dass weiter:

$$q^p = (r - s)^p = r^p + a_1 rs(r - s)^{p-2} + a_2 r^2 s^2 (r - s)^{p-4} + \ldots \pm s^p,$$

oder für ungerade p:

$$q^p = (r - s)^p = r^p - s^n + a_1 b (r - s)^{p-2} + a_2 b^2 (r - s)^{p-4} + \ldots + a b^{p-1} (r - s),$$

$$= r^p - s^n + a_1 b q^{p-2} + a_2 b^2 q^{p-4} + \ldots + a_t^{\frac{p-1}{2}} q,$$

wobei $b = rs$, a_1, $b_2 \ldots a_n$ gewisse Constanten sind, so erhalten wir:

$$\Sigma q^p = \Sigma r^p - \Sigma s^p + a_1 b \Sigma q^{p-2} + a_2 b^2 \Sigma q^{p-4} + \ldots + a_t b^{\frac{2p-1}{2}} \Sigma q.$$

Da weiter nach dem obigen Satze alle hier auftretenden Summen Σq^{p-2}, Σq^{p-2}, $\Sigma q^{p-4} \ldots \Sigma q$ gleich Null werden, so haben wir ferner

$$\Sigma r^p - \Sigma s^p = 0$$

für ungerade $p < n$.

Ebenso erhält man für gerade p:

$$q^p = r^p + s^p + a_1 b (r-s)^{p-2} + a_2 b^2 (r-s)^{p-4} + \ldots + a_\iota b^{\frac{p}{2}}$$

und

$$\Sigma q^p = \Sigma r^p + \Sigma s^p + a_1 b \Sigma q^{p-2} + a_2 b^2 \Sigma q^{p-4} + \ldots + p \,.\, a_\iota b^{\frac{p}{2}}.$$

Alle hier auftretenden Summen sind hier jedoch gleich Constanten mit Ausnahme von Σr^p und Σs^p, d. h. wir erhalten:

$$\Sigma r^p + \Sigma s^p = \text{const} \qquad p \text{ gerade wie } < 2n.$$

Fassen wir diese Resultate in Worte, so lässt sich der von E. F. Auguste gegebene Satz wie folgt verallgemeinern:

Schneiden sich in einem Punkte innerhalb eines Kreises eine ungerade Anzahl von n Geraden in der oben angegebenen Weise, so ist die Summe der p^{ten} Potenzen für die geradzahligen Strahlen gleich der Summe der p^{ten} Potenzen für die ungeradzahligen Strahlen, wenn p ungerade und $< n$ ist, und die Summe der p^{ten} Potenzen aller Strahlen gleich einer Constanten, wenn p gerade und $< 2n$ ist. Dieser letztere Werth ändert sich nicht, wenn man das Strahlensystem um den Punkt P dreht, ist also nur abhängig von dem Werthe des Kreishalbmessers und der Entfernung des Punktes P vom Kreismittelpunkte.

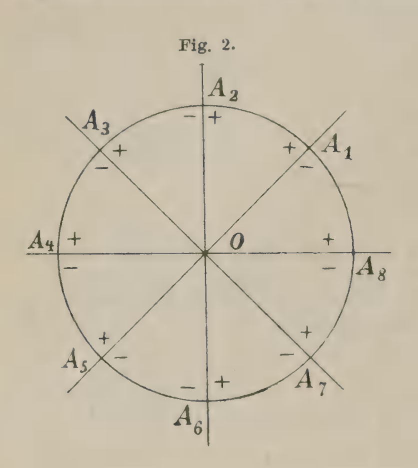
Der erstere Theil dieses Satzes ist nach einer Notiz von Brissane, Nouvelles annales de mathématique Bd. 7, p. 213—214 von Bréton im Anschluss an obigen Satz in Crelle's Journal verallgemeinert worden, jedoch gab Bréton für ungerade p die obere Grenze unrichtiger Weise kleiner als $2n$ an, wie sich rechnerisch schon für den Fall $p = 3$ leicht zeigen lässt; auch die für gerade n gegebene Verallgemeinerung Bréton's ist nicht vollständig richtig. Die Sätze selbst sind ohne Beweis von Brissane angeführt.

VI.

Es erübrigt uns nur noch, den Fall zu untersuchen, für den der Werth von n gerade ist. Setzen wir in Bezug auf die n Geraden wieder positive und negative Seiten fest, wie für den Fall des ungeraden n, so zeigt sich, dass die obige Anordnung von positiven und negativen Seiten in der Rosette nicht mehr möglich ist. Wir können auch hier noch fest-

stellen, dass irgend 2 der Geraden, etwa A_1, A_5 und A_2, A_6 sich die gleichartigen Seiten zukehren; es ist alsdann auch noch möglich, auf die angedeutete Art eine Symmetrie für die Gerade herzustellen, die den Winkel $A_1 O A_2$ halbirt. Diese Gerade bleibt jedoch die einzige Symmetrieachse, d. h. die Function wird, falls alle Werthe L_1 in ihr vertreten sind, auf diese Art zu keinen Resultaten führen. Nichts destoweniger aber wird es möglich sein, auch hier Resultate abzuleiten, die jedoch nicht mehr in solchem Maasse symmetrisch sind wie die obigen.

Fig. 2.



Ist dagegen die Function $\varphi = 0$ vom geradem Grade, und in ihr homogen, so ist es möglich, auch hier für die Curve $\varphi = 0$ Symmetrieachsen, und zwar jetzt $2n$ zu erhalten, nämlich die Geraden n selbst und die Halbirungslinien der Winkel zweier auf einander folgenden Geraden OA.

Dies gilt namentlich dann, wenn die Entfernungen L in der Gleichung $\varphi = 0$ quadratisch auftreten, oder überhaupt nur vom geraden Grade. In analoger Weise, wie oben, erhalten wir daraus die Sätze, um hier gleich zu speciellen Resultaten überzugehen:

Ist irgend einem Kreise ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl einbeschrieben und verbinden wir irgend einen Punkt P des Kreises mit den Ecken des Polygons durch Strahlen q, so ist die Summe der geraden p^{ten} Potenzen für Werthe $p < 2n$ constant, wir mögen P wählen wie wir wollen.

Und:

Ist irgend ein Punkt P innerhalb eines Kreises gegeben, und legen wir durch denselben eine gerade Anzahl von n Strahlen, die alle mit einander gleiche Winkel bilden, so ist die Summe der p^{ten} Potenzen der $2n$ von P an den Kreis gehenden Strahlen constant, wenn wir das Strahlensystem um den Punkt P drehen, und wenn p gerade und $< 2n$ ist.

Es sind nur specielle Fälle hiervon die Sätze:

Die Summe der Quadrate der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist für dieselbe Hypotenuse constant, nämlich gleich dem Quadrat der Hypotenuse. Und:

Schneiden sich in einem Kreise 2 Sehnen senkrecht, so ist die Summe der Quadrate der 4 Abschnitte derselben constant, wenn wir die Sehnen beliebig um P drehen.

Es ist hier $n=2$, $p=2$ gewählt worden.

Ist $n=4$, so gelten z. B. folgende Relationen:

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2=\text{const},$$
$$q_1^4+q_2^4+q_3^4+q_4^4=\text{const},$$
$$q_1^6+q_2^6+q_3^6+q_4^6=\text{const},$$

u. s. w.

VII.

Wir haben oben in VI. erwähnt, dass wir auch für gerade n und ungerade p nichts destoweniger Formeln entwickeln können. Um dies zu zeigen, wollen wir ein bestimmtes n, nämlich 6, nehmen. Wir haben alsdann ein reguläres 6-Eck eines Kreises mit den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Dieses 6-Eck können wir zusammengesetzt denken aus den regulären Dreiecken A_1, A_3, A_5 und A_2, A_4, A_6. Für diese und einen beliebigen Punkt P haben wir nun:

$$q_1-q_3+q_5=0,$$
$$q_2-q_4+q_6=0,$$

und hieraus z. B.:

$$q_1+q_2-q_3-q_4+q_5+q_6=0.$$

Ebenso finden wir aus:

$$q_1^2+q_3^2+q_5^2=\text{const},$$

und

$$q_2^2+q_4^2+q_6^2=\text{const},$$

da diese Constanten denselben Werth haben:

$$q_1^2-q_2^2+q_3^2-q_4^2+q_5^2-q_6^2=0.$$

Allgemein haben wir z. B. die Sätze:

Verbinden wir die Ecken eines regulären Polygons von gerader Seitenzahl mit irgend einem Punkte P des Umkreises durch Strahlen q, so ist die Summe der p^{ten} Potenzen stets Null, wenn bei ungeraden p auf zwei gleichnamigen Zeichen stets 2 ungleichnamige kommen und $p<\frac{n}{2}$ ist, und wenn bei geraden $p<n$ positive und negative Zeichen abwechseln, und n nicht durch 4 theilbar ist.

Und:

Schneiden sich in einem Punkte P innerhalb eines Kreises eine gerade Anzahl von n Geraden unter gleichen Winkeln und ist n nicht durch 4 theilbar, so ist die Summe der p^{ten} Potenzen des ersten und zweiten, fünften und sechsten, neunten und zehnten etc. Strahles gleich der Summe der p^{ten} Potenzen der übrigen Strahlen, also des dritten und vierten, siebenten und achten etc., wenn p ungerade und $<\frac{n}{2}$ ist, und die Summe der p^{ten} Potenzen der ungeradzahligen gleich der Summe der geradzahligen für gerade $p<n$.

In ähnlicher Weise lassen sich alle Polygone, deren Seitenzahl nicht durch eine Primzahl ausgedrückt ist, in Polygone von niederer Seitenzahl zerlegen, und jede dieser Zerlegung wird wieder zu Relationen der Strahlen q, p, r und s führen.

Wir wollen weiter darauf hinweisen, dass die entwickelten Resultate es gestatten, eine grosse Anzahl trigonometrischer Relationen aufzustellen, unterlassen es jedoch, hier näher darauf einzugehen.

Stuttgart, im Mai 1891.

IV.

Ueber die Kreisungspunkte einer complan bewegten Ebene.

Von

Prof. M. Grübler.

in Riga.

Hierzu Tafel III.

Sind E_1, E_2, E_3, E_4 vier beliebige Lagen einer Ebene E, welche sich in einer complanen Ebene E_0 bewegt, so bilden, wie Burmester* zuerst nachgewiesen hat, diejenigen Punkte A von E, deren entsprechende Lagen A_1, A_2, A_3, A_4 demselben Kreise angehören, eine Focalcurve dritter Ordnung, welche durch die 6 selbstentsprechenden Punkte je zweier der vier Ebenen und die imaginären Kreispunkte geht. Die Mittelpunkte der Kreise bilden ebenfalls eine, der Ebene E_0 angehörige Focalcurve von analogen Eigenschaften. Die erstere der Curven wurde von Burmester die Kreispunktcurve, die letztere die Mittelpunktcurve genannt. Sind die vier Lagen consecutive, d. h. unendlich nahe Lagen einer irgendwie in E_0 bewegten Ebene E, so erhält das vorstehende Resultat die folgende, von Schönflies** mitgetheilte Gestalt: „Bewegt sich eine Ebene E in ihrer Ebene, so giebt es in jedem Augenblicke eine Curve k^3 dritter Ordnung, deren Punkte gerade Linien mit stationärem Krümmungskreis beschreiben. Die Mittelpunkte dieser Kreise bilden eine in der festen Ebene E_0 gelegene Curve k_0^3, die ebenfalls von der dritten Ordnung ist. Jede derselben berührt die Polcurve ihrer Ebene im momentanen Drehungscentrum dreipunktig. Bei der Umkehrung der Bewegung vertauschen die beiden Curven ihre Bedeutung.“

* Ueber die Geradführung durch das Kurbelgetriebe. Civilingenieur 1876, S. 597; 1877, S. 227 und 319. Vergl. ferner: Burmester, Lehrbuch der Kinematik. Bd. 1, S. 616.

** Geometrie der Bewegung, S. 39.

Wie aus den letzteren Sätzen hervorgeht, existiren in einer complan bewegten Ebene Punkte, deren Bahnen ihren Krümmungskreis vierpunktig berühren. Diese Punkte, welche Schönflies Punkte mit stationärem Krümmungskreis genannt hat, bewegen sich momentan in kreisförmigen Stellen (Kreis- oder Circularstellen?) ihrer Bahnen, oder, was dasselbe ist, vollziehen momentan eine unendlich kleine kreisende Bewegung und sollen deshalb kürzer Kreisungspunkte der Ebene heissen; die Mittelpunkte der vierpunktig berührten Krümmungskreise dagegen, um welche die vorerwähnten Punkte momentan kreisen, mögen Angelpunkte genannt werden. Das Continuum der Kreisungspunkte ist die Curve k^3, welche der bewegten Ebene E angehört und Kreisungspunktcurve heissen möge, während die Angelpunkte die der ruhenden Ebene E_0 angehörige Curve $k_0{}^3$ bilden, welche mit dem Namen Angelpunktcurve belegt werden soll. Die Kreisungs- und Angelpunkte sind einander zugeordnete Punkte und vertauschen ihre Bedeutung bei Umkehrung der Bewegung.

Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist die Ermittlung der Lage der Kreisungs- und Angelpunkte. Wir werden zu derselben geführt durch Benutzung der besonderen Beziehung, in welcher die Angelpunkte zu den Evoluten der Bahncurven, bez. Hüllbahnen stehen. Wie leicht ersichtlich, hat die Evolute einer Curve in dem Mittelpunkte eines vierpunktig berührenden Krümmungskreises einen Rückkehrpunkt; es sind sonach die Angelpunkte zugleich Rückkehrpunkte der Bahnevoluten. Da der Krümmungsradius einer Curve in einem Rückkehrpunkte derselben aber gleich Null ist, so folgt weiter, dass der Krümmungsradius der Bahnevolute eines Kreisungspunktes gleich Null sein muss. Diese für die Kreisungspunkte charakteristische Bedingung zeigt nun sofort, auf welchem Wege wir zur Kenntniss der Lage der Kreisungspunkte gelangen.

Wir suchen zunächst die Lösung der allgemeinen Aufgabe, den Krümmungsradius der Evolute derjenigen Hüllbahn zu finden, welche von einer beliebig gegebenen Hüllcurve bei der Bewegung der Ebene umhüllt wird, und specialisiren dann die gefundene Lösung in entsprechender Weise, indem wir darin den letzterwähnten Krümmungsradius gleich Null setzen. Hieran schliesst sich die Mittheilung einer einfachen geometrischen Construction der Kreisungs- und Angelpunkte, ferner die Aufstellung und Discussion der Gleichungen der Kreisungspunkt- und Angelpunktcurven. In engstem Zusammenhange mit den Kreisungs- und Angelpunkten einer bewegten Ebene stehen die Krümmungsmittelpunkte der Polcurven, worauf ich in einer früheren Arbeit (diese Zeitschrift, Bd. XXXIV, S. 305) hinwies. Da im Folgenden auf letztere Arbeit öfter Bezug genommen wird, so werde ich sie kurz mit [XXXIV, S....] bezeichnen. Ferner beziehe ich mich auch des Oefteren auf die Arbeit: „Ueber die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen", d. Z. Bd. XXIX, S. 212 und deren Ergänzung in demselben Bande, S. 382, die im Folgenden kurz mit [XXIX, S....] bezeichnet werden.

I.

Wir suchen zuvörderst die Lage der Kreisungspunkte auf einem gegebenen Normalstrahle, welcher den Winkel φ mit der Polcurvennormalen einschliessen mag, zu bestimmen. Es sei P der Pol und c, γ ein Hüllcurvenpaar, welches sich momentan im Punkte B auf diesem Normalstrahle berührt (s. Fig. 1, Taf. III); C und Γ seien die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte der beiden Curven. Setzen wir $\overline{P\Gamma} = \varrho$, $\overline{PC} = r$, und bezeichnen mit W den Durchmesser des Wendekreises der momentanen Bewegung der Ebene, so besteht für die drei Punkte P, Γ, C die Euler'sche Gleichung

$$1)\qquad \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) \cos\varphi = \frac{1}{W}$$

Diese Gleichung bezieht sich auf drei consecutive Lagen der bewegten Ebene, welche mit I, II, III bezeichnet werden mögen. Nehmen wir eine vierte consecutive Lage IV hinzu, so ordnet sich den drei Lagen II, III, IV ein anderer Pol P' und eine andere Polcurvennormale zu, welche letztere die den Lagen I, II, III entsprechende Polcurvennormale im Krümmungsmittelpunkt der ruhenden Polcurve p schneidet. Denken wir uns die Lagenänderung des Poles dadurch herbeigeführt, dass wir die Ebene um den Winkel $d\psi$ drehen, wobei die bewegte Polcurve π auf der ruhenden p um den Betrag $\overline{PP'} = ds$ vorwärts rollt, so ist bekanntlich

$$2)\qquad ds = W \,.\, d\psi.$$

Bezeichnet dn_p den Contingenzwinkel und $k_p = \overline{PC_p}$ den Krümmungsradius der Curve p im Punkte P, so hat man weiterhin die Beziehung

$$ds = k_p \,.\, dn_p,$$

also in Verbindung mit 2)

$$3)\qquad \frac{dn_p}{d\psi} = \frac{W}{k_p}.$$

Den drei Lagen II, III, IV ordnet sich aber auch ein anderer Wendekreis zu; denn es ändert sich nicht nur die Lage des Berührungspunktes B des Hüllcurvenpaares, sondern auch die des Normalstrahles, welche letztere in $P'B'$ übergeht. Diesem Normalstrahle ordnen sich andere Krümmungsmittelpunkte des Hüllcurvenpaares zu, welche C', bez. Γ' sein mögen und für die wieder die Euler'sche Gleichung besteht, jedoch unter Aenderung sämmtlicher darin auftretenden Grössen um ihre Incremente. Zwischen letzteren besteht zufolge 1) sonach die Beziehung

$$4)\qquad d\left(\frac{1}{W}\right) = -\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) \sin\varphi \; d\varphi - \left(\frac{d\varrho}{\varrho^2} - \frac{dr}{r^2}\right) \cos\varphi,$$

aus welcher die Aenderung des Wendekreisdurchmessers sich ermitteln lässt. Um die Grössen $d\varphi$, $d\varrho$ und dr abhängig von $d\psi$ darstellen zu können,

benutzen wir, dass C und C' Punkte der Evolute e der Curve c sind und die Normalen der Evolute in deren Punkten C und C' sich im Krümmungsmittelpunkte M der Evolute e schneiden müssen. Letzterer Punkt ordnet sich sonach den vier Lagen I, II, III, IV der bewegten Ebene zu. Das Gleiche gilt von den Punkten Γ und Γ', welche der Evolute ε der Hüllcurve γ angehören und den Krümmungsmittelpunkt M von ε bestimmen, der den vier Lagen der Ebene entspricht. Berücksichtigen wir, dass der Contingenzwinkel der Evolute einer Curve der gleiche ist, wie derjenige der Curve selbst im zugehörigen Punkte, so erhalten wir, falls wir den Winkel zwischen den consecutiven Normalen von c mit dn, den entsprechenden für γ mit $d\nu$ bezeichnen,

$$\overline{CC'} = e.dn,$$

$$\overline{\Gamma\Gamma'} = \varepsilon.d\nu;$$

hierin ist zur Abkürzung der Krümmungsradius der Evolute e, d. i. $\overline{MC} = e$, derjenige von γ, d. i. $\overline{\mathsf{M}\Gamma} = \varepsilon$ gesetzt werden.

Errichten wir im Pol P die Senkrechte PP'_0 zu PC, so ist $\angle P'\,PP'_0 = \varphi$, folglich

$$\overline{P'_0P'} = ds.\sin\varphi$$

und demnach

$$dr = \overline{CC'} + \overline{P'_0P'}$$
$$= e.dn + ds.\sin\varphi.$$

Andrerseits ist

$$\overline{PP'_0} = ds.\cos\varphi,$$

und weil auch

$$\overline{PP'_0} = r.dn,$$

so wird

$$dn = \frac{\cos\varphi}{r}.ds \tag{5}$$

und unter Benutzung von 2) erhalten wir dann

$$dr = \left(\frac{e}{r}\cos\varphi + \sin\varphi\right)W.d\psi.$$

Ganz analog ergiebt sich

$$d\varrho = \overline{\Gamma\Gamma'} + \overline{P'_0P'}$$
$$= \varepsilon.d\nu + ds.\sin\varphi;$$

da aber die ursprüngliche Normale $\mathsf{B}\Gamma$ der Curve γ und von ihrer neuen Lage $\mathsf{B}'\Gamma'$ um den Drehwinkel $d\psi$ der Ebene E in ihrer Richtung abweicht, so ist

$$d\nu = dn + d\psi,$$

also nach 5)

$$d\nu = \frac{\cos\varphi}{r} \,.\, ds + d\psi$$

$$= \left(\frac{W}{r}\cos\varphi + 1\right) d\psi$$

und schliesslich zufolge 1)

$$d\nu = \frac{W}{\varrho}\cos\varphi \,.\, d\psi.$$

Man erhält demnach

$$d\varrho = \left(\frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\varphi + \sin\varphi\right) W \,.\, d\psi.$$

Beachten wir endlich, dass die Gerade MC_p während der Bewegung der Ebene durch die Lagen I bis IV ihre Lage nicht ändert, so folgt, wenn n, bez. n_p die im gleichen Sinne gemessenen Winkel dieser Geraden mit dem Normalstrahle PB, bezw. der Polcurvennormalen bezeichnen, aus der unmittelbar der Figur zu entnehmenden Beziehung

$$n = \varphi + n_p$$

das Increment

$$d\varphi = dn - dn_p;$$

unter Verwendung der Relationen 3) und 5) wird hieraus

$$d\varphi = \left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{k_p}\right) W \,.\, d\psi.$$

Diesen Werth, sowie diejenigen für dr und $d\varrho$ in 4) substituirt, liefern

$$d\left(\frac{1}{W}\right) = \left[-\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{k_p}\right) W \sin\varphi - \left(\frac{\varepsilon}{\varrho}\cos\varphi + \sin\varphi\right)\frac{W}{\varrho^2}\cos\varphi + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{e}{r}\cos\varphi + \sin\varphi\right)\frac{W}{r^2}\cos\varphi\right] d\psi$$

und mit Benutzung von 1) entsprechend zusammengezogen

$$6) \qquad \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{W}\right) = \frac{\tan\varphi}{k_p} - \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{2}{r}\right)\sin\varphi - \left(\frac{\varepsilon}{\varrho^3} - \frac{e}{r^3}\right) W \cos^2\varphi.$$

Der gefundene Differentialquotient muss nun bei einer irgend wie bestimmten Bewegung der Ebene dieselbe Grösse besitzen für alle Hüllcurvenpaare, die sich auf dem gegebenen Normalstrahle berühren. Zieht sich die Hüllcurve auf einen Punkt zusammen, so hat man in 6) $\varepsilon = 0$ zu setzen, und ist dieser Punkt ein Kreisungspunkt, so muss auch $e = 0$ sein. Sei K der Kreisungspunkt und K der zugeordnete Angelpunkt auf dem gegebenen Normalstrahle, und setzen wir zur Abkürzung $P\mathsf{K} = \mathsf{P}$, $PK = R$, so folgt aus 6) für dieses Punktepaar die Beziehung

$$7) \qquad \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{W}\right) = \frac{\tan\varphi}{k_p} - \left(\frac{1}{\mathsf{P}} + \frac{2}{R}\right)\sin\varphi.$$

Die Elimination des links stehenden Differentialquotienten aus (6) und (7), welche auch diejenige von k_p nach sich zieht, liefert die Gleichung

$$8)\qquad \left(\frac{1}{\mathrm{P}}+\frac{2}{R}\right)\sin\varphi=\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{2}{r}\right)\sin\varphi+\left(\frac{\varepsilon}{\varrho^3}-\frac{e}{r^3}\right)W\cos^2\varphi.$$

Kreisungs- und Angelpunkt sind aber zugeordnete Punkte auf dem Normalstrahle, für welche folglich die Euler'sche Gleichung

$$9)\qquad \left(\frac{1}{\mathrm{P}}-\frac{1}{R}\right)\cos\varphi=\frac{1}{W}$$

besteht. Die Gleichungen 8) und 9) bestimmen die Lage der Kreisungs- und Angelpunkte auf dem Normalstrahle völlig, und zwar ergiebt sich

$$10)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{P}}=\dfrac{1}{\varrho}+\left(\dfrac{\varepsilon}{\varrho_3}-\dfrac{e}{r^3}\right)\dfrac{W\cos^2\varphi}{3\sin\varphi} \\ \dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{r}+\left(\dfrac{\varepsilon}{\varrho^3}-\dfrac{e}{r^3}\right)\dfrac{W\cos^2\varphi}{3\sin\varphi} \end{cases}$$

Diese Ausdrücke machen ersichtlich erstens, dass es auf jedem Normalstrahle nur ein solches Punktepaar giebt, zweitens, dass die Lage dieser Punkte schon völlig bestimmt ist durch ein Hüllcurvenpaar c, γ, welches sich auf dem Normalstrahle berührt, und die Polcurvennormale. Setzt man

$$\frac{3\varrho^3\sin\varphi}{W\varepsilon\cos^2\varphi}=\varrho_0,$$

$$\frac{3r^3\sin\varphi}{We\cos^2\varphi}=r_0,$$

so lassen sich die Gleichungen 10) in der folgenden Form

$$11)\qquad \frac{1}{\mathrm{P}}-\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{r_0}=\frac{1}{R}-\frac{1}{r}$$

schreiben, aus welcher die nachstehende einfache Bestimmungsweise des Kreisungs- und Angelpunktes hervorgeht. Denkt man sich auf dem Normalstrahle zwei Punkte Γ_0 und C_0, deren Entfernungen vom Pol $P\Gamma_0=\varrho_0$, $PC_0=r_0$ sind, so lassen die Gleichungen 11) erkennen, dass die drei Punktepaare K, K; Γ_0, C_0; Γ, C in einer speciellen quadratischen Verwandtschaft stehen, welche ganz gleichartig ist mit derjenigen, die die Punkte zweier gegenseitig bewegten Ebenen einander zuordnet. Demgemäss können mittels bekannter geometrischer Constructionen*) K, bezw. K als zugeordnete Punkte zu Γ, bezw. C und dem Punktepaare Γ_0, C_0 gefunden werden. Es ist daher nur nöthig, Γ_0 und C_0 geometrisch zu construiren, was in folgender Weise geschehen kann.

---

*) Vergl. u. A. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. Bd. 1, S. 103.

Wir errichten in P (s. Fig. 2) eine Senkrechte zu $\mathsf{M}P$, welche die Gerade $\mathsf{M}\Gamma$ in M' schneiden möge; ist nun auf dem Normalstrahle der Punkt W' so bestimmt, dass

$$\overline{PW'} = \tfrac{1}{3}\overline{PW} = \tfrac{1}{3} W . \cos\varphi,$$

so ziehen wir $\Gamma\Gamma' \parallel W'\mathsf{M}'$ und fällen von dem so gefundenen Punkte Γ' das Loth $\Gamma'\Gamma_0'$ auf eine Senkrechte in P zum Normalstrahle, dann schneidet eine durch Γ'_0 parallel zur Polcurventangente PT gelegte Gerade den Normalstrahl im gesuchten Punkte Γ_0. Der Beweis der Richtigkeit dieser Construction folgt einfach daraus, dass

$$\Gamma\mathsf{M}' = \frac{\overline{P\Gamma}^2}{\overline{\mathsf{M}\Gamma}} = \frac{\varrho^2}{\varepsilon}$$

und, wenn $\Gamma'\Phi'$ die Höhe des Dreiecks $\Gamma'\Gamma P$ ist, sich

$$\overline{\Gamma'\Phi'} : \overline{\mathsf{M}'\Gamma} = \overline{P\Gamma} : \overline{PW'}$$

verhält. Dann ergiebt sich

$$\overline{\Gamma'\Phi'} = \frac{\varrho^3}{\varepsilon . \frac{1}{3} W \cos\varphi}$$

und weil

$$\overline{P\Gamma'_0} = \overline{\Gamma'\Phi'},$$

ferner $\angle \Gamma_0\Gamma'_0 P = \varphi$,

$$\overline{P\Gamma_0} = \overline{P\Gamma'_0} . \tan\varphi = \frac{3\varrho^3 \sin\varphi}{W\varepsilon . \cos^2\varphi},$$

wie erforderlich. Analog construirt man C, indem man von den Punkten C und M ausgehend erst M', dann mittels W' den Punkt C' und auf der Geraden $P\Gamma'_0$ den Punkt C'_0 erhält; die Parallele durch C'_0 zur Polcurventangente schneidet den Normalstrahl in C_0.

Anstatt die Punkte K und K aus den Punktepaaren Γ_0, C_0 und Γ, C zu ermitteln, kann man sie auch directer aus Γ'_0, C'_0 und Γ, C finden und zwar wie folgt: Man verbinde (s. Fig. 3) C'_0 mit C und Γ durch Gerade, welche die Polcurventangente in C'', bez. Γ'' treffen mögen; die Geraden $\Gamma'_0\Gamma''$, bez. $\Gamma'_0 C''$ schneiden dann den Normalstrahl in K, bez. K. Der Beweis für diese Construction ergiebt sich leicht, wenn man $\Gamma'_0\Gamma''_0 \parallel C'_0 C''_0 \parallel PC$ zieht und ferner berücksichtigt, dass $\Gamma'_0\Gamma_0 \parallel C'_0 C_0$ ist. Man hat dann

$$C''C''_0 : C''P = C''_0 C'_0 : PC = PC_0 : PC = r_0 : r$$

und

$$C''\Gamma''_0 : C''P = \Gamma''_0\Gamma'_0 : PK = P\Gamma_0 : PK = \varrho_0 : R.$$

Substituirt man die hieraus für $C''C''_0$ und $C''\Gamma''_0$ sich ergebenden Werthe in die folgende der Figur sofort zu entnehmende Relation

$$C'_0 C''_0 : \Gamma'_0\Gamma''_0 = PC''_0 : P\Gamma''_0 = PC'' - C''C''_0 : PC'' - C''\Gamma''_0,$$

so erhält man nach geringer Umformung die zweite der Gleichungen 11); ebenso beweist man den anderen Theil der Construction.

Die vorausgeschickten Entwickelungen stützen sich auf die Figur 1, in welcher die Krümmungsmittelpunkte M und M der Evoluten des Hüllcurvenpaares eine solche Lage gegenüber dem Normalstrahle haben, dass die Krümmungsradien der Hüllcurven bei fortschreitender Bewegung zunehmen, also die Grössen $\overline{CC'} = e.dn$, bezw. $\overline{\Gamma\Gamma} = \varepsilon.dv$ positiv sind. Würde dagegen M auf der andern Seite des Normalstrahles liegen, so müsste der Radius $\overline{BC}$ der Curve c bei fortschreitender Bewegung abnehmen, also $\overline{CC'} = -e.dn$ zu setzen sein. Hieraus erkennt man, dass in vorstehenden Entwickelungen und Gleichungen e und ε mit positivem oder negativem Zeichen einzuführen sind, je nachdem bei fortschreitender Bewegung der Ebene die Krümmungsradien der Hüllcurven zu- oder abnehmen. Die mitgetheilten Constructionen werden hierdurch nicht beeinflusst.

II.

Ist die Bewegung der Ebene durch zwei Paare von Hüllcurven $c_1\,\gamma_1$ und $c_2\gamma_2$ bestimmt, dann lassen sich die Krümmungsradien k_p und k_π der Polcurven, wie folgt, ermitteln. Wir stellen die Gleichung 6) für die beiden Hüllcurvenpaare, bezw. deren Normalstrahlen auf; durch Elimination von $\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{W}\right)$ aus den beiden entsprechenden Gleichungen erhält man sofort

$$12\text{a)}\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{k_p} &= \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{2}{r_1}\right)\sin\varphi_1 - \left(\frac{1}{\varrho_2} + \frac{2}{r_2}\right)\sin\varphi_2 \\ &\quad + \left(\frac{\varepsilon_1\cos^2\varphi_1}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{\varepsilon_2\cos^2\varphi_2}{\varrho_2^{\,3}} - \frac{e_1\cos^2\varphi_1}{r_1^{\,3}} + \frac{e_2\cos^2\varphi_2}{r_2^{\,3}}\right)W. \end{aligned} \right.$$

Entweder durch Umkehrung der Bewegung oder unter Benutzung der Relation

$$13)\qquad \frac{1}{k_\pi} - \frac{1}{k_p} = \frac{1}{W}$$

erhält man weiterhin

$$12\text{b)}\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{k_\pi} &= \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{\varrho_1}\right)\sin\varphi_1 - \left(\frac{1}{r_2} + \frac{2}{\varrho_2}\right)\sin\varphi_2 \\ &\quad - \left(\frac{\varepsilon_1\cos^2\varphi_1}{\varrho_1^{\,3}} - \frac{\varepsilon_2\cos^2\varphi_2}{\varrho_2^{\,3}} - \frac{e_1\cos^2\varphi_1}{r_1^{\,3}} + \frac{e_2\cos^2\varphi_2}{r_2^{\,3}}\right)W. \end{aligned} \right.$$

Die beiden Gleichungen 12a) und 12b) finden sich bereits [XXXIV, S. 309] mitgetheilt.

Denkt man sich auf den beiden Normalstrahlen die Kreisungs- und Angelpunkte bestimmt und führt deren Abstände P_1, P_2, R_1, R_2 vom Pol

an Stelle der Grössen ϱ, r in die Gleichungen 12) ein, so nehmen dieselben die einfachere Gestalt

$$
14) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{k} &= \left(\frac{1}{\mathsf{P}_1} + \frac{2}{R_1}\right)\sin\varphi_1 - \left(\frac{1}{\mathsf{P}_2} + \frac{2}{R_2}\right)\sin\varphi_2 \\
\frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{k_\pi} &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{\mathsf{P}_1}\right)\sin\varphi_1 - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{2}{\mathsf{P}_2}\right)\sin\varphi_2
\end{aligned}
\right.
$$

an, weil für diese Punkte $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = e_1 = e_2 = 0$ ist. Unter entsprechender Benutzung der Euler'schen Gleichungen für die beiden Kreisungs- und Angelpunkte, d. i. der Relationen

$$
15) \quad \left(\frac{1}{\mathsf{P}_1} - \frac{1}{R_1}\right)\cos\varphi_1 = \left(\frac{1}{\mathsf{P}_2} - \frac{1}{R_2}\right)\cos\varphi_2 = \frac{1}{W}
$$

erhalten wir schliesslich aus 14)

$$
16) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{k_p} &= \frac{3}{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}\left(\frac{\sin\varphi_1}{R_1} - \frac{\sin\varphi_2}{R_2}\right) + \frac{1}{W} \\
\frac{1}{k_\pi} &= \frac{3}{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}\left(\frac{\sin\varphi_1}{\mathsf{P}_1} - \frac{\sin\varphi_2}{\mathsf{P}_2}\right) - \frac{1}{W}
\end{aligned}
\right.
$$

als Ausdrücke für die Krümmungen der Polcurven. Da dieselben völlig übereinstimmen mit denjenigen, welche [XXIX, S. 216] abgeleitet wurden, so lässt sich offenbar die [XXIX, S. 218] angegebene, [XXIX, S. 382] abgeänderte Construction der Krümmungsmittelpunkte C_p, Γ_π der Polcurven hier direct verwenden, indem wir die an citirter Stelle mit C_1, C_2, bezw. K_1, K_2 bezeichneten Punkte durch die Kreisungs- bezw. Angelpunkte auf den beiden Normalstrahlen ersetzen. Hiernach wird diese Construction, im Zusammenhange dargestellt, die folgende:

Es seien K_1, K_2 (s. Fig. 4) die Kreisungs-, K_1, K_2 die Angelpunkte auf den beiden Normalstrahlen PB_1, bezw. PB_2 der gegebenen Hüllcurvenpaare und Q sei der Schnittpunkt der Geraden $\mathsf{K}_1\mathsf{K}_2$ und K_1K_2, dann errichten wir in P eine Senkrechte zu PQ, welche die vorgenannten Geraden in K', bezw. K' schneiden möge. Legen wir nun durch K', bezw. K' Parallelen zu PQ, welche die beiden Normalstrahlen in K_{01}, K_{02}, bezw. K_{01}, K_{02} schneiden, und errichten in letzteren Schnittpunkten Lothe zu den betreffenden Normalstrahlen, so schneiden sich die entsprechenden Lothe in den Punkten K_0, bezw. K_0 der Polcurvennormalen. Die vier Punkte $\mathsf{K}'\mathsf{K}_0K_0K'$ bilden dann ein Paralleltrapez, dessen Diagonalen $\mathsf{K}'K_0$ und $K'\mathsf{K}_0$ sich in S schneiden mögen. Legen wir schliesslich durch P eine Parallele PG zu den parallelen Seiten $\mathsf{K}'\mathsf{K}_0$, bezw. $K'K_0$ des Trapezes, und fällen von S ein Loth auf PQ, so schneidet letzteres die erwähnte Parallele in einem Punkte H, welcher mit K', bezw. K' verbunden, Geraden ergiebt, die auf der Polcurvennormalen die gesuchten Punkte Γ_π, bezw. C_p ausschneiden.

Der Beweis der Richtigkeit dieser Construction soll hier nicht wiederholt werden, dagegen mögen diejenigen Umformungen der Ausdrücke 16) hier noch Platz finden, welche auf diese Constructionen führen, da sie später wieder gebraucht werden.

Aus dem Bobillier'schen Satze folgt mit Rücksicht darauf, dass $PK' \perp PQ$ ist:

$$\angle B_1PK' = \angle B_2PK_0 = \varphi_2,$$
$$\angle B_2PK' = \angle B_1PK_0 = \varphi_1;$$

setzen wir nun zur Abkürzung $\angle PK'Q = k$, so ergiebt sich aus den Dreiecken $K_1K'P$, bezw. $K_2K'P$:

$$R_1 = \overline{PK_1} = \overline{PK'}.\ \frac{\sin k}{\sin(\varphi_2 + k)},$$

$$R_2 = \overline{PK_2} = \overline{PK'}.\ \frac{\sin k}{\sin(\varphi_1 + k)},$$

und es wird folglich

$$17\text{a})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin\varphi_1}{R_1} - \frac{\sin\varphi_2}{R_2} &= \frac{\sin(\varphi_2 + k)\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 + k)\sin\varphi_2}{\overline{PK'}.\ \sin k} \\ &= \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\overline{PK'}} \\ &= \frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{\overline{PK'}}.\ \cos\varphi_1.\ \cos\varphi_2 \\ &= \frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{\overline{PK_0}}. \end{aligned}\right.$$

Auf ganz analogem Wege erhält man die Relation

$$17\text{b})\quad \frac{\sin\varphi_1}{\mathsf{P}_1} - \frac{\sin\varphi_2}{\mathsf{P}_2} = \frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{\overline{P\mathsf{K}_0}}.$$

Vermittels derselben führt man die Ausdrücke 16) über in

$$18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{k_p} &= \frac{3}{\overline{PK_0}} + \frac{1}{W}, \\ \frac{1}{k_\pi} &= \frac{3}{\overline{P\mathsf{K}_0}} - \frac{1}{W}, \end{aligned}\right.$$

welche in dieser Form ebenfalls [XXIX, S. 217] sich mitgetheilt finden.

Unter Verwendung der oben stehenden Ausdrücke für R_1 und R_2 erhält man weiterhin

$$\frac{\cos\varphi_1}{R_1}-\frac{\cos\varphi_2}{R_2}=\frac{\sin(\varphi_2+k)\cos\varphi_1-\sin(\varphi_1+k)\cos\varphi_2}{\overline{PK'}.\sin k}$$

$$=-\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\overline{PK'}.\tan k}=-\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\overline{PQ}}$$

und derselbe Ausdruck ergiebt sich, wenn man hierin die Grössen R_1 und R_2 durch $\mathsf{P}_1=\overline{PK_1}$, bezw. $\mathsf{P}_2=\overline{PK_2}$ ersetzt; wir finden sonach die später zu verwendenden Relationen

$$19)\qquad \frac{\cos\varphi_1}{R_1}-\frac{\cos\varphi_2}{R_2}=\frac{\cos\varphi_1}{\mathsf{P}_1}-\frac{\cos\varphi_2}{\mathsf{P}_2}=-\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\overline{PQ}}.$$

III.

Sei γ eine beliebige Curve einer Ebene, deren Bewegung durch die beiden Hüllcurvenpaare $c_1\gamma_1$ und $c_2\gamma_2$ bestimmt ist, so lässt sich mittels der in I abgeleiteten Resultate der Krümmungshalbmesser der Evolute derjenigen Curve c finden, welche γ bei ihrer Bewegung einhüllt. Stellen wir nämlich, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen, für die drei Hüllcurvenpaare $c\gamma$, $c_1\gamma_1$, $c_2\gamma_2$ die Gleichung 6) auf und eliminiren aus den so erhaltenen drei Gleichungen sowohl $\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{W}\right)$, als auch $k_p^{\sim}$, so ergiebt sich die Gleichung

$$20)\qquad \begin{aligned}&\left[\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{2}{r}\right)\sin\varphi+\left(\frac{\varepsilon}{\varrho^3}-\frac{e}{r^3}\right)W\cos^2\varphi\right]\Big(\tan\varphi_1-\tan\varphi_2\Big)=\\ &\qquad A_1\Big(\tan\varphi-\tan\varphi_2\Big)-A_2\Big(\tan\varphi-\tan\varphi_1\Big),\end{aligned}$$

in welcher zur Abkürzung

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{2}{r_1}\right)\sin\varphi_1+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varrho_1^{\,3}}-\frac{e_1}{r_1^{\,3}}\right)W\cos^2\varphi_1=A_1,$$

$$\left(\frac{1}{\varrho_2}+\frac{2}{r_2}\right)\sin\varphi_2+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varrho_2^{\,3}}-\frac{e_2}{r_2^{\,3}}\right)W\cos^2\varphi_2=A_2$$

gesetzt wurde. In dieser Gleichung ist ϱ und ε als gegeben zu betrachten und r findet sich aus der Euler'schen Gleichung 1); die einzige Unbekannte ist sonach der Krümmungsradius e der Evolute der Hüllbahn c, nach welcher die Gleichung 20) aufzulösen ist. Besteht die Curve γ nur aus einem Punkte, so hat man in vorstehender Gleichung $\varepsilon=0$ zu setzen, und ist dieser Punkt ein Kreisungspunkt, so muss weiterhin auch $e=0$ sein.

Führen wir die letzteren Specialwerthe für ε und e in 20) ein, so haben wir dann ϱ und r durch P und R zu ersetzen; es besteht folglich für die Abstände des Kreisungs- und Angelpunktes vom Pol auf dem

Normalstrahle, der den Winkel φ mit der Polcurvennormalen einschliesst, die Bedingungsgleichung

$$21) \quad \frac{1}{\mathsf{P}} + \frac{2}{R} = \frac{A_1 - A_2}{(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)\cos\varphi} - \frac{A_1 \tan\varphi_2 - A_2 \tan\varphi_1}{(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)\sin\varphi},$$

welche zusammen mit 9) die Grössen P und R bestimmt. Man erhält

$$22\text{a}) \quad \frac{1}{\mathsf{P}} = \left\{\frac{A_1 - A_2}{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2} + \frac{2}{W}\right\}\frac{1}{3\cos\varphi} - \frac{A_1 \tan\varphi_2 - A_2 \tan\varphi_1}{3(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)\sin\varphi},$$

$$22\text{b}) \quad \frac{1}{R} = \left\{\frac{A_1 - A_2}{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2} - \frac{1}{W}\right\}\frac{1}{3\cos\varphi} - \frac{A_1 \tan\varphi_2 - A_2 \tan\varphi_1}{3(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)\sin\varphi},$$

und wenn man in diesen Ausdrücken φ als unabhängige Variabele betrachtet, so stellen sie die Polargleichungen der Kreisungspunkt- und Angelpunktcurve dar.

Diese beiden Gleichungen werden erheblich einfacher, wenn man sich die Kreisungs- und Angelpunkte auf den Normalstrahlen der beiden Hüllcurvenpaare $c_1\gamma_1$ und $c_2\gamma_2$ bestimmt denkt und die Abstände $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2$, R_1, R_2 dieser Punkte vom Pol an Stelle der Grössen ϱ_1, ϱ_2, r_1, r_2 einführt; es ergiebt sich dann zufolge 10):

$$A_1 = \left(\frac{1}{\mathsf{P}_1} + \frac{2}{R_1}\right)\sin\varphi_1, \quad A_2 = \left(\frac{1}{\mathsf{P}_2} + \frac{2}{R_2}\right)\sin\varphi_2.$$

Unter Benutzung der Relationen 15) wird weiterhin

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left\{\frac{A_1 - A_2}{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2} + \frac{2}{W}\right\} &= \frac{1}{3(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}\left\{\left(\frac{3}{\mathsf{P}_1} - \frac{2}{W\cos\varphi_1}\right)\sin\varphi_1 - \right.\\ &\qquad \left. - \left(\frac{3}{\mathsf{P}_2} - \frac{2}{W\cos\varphi_2}\right)\sin\varphi_2\right\} + \frac{2}{3W}\\ &= \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot \left\{\frac{\sin\varphi_1}{\mathsf{P}_1} - \frac{\sin\varphi_2}{\mathsf{P}_2}\right\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left\{\frac{A_1 - A_2}{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2} - \frac{1}{W}\right\} &= \frac{1}{3(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}\left\{\left(\frac{3}{R_1} + \frac{1}{W\cos\varphi_1}\right)\sin\varphi_1\right.\\ &\qquad \left. - \left(\frac{3}{R_2} + \frac{1}{W\cos\varphi_2}\right)\sin\varphi_2\right\} - \frac{1}{3W}\\ &= \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}\left\{\frac{\sin\varphi_1}{R_1} - \frac{\sin\varphi_2}{R_2}\right\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{A_1 \tan\varphi_2 - A_2 \tan\varphi_1}{3(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)} &= \frac{\tan\varphi_1 . \tan\varphi_2}{3(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}\left\{\left(\frac{3}{\mathsf{P}_1} + \frac{1}{W\cos\varphi_1}\right)\cos\varphi_1 - \right.\\ &\qquad \left. - \left(\frac{3}{\mathsf{P}_2} + \frac{1}{W\cos\varphi_2}\right)\cos\varphi_2\right\}\\ &= \frac{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}\left\{\frac{\cos\varphi_1}{\mathsf{P}_1} - \frac{\cos\varphi_2}{\mathsf{P}_2}\right\}\\ &= \frac{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot \left\{\frac{\cos\varphi_1}{R_1} - \frac{\cos\varphi_2}{R_2}\right\};\end{aligned}$$

und substituirt man diese Ausdrücke in 22a) und 22b), so erhält man als Polargleichungen der Kreisungspunkt- und Angelpunktcurve:

$$23\text{a)}\quad \frac{1}{\mathsf{P}}=\frac{1}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\left[\left(\frac{\sin\varphi_1}{\mathsf{P}_1}-\frac{\sin\varphi_2}{\mathsf{P}_2}\right)\frac{\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2}{\cos\varphi}-\left(\frac{\cos\varphi_1}{\mathsf{P}_1}-\frac{\cos\varphi_2}{\mathsf{P}_2}\right)\frac{\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}{\sin\varphi}\right]$$

$$23\text{b)}\quad \frac{1}{R}=\frac{1}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\left[\left(\frac{\sin\varphi_1}{R_1}-\frac{\sin\varphi_2}{R_2}\right)\frac{\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2}{\cos\varphi}-\left(\frac{\cos\varphi_1}{R_1}-\frac{\cos\varphi_2}{R_2}\right)\frac{\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}{\sin\varphi}\right]$$

Die einfachste Gestalt nehmen diese Gleichungen aber an, wenn man sie mittels der Relationen 17) und 19) umformt; es ergiebt sich dann zunächst:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\mathsf{P}}=\dfrac{1}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\left[\dfrac{\tan\varphi_1-\tan\varphi_2}{\overline{P\mathsf{K}_0}}\cdot\dfrac{\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2}{\cos\varphi}+\dfrac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\overline{PQ}}\cdot\dfrac{\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}{\sin\varphi}\right]\\[2ex] \quad=\dfrac{1}{\overline{P\mathsf{K}_0}\cos\varphi}+\dfrac{\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}{\overline{PQ}\,.\,\sin\varphi}.\end{cases}$$

Errichtet man nun in dem Punkte Q (s. Fig. 5) eine Senkrechte zu PQ, welche die beiden Normalstrahlen in den Punkten Q_1, bezw. Q_2 schneiden mag, und errichtet hierauf in Q_1 und Q_2 Lothe zu den betreffenden Normalstrahlen, so schneiden sich diese Lothe auf der Polcurventangente in einem Punkte Q_0, von dem sich leicht zeigen lässt, dass

$$\overline{PQ}_0=\frac{\overline{PQ}}{\sin\varphi_1\,.\,\sin\varphi_2}.$$

Denn der Winkel zwischen der Polcurventangente und dem Normalstrahle PB_1 ist gleich $90^0-\varphi_1$, der zwischen letzterem Strahle und PQ ist gleich $90^0-\varphi_2$; sonach wird

$$\overline{PQ}=\overline{PQ}_1\,.\cos(90^0-\varphi_1)\cos(90^0-\varphi_2)=\overline{PQ}_0\,.\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung $P\mathsf{K}_0=\varkappa_0$, $PQ_0=q_0$, so finden wir als Gleichung der Kreisungspunktcurve

$$24\text{a)}\qquad \frac{1}{\mathsf{P}}=\frac{1}{\varkappa_0\cos\varphi}+\frac{1}{q_0\sin\varphi}$$

und als Gleichung der Angelpunktcurve, wenn $PK_0=k_0$ gesetzt wird, auf analogem Wege

$$24\text{b)}\qquad \frac{1}{R}=\frac{1}{k_0\cos\varphi}+\frac{1}{q_0\sin\varphi}.$$

IV.

Wenn die Bewegung der Ebene durch die beiden Polcurven gegeben ist, so reichen die in I entwickelten Gleichungen ebenfalls völlig hin, um die Kreisungs- und Angelpunkte der Ebene zu ermitteln. Da nämlich die der bewegten Ebene angehörige Polcurve π die ruhende Polcurve p einhüllt, die beiden Curven also ein Hüllcurvenpaar bilden, welches sich auf

der Polcurvennormale berührt, so gilt für dasselbe die Gleichung 6), in der man $\varphi = 0$, $\varrho = k_\pi$, $r = k_p$ zu setzen hat. Man erhält dann

$$25)\qquad \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{W}\right) = -\left(\frac{\varepsilon_\pi}{k^3_\pi} - \frac{e_p}{k^3_p}\right) W,$$

in welcher Gleichung $e_p = \overline{M_p C_p}$, bezw. $\varepsilon_\pi = \overline{\mathsf{M}_\pi \Gamma_\pi}$ (s. Fig. 6) die Krümmungsradien der Evoluten e_p, bezw. ε_π der Polcurven bezeichnen. Ist wieder γ eine beliebige Curve der bewegten Ebene, und c ihre Hüllbahn, so folgt durch Gleichsetzung der Ausdrücke 6) und 25) die Gleichung

$$26)\quad \frac{\tan\varphi}{k_p} - \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{2}{r}\right)\sin\varphi - \left(\frac{\varepsilon}{\varrho^3} - \frac{e}{r^3}\right) W\cos^2\varphi = -\left(\frac{\varepsilon_\pi}{k^3_\pi} - \frac{e_p}{k^3_p}\right) W,$$

aus welcher der Krümmungsradius e der Evolute von c berechnet zu werden vermag.

Für den Kreisungs- und Angelpunkt auf einem beliebig angenommenen Normalstrahle erhalten wir aus 26) die specielle Gleichung

$$\frac{\tan\varphi}{k_p} - \left(\frac{1}{\mathsf{P}} + \frac{2}{R}\right)\sin\varphi = -\left(\frac{\varepsilon_\pi}{k^3_\pi} - \frac{e_p}{k^3_p}\right) W,$$

aus welcher in Verbindung mit 9) und 12) sich die Ausdrücke:

$$27)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathsf{P}} = \left(\dfrac{1}{k_\pi} + \dfrac{1}{W}\right)\dfrac{1}{3\cos\varphi} + \left(\dfrac{\varepsilon_\pi}{k^3_\pi} - \dfrac{e_p}{k^2_p}\right)\dfrac{W}{3\sin\varphi}, \\[2ex] \dfrac{1}{R} = \left(\dfrac{1}{k_p} - \dfrac{1}{W}\right)\dfrac{1}{3\cos\varphi} + \left(\dfrac{\varepsilon_\pi}{k^3_\pi} - \dfrac{e_p}{k^3_p}\right)\dfrac{W}{3\sin\varphi} \end{cases}$$

ergeben. Dieselben stellen die Polargleichungen der Kreisungspunkt- und Angelpunktcurve dar, wenn wir darin R, P und φ als Variabele betrachten.

Beachten wir, dass wir dieselbe Bewegung der Ebene erhalten, ob wir sie nun durch zwei Hüllcurvenpaare oder durch das zugehörige Polcurvenpaar erzeugen, so erkennen wir, dass die durch die Gleichungen 27) dargestellten Curven identisch sein müssen mit den Curven, welche die Gleichungen 24) repräsentiren. Es müssen sonach auch die Gleichungen 24) und 27) übereinstimmen, was die nachstehenden Relationen zur Folge hat:

$$28\text{a})\qquad \frac{1}{\varkappa_0} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k_\pi} + \frac{1}{W}\right),$$

$$28\text{b})\qquad \frac{1}{k_0} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k_p} - \frac{1}{W}\right),$$

$$29)\qquad \frac{1}{q_0} = \frac{W}{3}\left(\frac{e_\pi}{k^3_\pi} - \frac{e_p}{k^3_p}\right).$$

Die erste derselben lässt in der Form

$$\frac{3}{\varkappa_0} - \frac{1}{k_\pi} = \frac{1}{W}$$

erkennen, dass derjenige Punkt N_0 der Polcurvennormalen, dessen Bahn Γ_π zum Krümmungsmittelpunkte hat, sich in ein Drittel der Strecke $\varkappa_0$ vom Pol entfernt befindet, d. h. dass

$$\overline{P\mathsf{N}_0} = \frac{1}{3}\varkappa_0 = \frac{1}{3}\overline{P\mathsf{K}_0}$$

ist. Da sich nun der Punkt N_0 als zugeordneter Systempunkt zu Γ_π geometrisch sehr einfach ermitteln lässt, so erhält man in diesem Falle sofort auch den wichtigen Punkt K_0, indem man $\overline{P\mathsf{K}_0} = 3\,\overline{P\mathsf{N}_0}$ macht. Dasselbe gilt von dem Punkte C_0, den man ganz analog findet, indem man zunächst den Krümmungsmittelpunkt N_0 der Bahn sucht, welche C_p, als Punkt der bewegten Ebene aufgefasst, beschreiben würde; es ist dann wieder $\overline{PC_0} = 3\,\overline{PN_0}$. Es lassen sich demnach, wenn die Polcurven gegeben sind, aus deren Krümmungsmittelpunkten Γ_π und C_p die Punkte K_0 und K_0 geometrisch sehr einfach finden, wobei man noch benutzen kann, dass K_0 und K_0 einander zugeordnete Punkte auf der Polcurvennormalen sind, weil zufolge 28)

$$\frac{1}{\varkappa_0} - \frac{1}{k_0} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{k_\pi} - \frac{1}{k_p} + \frac{2}{W}\right] = \frac{1}{W}$$

ist.

Auch der Punkt Q_0, bezw. die Strecke q_0, ergiebt sich hier in directerer Weise als früher. Setzen wir nämlich in 29)

$$\frac{3k_\pi^3}{W.\varepsilon_\pi} = \lambda, \quad \frac{3k_p^3}{W.e_p} = l,$$

so lassen sich λ und l, als Strecken betrachtet, nach dem auf Seite 41 angegebenen Verfahren construiren, und zwar findet sich durch Benutzung dieser Construction hier (s. Fig. 6)

$$\lambda = \overline{\Gamma'_\pi \Phi'}, \quad l = \overline{C'_p F'},$$

falls Γ'_p und C'_p hier dieselben Punkte sind, welche in der früheren Construction, bezw. in Fig. 2 mit Γ' und C' bezeichnet wurden und wieder $\overline{\Gamma'_\pi\Phi'}$, bezw. $\overline{C'_pF'}$ die Lothe von den Punkten Γ'_π, bezw. C'_p auf die Polcurvennormale darstellen. Dann aber findet man, weil

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{l},$$

Q_0 constructiv sehr einfach auf Grund des Satzes, den ich [XXIX, S. 382] mitgetheilt habe. Ist nämlich L der Schnittpunkt der Geraden $C'_p\Gamma'_\pi$ mit der Polcurvennormalen, so legen wir durch L eine Parallele zur Polcurventangente, welche die Gerade $C'_p\Phi'$ im Punkte L' schneiden möge; eine Parallele durch L' zur Polcurvennormalen schneidet die Polcurventangente im gesuchten Punkte Q_0. Zum Beweise dieser Construction benutze man, dass

$$\overline{\Gamma'^{\pi}\Phi'} : \overline{LL'} = \overline{C'_{p}L'} : \overline{C'_{p}\Gamma'_{\pi}}$$
$$= \overline{LF'} : \overline{\Phi' F'}$$
$$= \overline{LF'} : \overline{LF'} - \overline{L\Phi'}$$

und ferner

$$\overline{L\Phi'} : \overline{LF'} = \overline{\Gamma'^{\pi}\Phi'} : \overline{C'_{p}F'} = \lambda : l$$

ist; es folgt dann sofort

$$\frac{1}{\overline{LL'}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{l} = \frac{1}{q_0},$$

was zu beweisen war, weil constructionsgemäss

$$\overline{PQ_0} = \overline{LL'}$$

ist.

Durch diese Darlegungen haben wir die Ermittlung der Kreisungs- und Angelpunkte auch im vorliegenden Falle, also bei gegebenen Polcurven, auf die Bestimmung der drei Punkte K_0, K_0 und Q_0 zurückgeführt, was wir später bei der Untersuchung der Kreisungspunkt- und Angelpunktcurve insofern benutzen werden, als wir dann die Erzeugungsweise der ebenen Bewegung ganz ausser Betracht lassen können.

Die Relationen 28) hätten sich auch direct ableiten lassen und zwar aus den Ausdrücken 16) unter Verwendung der Relationen 17), während 29) sich wie folgt gewinnen lässt. Aus der ersten der Gleichungen 27) ergiebt sich für zwei Kreisungspunkte, deren Normalstrahlen die Winkel φ_1 und φ_2 mit der Polcurvennormalen einschliessen:

$$\frac{\cos\varphi_1}{\mathsf{P}_1} - \frac{\cos\varphi_2}{\mathsf{P}_2} = \frac{W}{3}\left(\frac{\varepsilon_\pi}{k^3{}_\pi} - \frac{e_p}{k^3{}_p}\right)\left(\cot\varphi_1 - \cot\varphi_2\right)$$
$$= -\frac{W}{3}\left(\frac{\varepsilon_\pi}{k^3{}_\pi} - \frac{e_p}{k^3{}_p}\right)\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}$$

und zufolge 19) sonach

$$\frac{W}{3}\left(\frac{\varepsilon_\pi}{k^3{}_\pi} - \frac{e_p}{k^3{}_p}\right) = -\frac{\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}\left(\frac{\cos\varphi_1}{\mathsf{P}_1} - \frac{\cos\varphi_2}{\mathsf{P}_2}\right) = \frac{\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}{\overline{PQ}}$$

oder endlich in Rücksicht auf die früher bewiesene Beziehung

$$\overline{PQ} = \overline{PQ_0}\,.\,\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2$$
$$\frac{W}{3}\left(\frac{e_\pi}{k^3{}_\pi} - \frac{e_p}{k^3{}_p}\right) = \frac{1}{\overline{PQ_0}} = \frac{1}{q_0}.$$

Die Verbindung der Relationen 25) und 29) liefert die bemerkenswerthe Beziehung

$$\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{W}\right) = -\frac{3}{q_0}, \tag{31}$$

aus der hervorgeht, dass nur die Grösse der Strecke q_0 von Einfluss auf die Aenderung des Wendekreisdurchmessers, bezw. auf die momentane Be-

wegung der Ebene durch vier consecutive Lagen ist. Weiterhin erkennt man dann aus 29), dass die erwähnte Bewegung unabhängig ist von der Grösse der einzelnen Krümmungsradien e_p und ε_π der Polcurvenevoluten, falls diese Radien nur der Gleichung 29) genügen. Hierin unterscheidet sich das Polcurvenpaar aber nicht von jedem Hüllcurvenpaar, welches sich in einem Punkte der Polcurvennormalen berührt, wie aus 26) für $\varphi = 0$ hervorgeht, während dies bei allen anderen Hüllcurvenpaaren der Fall ist, weil deren Evolutenkrümmungsradien für die Lage der Kreisungs- und Angelpunkte des betreffenden Normalstrahles, wie wir sehen, bestimmend sind.

Ist umgekehrt die Bewegung der Ebene durch zwei Hüllcurvenpaare gegeben, so liefert die Gleichung

$$\frac{1}{q_0} = \frac{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}\left(\frac{\cos\varphi_1}{\mathsf{P}_1} - \frac{\cos\varphi_2}{\mathsf{P}_2}\right) = \frac{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}\left(\frac{\cos\varphi_1}{R_1} - \frac{\cos\varphi_2}{R_2}\right)$$
$$= -\frac{W}{3}\left(\frac{\varepsilon_\pi}{k^3_\pi} - \frac{e_p}{k^3_p}\right)$$

wohl eine Bedingung für die Grössen e_p und ε_π, nicht aber diese letzteren selbst. Will man sie ermitteln, so muss offenbar noch eine weitere consecutive Lage der bewegten Ebene in Betracht gezogen werden. Da nun in der Ebene im Allgemeinen vier discrete Punkte existiren, deren fünf consecutive Lagen auf einem Kreise sich befinden*, oder, was dasselbe sagt, deren Bahnen ihren Krümmungskreis fünfpunktig berühren**, so erkennt man, dass die Ermittlung der Krümmungsradien der Polcurvenevoluten in engstem Zusammenhange mit den letzterwähnten Punkten steht. Die Bestimmung der Lage dieser Punkte, welche selbstredend der Kreisungspunktcurve angehören müssen, soll aber einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

Was schliesslich den Einfluss der Lage, welche die Krümmungsmittelpunkte M_p und M_π der Evoluten der Polcurven gegenüber der Polcurvennormalen besitzen, auf die Bewegung der Ebene anlangt, so kann hier auf das am Schlusse des Abschnittes I Gesagte verwiesen werden.

V.

Die wesentlichsten Eigenschaften der Kreisungspunkt- und Angelpunktcurve erkennen wir unmittelbar aus deren Gleichungen in Cartesischen Punktcoordinaten. Wählen wir den Pol als Coordinatenanfang, die Polcurvennormale und -tangente als X-, bezw. Y-Achse des Coordinatensystems, so sind die Coordinaten der Kreisungspunktcurve

---

* Vergl. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Bd. I, S. 621.

** Siehe Schönflies, Geometrie der Bewegung, S. 39.

$$x = \mathsf{P}.\cos\varphi, \quad y = \mathsf{P}\sin\varphi;$$

durch Einführung derselben in 24a) erhalten wir nach geringer Umformung

32a) $$(x^2 + y^2)(\varkappa_0 x + q_0 y) - \varkappa_0 q_0 xy = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Kreisungspunktcurve, während die der Angelpunktcurve die folgende Gestalt annimmt:

32b) $$(x^2 + y^2)(k_0 x + q_0 y) - k_0 q_0 xy = 0.$$

Aus diesen Gleichungsformen geht unmittelbar hervor, dass die Kreisungspunkt- und Angelpunktcurve im Pol einen Doppelpunkt haben, ferner, dass die Polcurvennormale und -tangente die Doppelpunktstangenten sind*, endlich, dass sie durch die imaginären Kreispunkte gehen, also nur eine reelle Asymptote besitzen. Es sind diese Curven identisch mit den von Burmester** doppelpunktige Focalcurven genannten Curven dritter Ordnung, wie später gezeigt werden soll; da dieselben, wie die Focalcurven dritter Ordnung überhaupt, aber bereits sehr eingehend untersucht worden sind, so kann bezüglich der sonstigen, speciell der geometrischen Eigenschaften dieser Curven auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.*** Hier sollen nur diejenigen Eigenschaften und Constructionen der Kreisungspunkt- und Angelpunktcurve Platz finden, welche mit der Bewegung der Ebene in Zusammenhang stehen und solchergestalt neu sein dürften.

Aus der Polargleichung 24a) der Kreisungspunktcurve folgt, dass der spitze Winkel α, welchen die reelle Asymptote PV (s. Fig. 7) dieser Curve mit der Polcurvennormalen $P\mathsf{K}_0$ einschliesst, bestimmt ist durch den Werth

$$\tan\alpha = -\frac{\varkappa_0}{q_0};$$

es hat also die Asymptote die in der Figur angenommene Lage. Aber es ist auch

$$\tan\alpha = \frac{\overline{P\mathsf{K}_0}}{\overline{PQ_0}} = \frac{\varkappa_0}{q_0},$$

folglich, wenn wir das Loth $P\Delta_0$ auf die Gerade $\mathsf{K}_0 Q_0$ fällen,

$$\angle \mathsf{K}_0 P \Delta_0 = \alpha.$$

Das Loth $P\Delta_0$ schneidet die Kreisungspunktcurve ausser im Doppelpunkte P noch in einem Punkte Δ, dessen Abstand $\overline{P\Delta} = \delta$ vom Pol sich aus 24a) zu

---

* Von Herrn Schönflies wurde mir im Februar a. c. folgendes Theorem ohne Ableitung desselben brieflich mitgetheilt: „Die Curve k^3 (Kreisungspunktcurve) ist eine focale à noeud; sie hat im Pol einen Doppelpunkt, und Tangente und Normale der Polbahnen sind ihre Doppelpunktstangenten.“

** Lehrbuch der Kinematik. Bd. I, S. 76.

*** Vergl. hierüber: Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. 3. Aufl., S. 369; Eckart, Diese Zeitschrift 1865. Bd. X, S. 321; Schröter, Math. Annalen. Bd. 5, S. 50; Bd. 6, S. 85; Durège, Math. Annalen. Bd. 5, S. 83.

$$\delta = \frac{1}{2}\varkappa_0 \cos\alpha = \frac{1}{2}q_0 . \sin\alpha = \frac{1}{2}\overline{P\Delta_0}$$

ergiebt, weil

$$\varkappa_0 \cos\alpha = q_0 \sin\alpha = \overline{P\Delta_0}$$

ist; es halbirt sonach der Curvenpunkt Δ das Loth $\overline{P\Delta_0}$.

Mittels des Curvenpunktes Δ und eines über $P\Delta_0$ als Durchmesser errichteten Kreises lässt sich aber die Kreisungspunktcurve überaus einfach construiren. Ist PB ein beliebiger Normalstrahl, auf welchem wir den Kreisungspunkt K bestimmen wollen, und der den erwähnten Kreis in H schneidet, so machen wir im gleichen Sinne

$$\angle \mathsf{H}P\mathsf{H}' = \angle \mathsf{H}_0 P\Delta_0 = \alpha$$

(am einfachsten durch Eintragen der Sehne $\overline{\mathsf{H}\mathsf{H}'} = \overline{\mathsf{H}_0\Delta_0}$ in den Kreis von H aus); dann schneidet die Gerade $\mathsf{H}'\Delta$ den Normalstrahl PB im gesuchten Punkte K. Der Beweis der Richtigkeit dieser Construction folgt leicht, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\angle \mathsf{H}' P\Delta_0 = \varphi$$

ist, wie aus der Construction unmittelbar hervorgeht; dann muss

$$\angle \mathsf{H}'\Delta\Delta_0 = 2\varphi$$

sein und folglich, weil

$$\angle \mathsf{K}P\Delta = \varphi - \alpha,$$

$$\angle P\mathsf{K}\Delta = \varphi + \alpha.$$

Somit finden wir aus dem Dreieck $P\mathsf{K}\Delta$, in welchem $\overline{P\Delta} = \delta$, $\overline{P\mathsf{K}} = \mathsf{P}$ ist, den nachstehenden Ausdruck für

$$\text{38)} \qquad \mathsf{P} = \delta \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Zu demselben gelangen wir aber auch, wenn wir in 24a) die vorher gefundenen Werthe

$$\varkappa_0 = \frac{2\delta}{\cos\alpha}, \quad q_0 = \frac{2\delta}{\sin\alpha}$$

substituiren, womit der fragliche Beweis gegeben ist.

Bemerkt mag hier noch werden, dass die Asymptote $PV \parallel \Delta\mathsf{H}_0$ ist, also parallel dem Durchmesser des über $\overline{P\Delta_0}$ errichteten Kreises, welcher die Schnittpunkte des letzteren mit der Polcurvennormalen und -tangente verbindet.

Die einfache Gleichung 33) der Kreisungspunktcurve ist noch dadurch von Interesse, dass sie, wie man sich leicht überzeugt, übereinstimmt mit der Gleichung einer Curve, die von dem Scheitel eines Winkels beschrieben wird, dessen Schenkel den Winkel 2α einschliessen, falls sich der Winkel so bewegt, dass der eine Schenkel immer durch den festen Punkt Δ der Ebene geht, während ein Punkt des andern Schenkels, der vom Scheitel

die Entfernung δ besitzt, auf der Geraden PV gleitet. Nun lässt sich aber, wie Burmester* gezeigt hat, die von ihm doppelpunktige Focalcurve genannte Curve in dieser Weise erzeugen, womit erkannt wird, dass die Kreisungspunktcurve mit der doppelpunktigen Focalcurve identisch ist.

Die zuletzt gegebene Construction der Kreisungspunktcurve, welche auf die Gleichung 33) führte, und welche besonders zweckmässig ist, wenn die Bewegung der Ebene durch die Polcurven erzeugt wird, ist ein specieller Fall einer etwas allgemeinen Construction, die immer sehr einfach zum Ziele führt, wenn irgend ein Kreisungspunkt und der Punkt K_0 auf der Polcurvennormalen als bekannt vorausgesetzt werden kann. Um zu dieser Construction zu gelangen, denken wir uns zunächst auf zwei beliebigen Normalstrahlen die Kreisungspunkte gegeben und suchen den Punkt K_0. Es sei PQ (Fig. 8) die den beiden Normalstrahlen zugeordnete Collineationsachse, so errichten wir zu dieser in P eine Senkrechte, welche die Verbindungslinie der gegebenen Kreisungspunkte K_1 und K_2 im Punkte K' schneiden möge. Ziehen wir nun durch K' eine Parallele zu PQ, welche die Normalstrahlen in den Punkten K_{01}, bez. K_{02} schneidet, und errichten in letzteren Punkten Lothe zu $K_{01}P$, bez. $K_{02}P$, so schneiden sich diese in dem gesuchten Punkte K_0 auf der Polcurvennormalen. Wie aus der zweiten der Gleichungen 18) hervorgeht, hängt nun $\overline{PK_0} = \varkappa_0$ nur von k_π und W ab, nicht aber von den gegebenen Kreisungspunkten. Denken wir uns sonach statt K_1 einen beliebigen andern Kreisungspunkt K auf dem Normalstrahle PB gegeben, so muss sich aus den Kreisungspunkten K und K_2 derselbe Punkt K_0 ergeben, also auch K_{02} als derselbe Punkt, weil

$$\overline{PK_{02}} = PK_0 \,.\, \cos\varphi_2$$

ist. Berücksichtigen wir nun weiterhin, dass bei variabelem φ_1 und constantem φ_2 der Ort des Punktes K_{01} ein Kreis über PK_{02} als Durchmesser ist, weil constructionsgemäss

$$\angle K'PK_{01} = \angle K_{02}PK_0 = \varphi_2,$$

und folglich

$$\angle K'PK_{02} = \varphi_1,$$

also

$$\overline{PK'} = \overline{PK_{02}} \,.\, \cos\varphi_1$$

sein muss, so finden wir K auf dem willkürlich angenommenen Normalstrahle PB, indem wir im gleichen Sinne

$$\angle H'PK_{02} = \angle HPK_0 = \varphi$$

antragen und den so erhaltenen Punkt H' (auf dem Kreise über $\overline{PK_{02}}$ als

---

* Lehrbuch der Kinematik, Bd. II, S. 76.

Durchmesser) mit K_2 durch eine Gerade verbinden; letztere schneidet den Normalstrahl PB im gesuchten Kreisungspunkte K.*

Die frühere specielle Construction folgt aus dieser für $\varphi_2 = \alpha$.

Dieselben Betrachtungen und Constructionen lassen sich, wie ohne Weiteres erkannt wird, auf die Angelpunktcurve übertragen.

Von besonderem Interesse ist der Punkt auf der Kreisungspunktcurve, in welchem die letztere vom Wendekreis geschnitten wird. Es ist dies der zuerst von Ball (Proceedings of the R. Irish Acad. Ser. II, Bd. I, S. 243) bemerkte Undulationspunkt, in welchem die Bahntangente vierpunktig von der Bahn des Punktes berührt wird. Da der dem Undulationspunkt zugeordnete Angelpunkt im Unendlichen liegt, also $R = \infty$ sein muss, so erkennen wir, dass der Undulationspunkt im Schnittpunkt der reellen Asymptote der Angelpunktcurve mit dem Wendekreise liegen muss. Die Asymptote der Angelpunktcurve kann, wie vorher mitgetheilt, geometrisch sehr einfach construirt werden; sonach kann man auch den Undulationspunkt leicht construiren.

Der Schnittpunkt der Asymptote der Kreisungspunktcurve mit dem Rückkehrkreis ist der Undulationspunkt für die umgekehrte Bewegung; da dieser Punkt auf der Angelpunktcurve liegt, so ist er zugleich der Mittelpunkt aller Krümmungskreise, welche die Enveloppen der Systemgeraden vierpunktig berühren. Die Rückkehrtangente dieses Punktes berührt ihre Enveloppe in einer Spitze zweiter Art.

An Specialfällen mögen nur folgende Erwähnung finden:

1. Ist ein Punkt der Ebene gezwungen, sich auf einem Kreise zu bewegen, so ist dieser Punkt ein Kreisungspunkt, und der Mittelpunkt des Kreises der zugeordnete Angelpunkt. Bewegen sich zwei Punkte der Ebene auf Kreisen, wie beim Gelenkviereck, so kann die Kreisungspunkt- und Angelpunktcurve folglich unmittelbar, wie vorher angegeben, construirt werden. Wenn umgekehrt ein Kreis der bewegten Ebene durch einen festen Punkt der ruhenden Ebene geht, so ist letzterer Angelpunkt, und der Mittelpunkt des Kreises der zugeordnete Kreisungspunkt.

2. Bewegt sich ein Punkt der Ebene auf einer Geraden, so ist derselbe der Undulationspunkt; die Verbindungslinie desselben mit dem Pol ist dann die Asymptote der Angelpunktcurve. Geht eine Gerade der Ebene immer durch einen festen Punkt, so ist letzterer der Undulationspunkt der umgekehrten Bewegung und seine Verbindungslinie mit dem Pol die Asymptote der Kreisungspunktcurve der bewegten Ebene.

3. Sind die Polcurven beide Kreise, so wird, weil $\varepsilon_\pi = e_p = 0$, zufolge 29)

* Diese Erörterungen, welche unmittelbar zu obiger einfachen Construction führen, finden sich in anderem Zusammenhange bereits [XXIX, S. 221] mitgetheilt.

$$\frac{1}{q_0} = 0,$$

was auch unmittelbar aus 31) erkannt zu werden vermag, weil der Wendekreisdurchmesser sich dann nicht ändert. Die Kreisungspunkt- und Angelpunktcurve zerfallen dann zufolge 24) in die Polcurvennormale und in Kreise, deren Durchmesser sich aus 28) zu

$$\varkappa_0 = \frac{3\,W k_\pi}{W + k_\pi} = \frac{3 k_\pi k_p}{2 k_p - k_\pi},$$

$$k_0 = \frac{3\,W k_p}{W - k_p} = \frac{3 k_\pi k_p}{2 k_\pi - k_p}$$

ergiebt. Dass die Polcurvennormale jeder der beiden zerfallenden Curven angehört, erkennt man unmittelbar aus den Gleichungen 32), falls darin nach Division mit q_0 $\frac{1}{q_0} = 0$ gesetzt wird. In derselben Weise zerfallen die Kreisungspunkt- und Angelpunktcurve überhaupt, sobald entweder

$$\frac{\varepsilon_\pi}{k^3_\pi} - \frac{e_p}{k^3_p} = 0$$

ist, wie z. B. bei congruent-symmetrischen Polcurven, oder

$$\overline{PQ} = q_0 . \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \infty$$

wird, was z. B. eintritt, wenn die Verbindungslinie zweier gegebener Kreisungspunkte der Verbindungslinie der zugeordneten Angelpunkte parallel ist.

4. Ist die ruhende Polcurve p eine Gerade, also $k_p = \infty$, so wird der Punkt K_0 sehr einfach angebbar, weil nämlich aus 28a) sofort

$$PK_0 = k_0 = -3\,W$$

folgt. Dann ermittelt man K_0 direct als zugeordneten Punkt zu K_0, so dass zufolge 28b) und weil $W = k_\pi$ ist,

$$\overline{P\mathsf{K}_0} = \varkappa_0 = \frac{2}{3} k_\pi,$$

$$\overline{PK_0} = k_0 = 3\,k_\pi$$

wird. Das Umgekehrte gilt, wenn die bewegte Polcurve π eine Gerade ist. In beiden Fällen wird auch die Ermittlung von Q_0 viel einfacher, weil dann entweder $q_0 = \lambda = \overline{P\Gamma''_\pi}$ oder $q_0 = -l = -\overline{PC''_p}$ ist.

Riga, Mai 1891.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber die Gleichung $x^p + y^p = z^p$.

Die in der Zeitschrift veröffentlichten Aufsätze von Herrn Rieke über den Fermat'schen Satz (Ueber die Gleichung $x^p + y^p = z^p$, Bd. XXXIV, S. 238—48; Versuch über die Gleichung $x^p + y^p = z^p$, Bd. XXXVI, S. 249—54) sind, wie es mir scheint, mit einigen Fehlern behaftet, die ich mir erlaube, hier hervorzuheben.

Die Gleichung (Bd. XXXIV, S. 241):

$$m^{\frac{p-1}{2}} - \frac{p}{1}\left(p-2\right)_0 m^{\frac{p-3}{2}} + \frac{p}{2}\left(p-3\right)_1 m^{\frac{p-5}{2}} - \ldots = 0$$

besitzt im Allgemeinen keine rationalen Wurzeln; jedoch werden ihre Wurzeln in der Folge als rationale ganze Zahlen behandelt. Es ist insbesondere zu fragen, was bedeutet die Aussage, dass „$m^{\frac{p-1}{2}}$ den Factor $p\ldots$ haben muss".

Bd. XXXVI, S. 251 wird bewiesen, dass:

$$\left(\frac{z}{a}\right)^{p-1} + \frac{(p-1)_1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^{p-2} A + \frac{(p-1)_2}{3}\left(\frac{z}{a}\right)^{p-3} A^2 + \ldots$$

durch $\frac{z}{a} + pg$ theilbar ist, und hieraus folgert man, dass

$$\left(\frac{z}{a}\right)^{p-1} + \frac{(p-1)_1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^{p-2} A + \frac{(p-1)_2}{3}\left(\frac{z}{a}\right)^{p-3} A^2 + \ldots$$

$$\left(\frac{z}{a} + pg\right)\left[\left(\frac{z}{a}\right)^{p-2} + k_1\left(\frac{z}{a}\right)^{p-3} + k_2\left(\frac{z}{a}\right)^{p-4} + \ldots\right]$$

ist, wo k_1, $k_2 \ldots$ ganze Zahlen bedeuten. Man muss aber beachten, dass die Theilbarkeit nicht im Allgemeinen, sondern nur für einen bestimmten Werth von $\frac{z}{a}$ stattfindet, woraus die algebraische Theilbarkeit nicht gefolgert werden darf.

Ein Leser.

II. Kriterien der Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

Die im 4. Heft laufenden Jahrgangs dieser Zeitschrift vom Herrn Cand. math. Dietrichkeit angegebene Regel betr. die Theilbarkeit der Zahlen, hat wohl nur für $n = 3, 7, 9$ und für diejenigen n, deren letzte Ziffer 1, 3, 7 oder 9 ist, Giltigkeit, da die Vielfachen der anderen Zahlen nie mit 01 resp. mit ... 001 endigen. Für $n = 3, 9$ ist es aber bequemer, wenn man versucht, ob die Quersumme des Dividendus durch 3 resp. 9 theilbar ist. Es bliebe also nur $n = 7$ und $n = 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29$ etc., für welche Zahlen die betr. Methode anzuwenden wäre.

Oldenburg i. G. G. Speckmann.

Im ersten Hefte vom 36. Jahrgange der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" ist von Herrn Dietrichkeit als Verallgemeinerung einer bekannten Regel ein Criterium für die Theilbarkeit einer gegebenen Zahl Z durch n veröffentlicht worden.

Obgleich ich durchaus keinen Zweifel hege, dass Herr Dietrichkeit diese Verallgemeinerung selbständig gefunden hat, möchte ich doch historisch bemerken, dass diese allgemeine Regel schon in den „Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences" t. CVI Nr. 15 (9. April 1888) von Herrn Loir bekannt gemacht worden ist.

Aber auch Herr Loir darf nicht als der eigentliche Entdecker dieses Verfahrens betrachtet werden. Wie von mir in den „Comptes Rendus" t. CVII Nr. 6 (pag. 386) in einer kleinen Mittheilung bemerkt wurde, kommt dieses Criterium in dem, bereits am Ende des vorigen Jahrhunderts von dem bekannten holländischen Mathematiker Prof. Jacob de Gelder verfassten Lehrbuch der Arithmetik vor (Grondbeginselen der Cyfferkunst, Rotterdam, 1793). Zwar weiss ich nicht, ob die Regel von diesem Gelehrten entdeckt wurde, aber jedenfalls ist dieselbe nachher in viele holländische Lehrbücher übergegangen.

Dem in Rede stehenden Criterium wird gewöhnlich ein anderes zur Seite gestellt, das mit einer kleinen Abänderung in der von Hrn. Dietrichkeit benutzten Form also lauten könnte:

„Um zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl Z durch n getheilt werden kann, multiplicire man die letzte Ziffer von Z mit der für jedes n besonders zu bestimmenden Zahl k und addire das erhaltene Product zu den von den vorhergehenden Ziffern gebildeten Zahl. Ist die gefundene Summe durch n theilbar, so ist es auch Z."

Die Zahl k bestimmt sich nach folgender Regel:

„Man schreibe alle diejenigen Vielfachen von n auf, welche mit der Ziffer 9 endigen, streiche diese Ziffer 9 weg und addire 1 zu der von den übrigen Ziffern gebildeten Zahl; dann genügen die so erhaltenen Zahlen den für k angegebenen Bedingungen."

Z. B.: wenn $n = 13$, wird $x = 4, 17$ u. s. w.

Dr. R. H. van Dorsten,
Lehrer am Gymnasium Erasmianum in Rotterdam.

III. Zwei Sätze über collineare Ebenen.

1. Wir gehen von 2 collinearen Systemen derselben Ebene aus. ABC resp. abc sei das Dreieck der sich selbst entsprechenden Punkte resp. Geraden (Fundamentaldreieck). Dann beweisen wir folgenden

Satz I. Eine Gerade trifft ihre entsprechende Gerade und die Seiten des Fundamentaldreiecks in 4 Punkten von constantem Doppelverhältniss Δ.

Beweis: Seien gg', hh' zwei entsprechende Strahlenpaare, so wollen wir mit G resp. H die Schnittpunkte dieser Paare bezeichnen. G_a, G_b, G_c und H_a, H_b, H_c seien die Schnittpunkte von g und h mit a, b, c. Dann müssen wir zeigen, dass $(G\,G_a\,G_b\,G_c) = (H\,H_a\,H_b\,H_c) = \Delta$.

Sei S der Schnittpunkt von g und h, S' der Schnittpunkt von $g'h'$, so bilden wir aus S und S' projectivische Büschel. Sie erzeugen einen Kegelschnitt K^2, der die Punkte SS', ABC, G und H enthält. Folglich sind die beiden Dreiecke ABC und SGH diesem Kegelschnitt eingeschrieben. Daraus folgt, dass die Seiten dieser Dreiecke einen neuen Kegelschnitt umhüllen. Die Tangenten gh desselben werden von abc und der Geraden $\overline{GH}$ in entsprechenden Punkten von projectivischen Reihen geschnitten. Mithin ist $(G\,G_a\,G_b\,G_c) = (H\,H_a\,H_b\,H_c) = \Delta$, w. z. b. w.

Dem Satze I steht dual gegenüber:

Satz II. Verbinden wir einen Punkt mit seinem entsprechenden Punkte und mit den Ecken des Fundamentaldreiecks, so bilden diese Verbindungslinien ein constantes Doppelverhältniss.

Wir können beweisen, dass das letztere Doppelverhältniss gleich demjenigen ist, von welchem Satz I spricht. Sei nämlich eine beliebige Gerade g gegeben, so lässt sich diese als Verbindungslinie eines entsprechenden Punktepaares PP' auffassen. Wir erhalten dieses Punktepaar, indem wir g sowohl zu dem einen als andern Systeme rechnen und zu g die entsprechenden Geraden zeichnen. Sie schneiden g in P und P'. Nun bildet P mit den Punkten, in welchen g die Dreieckseiten abc schneidet, dasselbe Doppelverhältniss, wie g mit den Strahlen, welche aus P nach den Ecken ABC gehen.* Das erste dieser Doppelverhältnisse tritt in Satz I, das zweite in Satz II auf. Mithin sind diese Doppelverhältnisse einander gleich.

Die bewiesenen Sätze gelten auch dann und haben einen bestimmt definirten Sinn, wenn zwei Ecken des Fundamentaldreiecks conjugirt imaginäre Punkte auf einer reellen Seite sind.

2. Geben wir das Fundamentaldreieck von 2 collinearen Ebenen und 2 Doppelverhältnisse Δ, Δ', so sind die collinearen Ebenen bestimmt. Wir

* Vergl. in meiner Abhandlung: Ueber eine ebene Reciprocität etc. im XXXI. Bande dieser Zeitschrift p. 147 den Satz I.

finden zu einer Geraden g die entsprechende g', indem wir zu den Schnittpunkten $G_a\,G_b\,G_c$ von g und $a\,b$ c einen Punkt G construiren, für den $(G_a\,G_b\,G_c\,G) = \varDelta$. Hierauf verbinden wir G mit $A\,B\,C$ und bestimmen zu diesen Verbindungslinien $g_A\,g_B\,g_C$ eine Linie g', für welche $(g_A\,g_B\,g_C\,g') = \varDelta'$. Sie entspricht g. Um zu einem Punkte P den entsprechenden P' zu bestimmen, ziehen wir $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ oder $p_a\,p_b\,p_c$ und zeichnen eine Gerade p nach der Bedingung $(p_a\,p_b\,p_c\,p) = \varDelta$. Auf dieser Geraden construiren wir zu den Schnittpunkten $P_a\,P_b\,P_c$ mit $a\,b\,c$ einen Punkt P' für den $(P_a P_b P_c P') = \varDelta$. Er entspricht P. Machen wir jetzt die Voraussetzung, dass $\varDelta = \varDelta'$, so muss g mit g', P mit P' zusammenfallen. Aber der Schnittpunkt von $G g'$ ist ein ausgezeichneter Punkt auf g. Durch PP' geht eine ausgezeichnete Gerade, welche die 2 zusammenfallenden Punkte PP' verbindet. Wir gelangen auf diesem Wege von der Collineation zu einer speciellen Reciprocität.*

Dr. BEYEL.

IV. Ueber die Grössenfolge einer Reihe von Mittelwerthen.

Nachdem erst vor Kurzem der bekannte Satz, dass das arithmetische Mittel aus n verschiedenen positiven Grössen grösser ist als das geometrische, durch Hurwitz einen neuen Beweis erfahren hat,** möge es gestattet sein, auf einen viel weniger bekannten, allgemeineren Satz hinzuweisen.

Derselbe ist xwar schon vor geraumer Zeit, als von Fort herrührend, durch Schlömilch publicirt,*** an eben jener Stelle aber auch der Wunsch ausgesprochen, der Satz möge einen seinem Wesen mehr entsprechenden Beweis erhalten.

Gegeben seien n positive Grössen, von denen zwei variabel gedachte mit x_1 und x_2 bezeichnet werden.

Es bedeute

(m) die Summe der als Producte aufgefassten Combinationen (ohne Wiederholung) der n Grössen zur m^{ten} Classe,

$(m)_{12}$ eine analoge Summe, bezüglich auf die nach Weglassung von x_1, x_2 übrig bleibenden $n-2$ Elemente.

Dann ist offenbar:

---

* Im XXXI. Bande dieser Zeitschrift p. 147 behandelte ich diese Reciprocität. Noch sei bemerkt, dass die Beziehungen, welche dort zwischen Curven entwickelt werden, mit solchen identisch sind, welche Dr. Steiner in seiner Dissertation über Curven vom Geschlechte Null (Zürich 1890) ableitet. Die im Vorstehenden bewiesenen 2 Sätze vermitteln diese Identität.

** „Ueber den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels". Journal f. r. und ang. Math. Bd. 108, S. 266.

*** „Ueber Mittelgrössen verschiedener Ordnungen" in dieser Zeitschrift Bd. 3, S. 301 und ff. am Schluss.

$$1)\qquad (m) = (m-2)_{12}\, x_1 x_2 + (m-1)_{12}\,(x_1+x_2) + (m)_{12}$$

$$2)\qquad (m+1) = (m-1)_{12}\, x_1 x_2 + (m)_{12}\,(x_1+x_2) + (m+1)_{12}\,.$$

Der Abkürzung wegen sei

$$(m) - (m)_{12} = C,$$

$$(m+1) - (m+1)_{12} = V.$$

Hierbei ist bemerkenswerth, dass

$$(m-1)^2_{12} > (m-2)_{12}\,(m)_{12}$$

überhaupt

$$3)\qquad (m-1)^2 > (m-2)\,(m)$$

ist. Siehe hierüber den Schluss der Note.

Nun sei, unter Constanthalten der $n-2$ übrigen Grössen, die Variabilität der positiven Grössen x_1, x_2 dadurch beschränkt, dass (m), somit auch C constant gehalten wird.

Es gilt dann:

4) V ist um so grösser, je kleiner $(x_1-x_2)^2$ ist.

Denn es folgt aus 1) und 2):

$$5)\qquad V = \frac{(m)_{12}}{(m-1)_{12}}\,C + \frac{(m-1)^2_{12} - (m)_{12}\,(m-2)_{12}}{(m-1)_{12}}\,.\,x_1 x_2,$$

$$6)\qquad V = \frac{(m-1)_{12}}{(m-2)_{12}}\,C - \frac{(m-1)^2_{12} - (m)_{12}\,(m-2)_{12}}{(m-1)_{12}}\,(x_1+x_2)\,.$$

Da die sämmtlichen Brüche rechts von den Gleichheitszeichen positiven Werth haben (s. 3), wächst V, wenn x_1+x_2 abnimmt, und wenn $x_1 x_2$ wächst. Wenn aber ein die Gleichungen 5) und 6) befriedigendes Werthsystem x'_1, x'_2 derart ist, dass

$$7)\qquad x'_1 + x'_2 < x_1 + x_2,$$

$$8)\qquad x'_1\, x'_2 > x_1\, x_2$$

folgt durch Quadriren von 7) und Subtrahiren der mit 4 multiplicirten Ungleichung 8)

$$9)\qquad (x'_1 - x'_2)^2 < (x_1 - x_2)^2$$

und die Richtigkeit der Behauptung 4) ist erwiesen.

Im Folgenden seien die n positiven Grössen, so lange nichts Besonderes von ihnen gilt, mit a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ bezeichnet, und

$$(m) = f_m\,(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n)$$

gesetzt.

In einer Gleichung:

$$10)\qquad f_m\,(M_m\, M_m \ldots M_m;\; a_{n+1}\, a_{n+2} \ldots a_n) = f_m\,(M_m\, M_m \ldots M_m)$$

seien von den Argumenten links vom Gleichheitszeichen die n ersten — aber keine weitern — rechts vom Gleichheitszeichen alle Argumente gleich einer positiven Grösse M_m geworden.

Dann lässt sich folgern, dass die Grössen a_{n+1}, $a_{n+2} \ldots a_n$ nicht sämmtlich grösser und auch nicht sämmtlich kleiner als M_m sein können. Man wird daher unter ihnen stets zwei, seien es etwa a_{n+1} und a_{n+2}, ausfindig machen können, welche der Bedingung genügen

$$11) \qquad a_{n+1} > M_m > a_{n+2}.$$

Man mache nun, unter Aufrechterhaltung von 10), a_{n+1} und a_{n+2} variabel, resp. gleich x_{n+1} und x_{n+2}, und lasse $x_{n+1} = M_m$ werden, wodurch x_{n+2} auf einen bestimmten positiven Werth a'_{n+2} geschoben wird. Dann muss, bei der durchaus positiven Natur der Function f, weil $x_{n+1} = M_m$ zwischen a_{n+1} und a_{n+2} fällt, dies auch für $x_{n+2} = a'_{n+2}$ der Fall sein:

$$12) \qquad a_{n+1} > a'_{n+2} > a_{n+2}$$

und es folgt aus 11) und 12):

$$13) \qquad (a_{n+1} - a_{n+2})^2 > (M_m - a'_{n+2})^2$$

und weiter mittels 4):

$$14) \qquad \begin{aligned} & f_{m+1}(M_m\, M_m \ldots M_m;\; a_{n+1}\, a_{n+2} \ldots a_n) \\ & < f_{m+1}(M_m\, M_m \ldots M_m\, M_m;\; a'_{n+2} \ldots a_n). \end{aligned}$$

Diese Entwicklungen lassen erkennen:

Wenn wir unter M_m die stets vorhandene positive Wurzel der Gleichung

$$fm\,(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n) = f_m\,(M_m\, M_m\, M_m \ldots M_m),$$

wo rechts sämmtliche Argumente gleich sind, verstehen, und eine passende Vertheilung der Indices bei den a vorgenommen denken, so lässt sich unter Constanthalten von f_m durch eine Reihe von successiven Verwandlungen zweier a_i die Folge von Ungleichungen bewirken:

$$15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_{m+1}(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n) < f_{m+1}(M_m\, a'_2\, a_3\, a_4 \ldots a_n) \\ f_{m+1}(M_m\, a'_2\, a_3 \ldots a_n) < f_{m+1}(M_m\, M_m\, a'_3\, a_4 \ldots a_n) \\ f_{m+1}\, M_m\, M_m\, a'_3 \ldots a_n) < f_{m+1}(M_m\, M_m\, M_m\, a'_4\, a_5 \ldots a_n) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_{m+1}(M_m\, M_m \ldots M_m\, a'_{n-1}\, a_n) < f_{m+1}(M_m\, M_m \ldots M_m\, M_m), \end{array} \right.$$

woraus sich ergiebt:

$$16) \qquad f_{m+1}(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n) < f_{m+1}(M_m\, M_m\, M_m \ldots M_m)$$

eine Ungleichung, welche gilt, so lange nicht sämmtliche a_i gleich sind.

Bestimmen wir nun eine Grösse M_{m+1} aus

$$f_{m+1}(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n) = f_{m+1}(M_{m+1}\, M_{m+1} \ldots M_{m+1}),$$

wo rechts alle Argumente gleich sind, so folgt mittels 16):

$$f_{m+1}(M_m\, M_m \ldots M_m) > f_{m+1}(M_{m+1}\, M_{m+1} \ldots M_{m+1})$$

und bei der positiven Natur der Functionen f und ihrer Argumente die Ungleichung

$$M_m > M_{m+1}$$

ausführlicher geschrieben die Reihe von Ungleichungen:

$$M_1 > M_2 > M_3 > M_4 \ldots > M_n;$$

in Worten:

Die Mittelwerthe aus n von einander verschiedenen positiven Grössen, berechnet mittels der fundamentalen symmetrischen Functionen $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$, bilden eine fallende Reihe.

Ausführlicher würde M_ν folgendermassen zu schreiben sein:

$$M_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{f_\nu\,(a_1\,a_2\ldots a_n)}{\binom{n}{\nu}}}.$$

Dies ist der versprochene Satz.

Der Beweis von 3) kann auf verschiedene Weise geliefert werden. Man vergleiche z. B. Nouv. Annal. (2) 3. Bd. 1864 S. 37, wo ein Beweis gegeben wird, dass

$$17)\qquad sig\,(a^2{}_{\nu+1} - a_\nu\,a_{\nu+2}) = sig\,(a^2{}_{\nu+2} - a_{\nu+1}\,a_{\nu+3})$$

ist. Hier bedeutet sig das Vorzeichen des dahinter stehenden Klammerausdrucks (Kronecker), die a sind Coefficienten einer Gleichung

$$a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2\,x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

mit lauter reellen Wurzeln α, welche bis auf für 17) irrelevante Vorzeichen und etwa einen constanten Factor mit unseren f übereinstimmen. Da wir a mit negativem Index gleich Null setzen dürfen, so wird für $\nu = -1$ (die Gleichung 17) zu

$$sig\,(a_0{}^2) = sig\,(a_1{}^2 - a_0\,a_2),$$

was sich auch leicht unabhängig beweisen lässt, und sämmtliche Ausdrücke ergeben sich als positiv. q. e. d.

Man vergl. übrigens meinen in einem der nächsten Hefte dieser Zeitschr. erscheinenden Aufsatz „über gewisse orthosymmetrische Determinanten".

Hermann Brunn.

V. Kriterien der Theilbarkeit der Zahlen.

Zur Ergänzung der im vierten Hefte dieses Jahrganges von Herrn Dietrichkeit gegebenen Regel lässt sich folgender Satz aufstellen, der für alle Zahlensysteme gilt, die dem decadischen analog gebildet sind.

Um die Theilbarkeit der Zahl Z durch n zu untersuchen, multiplicire man die p letzten Ziffern von Z mit der für jedes n besonders zu bestimmenden Zahl v und addire das Product zu der Zahl, welche von den jenen p Ziffern vorangehenden Ziffern gebildet wird. Ist diese Summe durch n theilbar, so ist auch Z durch n theilbar.

Die Zahl v wird in folgender Weise bestimmt: Man suche ein Vielfaches von n, dessen letzte p Ziffern jede einzeln um 1 kleiner sind als die Basis des betreffenden Systems (für das decadische System also 9). Streicht man von diesem Vielfachen diese p Ziffern ab und erhöht die verbleibende Zahl um 1, so erhält man v.

Beispiel für das decadische System.

Es soll mit Rücksicht auf das zweistellige Ende untersucht werden, ob 9503 durch 13 theilbar sei. Nun ist 299 durch 13 theilbar. Streicht man die beiden Nenner und addirt 1 zum Rest, so erhält man $v = 3$.

Nun ist $95 + 3.3 = 104$ durch 13 theilbar, also auch 9503 durch 13 theilbar.

Beispiel für das Neunersystem.

Es soll mit Berücksichtigung des dreistelligen Endes untersucht werden, ob

$$\mathrm{IX}\,(110002) = 65612 \text{ (decadisch)}$$

durch 47 theilbar sei.

Es ist IX (1888) = 4373 (decadisch) durch 47 theilbar; mithin $v = 2$. Ferner

$$\mathrm{IX}\,(110) + 2.2 = 94 \text{ durch 47 theilbar.}$$

Mithin auch

$$\mathrm{IX}\,(110002) = 65612$$

durch 47 theilbar

Allgemein lässt sich die Sache in folgender Weise geben:

Es sei

$$Z = a . \mathsf{B}^p + \varrho,$$

worin B die Basis des Systems, a die den letzten p Ziffern vorausgehende Zahl und ϱ die durch die letzten p Ziffern dargestellte Zahl bedeutet. Statt des obigen Ausdrucks kann man schreiben

$$Z = \mathsf{B}^p\,(a \mp b\varrho) \pm (b\,\mathsf{B}^p \pm 1)\,\varrho.$$

Ist nun $b\,\mathsf{B}^p + 1$, resp. $b\,\mathsf{B}^p - 1$ durch eine Zahl n (die nicht in B enthalten) theilbar, so handelt es sich bei der Bestimmung der Theilbarkeit von Z durch n nur darum, ob $a - b\varrho$, resp. $a + b\varrho$ durch n theilbar ist.

Im ersten Falle resultirt die von Herrn Dietrichkeit aufgestellte Regel, im zweiten Falle die im Eingange besprochene Regel.

Wien. Dr. Karl Haas.

VI. Berichtigung.

In Folgendem erlaube ich mir, auf ein Versehen aufmerksam zu machen, das sich in dem Aufsatze des Herrn Rieke, im 4. Hefte dieser Zeitschrift, S. 249—254 vorfindet. Der Verfasser sucht die Unmöglichkeit der Auflösung der Fermat'schen Gleichung, $x^p + y^p = z^p$, in ganzen Zahlen zu beweisen. Im Laufe seiner Untersuchung findet er für $p = 3$, Seite 253, die Gleichung:

$$\left(\frac{z}{a}\right)^2 + A . \frac{z}{a} + \frac{A^2}{3} = \left(\frac{z}{a} + k_1\right)\left(\frac{z}{a} + 3g\right).$$

Hier betrachtet er nun z als unabhängige Veränderliche, während es doch eine ganze Zahl von ganz bestimmter Beschaffenheit bedeuten soll; zudem folgt die Unmöglichkeit einer derartigen Zerlegung für ein variables z schon daraus, dass die Discriminante der linken Seite der Gleichung negativ ist $\left(= -\frac{A^2}{3}\right)$. — In Wirklichkeit ergiebt sich aus obiger Gleichung nur:

$$\frac{z}{a} = \frac{3\,k_1\,g - \frac{1}{3}\,A^2}{A - k_1 - 3g},$$

womit wohl nicht viel anzufangen ist. — Derselbe Einwand gilt auch für den allgemeinen Fall, und es ist somit die Unauflösbarkeit der Fermat-schen Gleichung erst noch zu beweisen.

Göppingen. Reallehrer Schumacher.

V.

Jacob Steiner's Sätze über den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte einer Geraden und einer algebraischen Curve.

Von

Benedikt Sporer.

---

1. Irgend eine Gerade S hat mit einer Curve n^{ten} Grades C^n n Punkte a gemein, welche reell oder imaginär sein können. Immer aber wird ein solcher Punkt A vorhanden sein, den wir als Schwerpunkt dieser n Schnitte a mit der Basis ansehen können. Diesen Punkt A werden wir kurz als „Schwerpunkt der Geraden S" bezeichnen. Dies vorausgesetzt, möge folgender Satz als erwiesen angesehen werden:

Wird eine Transversale S parallel mit sich selbst fortbewegt, so beschreibt ihr Schwerpunkt A (d. h. der Schwerpunkt ihrer veränderlichen n Schnitte a) irgend eine bestimmte Gerade D, nämlich den der Richtung der Geraden S conjugirten Durchmesser der Basis C^n, oder aber auch die zu dem unendlich fernen Punkt auf S gehörige Polargerade. Das so erhaltene System Durchmesser ist zudem so beschaffen, dass es nur abhängig ist von der Lage der Asymptoten der Basis, jede Gerade hat mit der Basis n Punkte a und mit den Asymptoten n Punkte b gemein, und die n Punkte a haben allemal denselben Punkt A zum Schwerpunkt wie die Punkte b.

Daran anschliessend erhalten wir:

Giebt man der Transversale S nach und nach alle Richtungen, so entstehen alle Durchmesser D der Basis, wozu insbesondere auch ihre n Asymptoten A_s gehören, und zwar als diejenigen eigenthümlichen Durchmesser, welche ihrer eigenen Richtung conjugirt sind; daher liegt der Schwerpunkt A jeder Transversale S, die einer Asymptoten A_s parallel ist, in dem unendlich entfernten Punkt der letzteren; der Schwerpunkt der unendlich fernen Geraden G_∞, diese als Transversale S angesehen, ist unbestimmt, er liegt in jedem Durchmesser, also nach jeder Richtung hin (574.)*

---

* Die in Klammern beigefügten Zahlen verweisen auf J. Steiner's ges. Werke, Bd. 2.

2. Wie wir bereits früher gezeigt haben,* ist die Polarenveloppe aller Polargeraden für Pole einer Geraden G eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe und $2(n-2)^{\text{ten}}$ Grades. (497.) Wir erhalten daraus:

Alle Durchmesser einer Basis C^n berühren insgesammt eine bestimmte Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe D^{n-1} und $2(n-2)^{\text{ten}}$ Grades $\mathfrak{D}^{2n-4}$.

Um einen solchen Durchmesser zu bestimmen, haben wir nur durch einen Punkt eine solche Gerade zu ziehen, welche in diesem Punkt ihren Schwerpunkt in Bezug auf die Basis hat; der Schwerpunkt einer 2ten zur erstern parallelen Geraden giebt alsdann einen 2ten Punkt des Durchmessers. Wählen wir den Punkt auf einer Asymptote A_s der Basis selbst, so genügt es, wenn wir eine Gerade bestimmen, deren Schnitte mit den übrigen $(n-1)$ Asymptoten ihren Schwerpunkt in dem gewählten Punkt haben. Die Anzahl derselben ist $(n-2)$, indem ein Durchmesser selbst auf A_s fällt. Wählen wir den Punkt derart, dass er auf der Asymptote A_s so gelegen ist, dass er Schwerpunkt der Schnitte derselben mit den anderen Asymptoten ist, so fällt ein 2ter Durchmesser durch diesen Punkt auf A_s; oder:

Jede A_s berührt die Curve D^{n-1} in demjenigen Punkte, etwa a_0, welcher der Schwerpunkt ihrer $(n-1)$ Schnitte mit den anderen Asymptoten ist. Demnach gehen durch jeden Punkt im Allgemeinen $(n-1)$ Durchmesser D der Basis, oder jeder Punkt P ist Schwerpunkt von $(n-1)$ durch ihn gehenden Transversalen S, welche nämlich jenen Durchmessern beziehlich conjugiert sind; liegt der Punkt P insbesondere in einer A_s, so ist diese selbst einer der $(n-1)$ Durchmesser und so fällt die ihr conjugirte Transversale S auf sie, und da diese Transversale mit den übrigen wie zuvor ihren Schwerpunkt in P haben muss, so kann also jeder Punkt P in der Asymptote A_s als Schwerpunkt einer auf ihr liegenden Transversale S angesehen werden (575.)

Weiter finden wir:

Wird P in den unendlich fernen Punkt a_∞ der A_s verlegt, so sind die übrigen durch ihn gehenden $(n-2)$ Durchmesser alle mit A_s parallel, die ihnen conjugirten Transversalen fallen alle auf G_∞ und die der A_s conjugirte liegt auf dieser wie zuvor; liegt endlich P in beliebiger Richtung auf G_∞, so sind ebenso alle $(n-1)$ Durchmesser nach dieser Richtung parallel und die ihnen conjugirten Transversalen fallen alle auf G_∞ (575.)

3. Bezeichnen wir ferner mit x die Anzahl Doppeltangenten der Curve D^{n-1}, so erhalten wir mittelst der Plücker'schen Gleichungen:

---

* Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik Bd. 35, p. 306.

$$(n-1)\ (n-2)-2x=2(n-2),$$

oder:

$$x=\tfrac{1}{2}(n-2)\ (n-3);$$

Die Curve D^{n-1} hat $\frac{1}{2}(n-2)\ (n-3)$ Doppeltangenten. (575.)*

4. Die Basis ist im Allgemeinen von der $n(n-1)^{\text{ten}}$ Classe, hat somit mit der Curve $D^{(n-1)}$ auch $n(n-1)^2$ Tangenten gemein. Unter denselben sind aber die n Asymptoten mit inbegriffen. Ziehen wir diese von denselben ab, so bleiben noch deren $n^2(n-2)$ Durchmesser D_0 übrig, welche die Basis in $n^2(n-2)$ Punkten d_0 berühren.

Ortscurven, welche mit dem Schwerpunkt A einer Transversale zusammenhängen.

I.

Ort des Schwerpunkts für Transversalen durch einen festen Pol P.

a) Durch jeden Punkt P gehen $(n-1)$ Durchmesser der Basis C^n und also auch $(n-1)$ solche Transversalen der Basis, die in ihm ihren Schwerpunkt haben. In irgend einer Geraden durch den Pol P liegt ferner nur noch ein von dem Pol P verschiedener Punkt A, der Schwerpunkt dieser Geraden selbst. Drehen wir die Gerade um den Pol P, so wird auf jeder Geraden ein von P verschiedener Punkt A zu liegen kommen und A wird $(n-1)$mal auf P selbst fallen, nämlich für jede der $(n-1)$ Transversalen der Basis, die ihren Schwerpunkt in P haben; oder:

Wird eine beliebige Transversale S um einen in ihr liegenden Pol P herumgedreht, so beschreibt ihr Schwerpunkt A eine Curve n^{ten} Grades A^n, mit P als $(n-1)$-fachen Punkt. (575.)

b) Der $(n-1)$-fache Punkt P gilt so viel als $\frac{1}{2}(n-1)\ (n-2)$ Doppelpunkte, d. h. er vermindert die Classe der Curve A^n um den Werth $(n-1)\ (n-2)$, oder:

Die Curve A^n ist von der $2(n-1)^{\text{ten}}$ Classe. (575.)

c) Um die Tangenten im vielfachen Punkte P zu bestimmen, hat man nur diejenigen Geraden S zu suchen, die P zum Schwerpunkt haben; d. h. wir haben weiter:

Die Curve A^n hat in P diejenigen Geraden zu Tangenten, welche den Pol P zum Schwerpunkt haben. (575.)

d) Eine Gerade durch P, welche irgend einer Asymptote parallel ist, hat mit der Basis $(n-1)$ im Endlichen gelegenen Punkte und einen Punkt auf G_∞ gemein.

Bestimmen wir für die erstern $(n-1)$ Punkte den Schwerpunkt, so wird die Verbindungslinie von diesem Punkt mit dem unendlich fernen Punkt auf der Asymptote durch den Schwerpunkt aller Schnitte im Ver-

* Hier steht in den ges. Werken Steiner's der Werth $\frac{1}{2}(n-1)\ (n-2)$. Dieser Werth ist unrichtig, wie schon aus dem Fall $n=3$ folgt, indem die dazu gehörige Curve D^{n-1} ein Kegelschnitt ist und also keine Doppeltangente haben kann.

hältniss von $1:(n-1)$ getheilt, oder die Asymptoten der Curve A^n sind den Asymptoten der Basis parallel und ihre Abstände von P verhalten sich zu denen der Asymptoten der Basis wie $1:n$, oder:

Die Asymptoten $\mathfrak{A}_s$ der Ortscurve A^n sind denen der Basis parallel, und zwar sind die beiden vollständigen n-Seite, $n\mathfrak{A}_s$ und nA_s einander ähnlich und ähnlich liegend, haben den Pol P zum Aehnlichkeitspunkt und ihre homologen Dimensionen verhalten sich wie $1:n$ (575.)

e) Da die Ortscurve A^n mit der Basis parallele Asymptoten hat, so liegen die übrigen Schnitte derselben mit der Basis auf einer Curve $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, d. h. wir erhalten:

Durch jeden Pol P gehen $n(n-1)$ solche Transversalen $S_1 (=S)$, welche ihren Schwerpunkt A_1 in der Basis selbst haben, und zwar sind die zugehörigen $n(n-1)$ Punkte A_1 die Schnitte der Basis mit einer Curve $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (576.)

f) Fällt der Pol P in die Basis, so folgt ferner:

Liegt der Pol in der Basis selbst, so wird diese in dem Punkte P von der Ortscurve $(n-1)$punktig berührt, die Berührung wird n-punktig, wenn eine jener $(n-1)$ Transversalen, die P zum Schwerpunkt haben, zur Tangente der Basis in diesem Punkte wird, was jedoch nur für eine bestimmte Anzahl Punkte P der Fall sein kann.*

II.

Das System Curven $S(A^n)$ für Pole P einer Geraden.

a) Liegt der Schwerpunkt A einer Transversale S_g auf einer Geraden G, so bestimmt die zu irgend einem Pol P gehörige Ortscurve A^n auf der Geraden G n Punkte solcher Transversalen S_g, die alle durch P gehen. Daraus erhalten wir:

Der Ort aller Transversalen S_g, deren Schwerpunkt in einer Geraden G liegt, ist eine Curve n^{ter} Classe $S_g{}^n$. (578.)

Jeder Punkt einer Asymptote kann, wie wir sahen, als Schwerpunkt derselben angesehen werden; die Asymptoten sind also ebenfalls Tangenten der Ortscurve $S_g{}^n$. (578.) Aber auch die Gerade G selbst ist eine solche Tangente; denn durch jeden Punkt von G gehen, ausser G, nur noch $(n-1)$ Transversalen S_g hindurch; fällt der Punkt in den Schwerpunkt A_g von G, so fällt eine der S_g auf G selbst, und zwar ist dieser Punkt der Berührungspunkt von G mit $S_g{}^n$. (578.)

Alle Geraden S_g sind ferner so beschaffen, dass keine zwei derselben parallel sind. Soll eine Gerade S_g eine gegebene Richtung haben, so bestimmt

* Die Anzahl dieser Punkte ist, wie wir weiter unten sehen werden, $n(n-1)^2$; und zwar setzt sich diese Zahl zusammen aus den n unendlich fernen Punkten der Basis und aus $n^2(n-2)$ Punkten a_2 im Endlichen.

der dieser Richtung conjugirte Durchmesser auf G ihren Schwerpunkt A. Dies klärt sich dadurch auf, dass die unendlich ferne Gerade G_∞ mehrfache Tangente des Ortes ist, und zwar $(n-1)$-fache. Ausser dieser mehrfachen Tangente kann die Ortscurve keine weitere vielfache Tangente haben, d. h. der Grad der Ortscurve ist $= n(n-1) - (n-1)\ (n-2) = 2(n-1)$. (578.)

b) Durch jeden Punkt P gehen n Gerade S_g. Liegt der Pol P auf dem Orte $S_g{}^n$, so gehen nur noch $(n-1)$ Geraden S_g durch diesen Punkt, indem 2 Gerade S_g in eine sich vereinigen, oder die zu einem solchen Pol P gehörige Curve A^n berührt die Gerade G, d. h. wir erhalten:

Soll eine Curve A^n eine Gerade G berühren, so ist der Ort des Pols P derselben die obige Curve $S_g{}^n$.

Und hieraus:

Bewegt sich der Pol P in irgend einer Geraden G, so bilden die ihm in Bezug auf die Basis C^n in obigem Sinne entsprechenden Curven A^n ein solches Curvensystem, $S(A^n)$ dass je $(n-1)$ derselben durch einen Punkt gehen und je $2\ (n-1)$ derselben irgend eine Gerade berühren.

c) Durch jeden Punkt Q auf einer Geraden H gehen je $(n-1)$ obiger Ortscurven A^n, deren Pole auf G gelegen sind. Ziehen wir an jede dieser Curven in Q die Tangente QR, so gehen durch jeden Punkt Q je $(n-1)$ Tangenten QR, die von G verschieden sind. Die Tangente QR kann aber auch mit der Geraden H zusammenfallen, und zwar ist für jede der Curven des Systems dies der Fall, die H berührt; QR fällt demnach $2\ (n-1)$ mal mit H zusammen. Der Ort der Geraden QR ist also eine Curve der $3(n-1)^{\text{ten}}$ Classe, $H^{3(n-1)}_{2(n-1)}$*, die H zur $2(n-1)$-fachen Tangente hat. Durch jeden Punkt Q von H gehen $3\ (n-1)$ Gerade QR, von denen jedoch $2\ (n-1)$ mit H zusammenfallen.

Die Curven eines Büschels $B(C^q)$ durch q^2 Grundpunkte sind ferner so beschaffen, dass je eine durch einen Punkt geht und je $(2q-2)$ eine Gerade berühren. Ziehen wir in jedem Punkt Q einer Geraden H an die durch Q gehende Curve C^q des Büschels eine Tangente, so gehen durch Q, $(2q-1)$ solche Tangenten, von denen jedoch $(2q-2)$ mit H zusammenfallen. Jeder Curve C^q, welche H berührt, entspricht nämlich eine solche auf H fallende Tangente. Der Ort dieser Tangente ist somit eine Curve der $(2q-1)^{\text{ten}}$ Classe, H^{2q-1}_{2q-2} mit H als $(2q-2)$-facher Tangente.

Die beiden Ortscurven $H^{3(n-1)}_{2(n-1)}$ und H^{2q-1}_{2q-2} haben ausser der Geraden H noch:
$$3(n-1)\,(2q-1) - 4(n-1)\,(q-1) = (n-1)\,(2q+1)$$
Tangenten gemein. Jeder solchen gemeinsamen Tangente entspricht auf H ein solcher Punkt Q_0, in dem eine Curve des Systems $S(A^n)$ eine Curve des Büschels $B(C^q)$ berührt, d. h. wir erhalten den Satz:

---

* Der Index $2(n-1)$ bedeutet hier, dass bei der Curve die Gerade H $2(n-1)$-fache Tangente ist.

Soll eine Curve des Systems $S(A^n)$ eine Curve eines Büschels $B(C^q)$ berühren, so sind auf jeder Geraden H $(n-1)(2q+1)$ solche Punkte gelegen, oder der Ort des Berührungspunktes ist eine Curve $(n-1)(2q+1)^{\text{ten}}$ Grades $R_{(n-1)}^{(n-1)(2q+1)}$, mit den Grundpunkten des Büschels als $(n-1)$-fachen Punkten.

Durch jeden Grundpunkt des Büschels gehen $(n-1)$ Curven A^n und jede dieser Curven wird von einer Curve des Büschels $B(C^q)$ berührt.

Ausser den q^2 Grundpunkten hat jede Curve des Büschels $B(C^q)$ mit der Ortscurve $R_{(n-1)}^{(n-1)(2q+1)}$ noch

$$(n-1)(2q+1)q - q^2(n-1) = q(q+1)(n-1)$$

Punkte gemein, oder:

Das ganze System Curven $S(A^n)$ für Pole P auf einer Geraden G ist so beschaffen, dass jede Curve C^q von je $q(q+1)(n-1)$ Curven A^n berührt wird. (577.)

III.

Ueber die Enveloppe der Curvenschaar $S(A^n)$.

a) Liegt ein Pol P auf der Einhüllenden D^{n-1} aller Durchmesser der Basis, so fallen 2 der durch P gehenden Durchmesser in einen zusammen. Ganz dasselbe ist der Fall für 2 durch P gehende Transversalen, die P zum Schwerpunkt haben. Ist etwa $\mathfrak{S}(=S)$ eine solche Gerade durch P_1, deren Richtung dem Durchmesser D conjugirt ist, der die Ortscurve D^{n-1} in P berührt, so ist das ganze System dieser Geraden $\mathfrak{S}$ so beschaffen, dass keine 2 derselben parallel sind. Liegt P insbesondere auf G_∞, so fällt auch $\mathfrak{S}$ mit G_∞ zusammen. Da die Curve D^{n-1} vom Grade $(2n-4)$ ist, so ist letzteres $(2n-4)$mal der Fall, d. h. die unendlich ferne Gerade ist $(2n-4)$-fache Tangente des Orts der Geraden $\mathfrak{S}$ und der Ort derselben ist von der Classe $(2n-4+1)=(2n-3)$. Ausser der unendlich fernen Geraden besitzt die Curve keine mehrfache Tangente, der Grad der Ortscurve der $\mathfrak{S}$ ist also:

$$(2n-3)(2n-4)-(2n-4)(2n-5) = 4(n-2),$$

oder wir haben:

Wird durch denjenigen Punkt a_0, in welchem jeder Durchmesser D die Enveloppe D^{n-1} berührt, die dem Durchmesser conjugirte Transversale $\mathfrak{S}(=S)$ gezogen, so ist der Ort derselben eine Curve $(2n-3)^{\text{ter}}$ Classe, $\mathfrak{S}^{2n-3}$, und $4(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, welcher die Gerade G_∞ zur $(2n-4)$-fachen Tangente hat und namentlich auch die Asymptoten der Basis berührt. (581.)

Letzteres ist deswegen der Fall, weil die Asymptoten die ihrer eigenen Richtung conjugirten Durchmesser der Basis sind.

b) Durch jeden Pol P auf D^{n-1} gehen noch $(n-3)$ andere Transversalen $\mathfrak{S}_0$, welche P zum Schwerpunkt haben, und da weiter jeder Durchmesser ausser seinem Berührungspunkte mit der Curve D^{n-1} noch $2(n-3)$ Punkte gemein hat, so sind diese Transversalen $\mathfrak{S}_0$ auch zu je $2(n-3)$ parallel. Ein solches System paralleler Sehnen gehört einem Durchmesser derart an, dass sie alle auf ihm ihren Schwerpunkt haben, also ihm conjugirt sind und dass durch jeden Schnittpunkt von ihm mit der Curve D^{n-1}, ausser dem Berührungspunkt, je eine solche Sehne geht. Für jeden Pol P auf G_∞ fallen ferner alle durch ihn gehenden Sehnen $\mathfrak{S}_0$ auf G_∞ selbst, und da es auf G_∞ $(2n-4)$ solche Pole giebt, fallen also auf G_∞ auch $(2n-4)(n-3)$ Transversalen $\mathfrak{S}_0$. Der Ort der Transversalen $\mathfrak{S}_0$ ist demnach eine Curve der

$$2(2n-3)+(2n-4)(n-3)=2(n-1)(n-3)^{\text{ten}} \text{ Classe,}$$

$\mathfrak{S}_0^{2(n-1)(n-3)}$, mit G_∞ als $(2n-4)(n-3)$-facher Tangente.

c) Durch jeden Punkt der Ebene gehen somit je $(2n-3)$ Gerade $\mathfrak{S}$ und $2(n-1)(n-3)$ Gerade $\mathfrak{S}_0$. Jede zu irgend einem Pol A gehörige Curve A^n hat demnach auch $(2n-3)$ Punkte a und $2(n-1)(n-3)$ Punkte a_0 mit der Curve D^{n-1} gemein, und zwar sind die Punkte a, welche zu den Transversalen $\mathfrak{S}$ gehören, Berührungspunkte beider Curven, und die Punkte a_0, welche zu den Geraden $\mathfrak{S}_0$ gehören, Schnittpunkte beider Curven, womit die volle Anzahl Punkte beider Curven

$$2(2n-3)+2(n-1)(n-3)=2n(n-2)$$

bestimmt ist. Dies giebt:

J e d e C u r v e A^n b e r ü h r t d i e E n v e l o p p e d e r D u r c h m e s s e r i n $(2n-3)$ P u n k t e n u n d s c h n e i d e t s i e i n $2(n-1)(n-3)$ P u n k t e n (577), u n d d i e C u r v e D^{n-1} i s t a u c h d i e E n v e l o p p e a l l e r C u r v e n A^n.

d) Liegt ein Pol P auf der obigen Curve $\mathfrak{S}^{2n-3}$ selbst, so gehen von ihm nur $(2n-4)$ Transversalen aus, indem zwei in eine, die Tangente der Ortscurve $\mathfrak{S}^{2n-3}$ vereinigt sind. Die zu P gehörige Curve A^n wird die Curve D^{n-1} nun auch nur noch in $(2n-4)$ Punkten berühren, aber in einem Punkte, auf dem Berührungspunkte des der Tangente in P an $\mathfrak{S}^{2n-3}$ conjugirten Durchmessers, vier Punkte mit D^{n-1} gemein haben. Jede Gerade G hat aber mit der Ortscurve $\mathfrak{S}^{2n-3}$ $4(n-2)$ Punkte gemein, d. h. wir erhalten:

B e w e g t s i c h d e r P o l a u f e i n e r G e r a d e n G, s o g i e b t e s a u f d e m s e l b e n j e $4(n-2)$ P u n k t e P, d e r e n z u g e h ö r i g e n C u r v e n A^n d i e C u r v e D^{n-1} i n e i n e m P u n k t e a v i e r p u n k t i g b e r ü h r e n. (577.)

IV.

Das Curvensystem $S(A^n)$ für Pole auf einer Curve C^m.

a) Bewegt sich eine Transversale S so, dass ihr Schwerpunkt A in Bezug auf eine Basis C^n sich stets in einer Curve C^m befindet, so folgt

aus den gemeinsamen Punkten der Curve A^n eines Pols P und der gegebenen Curve C^m, dass durch jeden Pol P je $m.n$ Transversalen S gehen, deren Schwerpunkte A auf C^m gelegen sind; oder:

Soll der Schwerpunkt A der Transversale S in irgend einer gegebenen Curve m^{ten} Grades, C^m, gelegen sein, so ist der Ort der Transversale S eine Curve $m.n^{\text{ter}}$ Classe, $S^{m \cdot n}$. (518.)

Für jeden Schnittpunkt der Curve C^m mit einer Asymptote der Basis C^n fällt eine der Transversalen mit der Asymptote zusammen. Da letztere mit C^m m Punkte gemein hat, so ist sie also m-fache Tangente. Für jeden Punkt der Basis auf G_∞ fallen ebenso sämmtliche $(n-1)$ Transversalen S, die in ihm ihren Schwerpunkt A in Bezug auf die Basis haben, auf G_∞. Auf letzterer sind demnach $m(n-1)$ solche Transversalen S gelegen, oder wir haben:

Die Ortscurve $S^{m \cdot n}$ hat die Asymptoten der Basis zu m-fachen und die unendlich ferne Gerade zu $m(n-1)$-fachen Tangenten, und der Grad der Curve ist also $= m(m+1)(n-1)$. (578.)

Da die Gerade G_∞ $m(n-1)$-fache Tangente ist, so sind von den im Endlichen gelegenen Tangenten je m parallel, nämlich diejenigen Transversalen S, deren Schwerpunkte auf einem Durchmesser D und zwar in dessen Schnitten mit der Curve C^m gelegen sind.

b) Die Ortscurve $S^{m \cdot n}$ hat mit irgend einer Geraden G $m(m+1)$ $(n-1)$ Punkte P_0 gemein. Zu jedem solchen Punkt P_0 auf der Ortscurve gehört aber eine Curve A^n, welche C^m berührt, indem für jeden solchen Pol zwei durch ihn gehende Transversalen S und damit auch 2 gemeinsame Punkte von A^n und C^m zusammenfallen. Ersetzen wir m durch q, so erhalten wir wieder wie bereits oben, dass die Schaar Curven A^n für Pole P_0 auf einer Geraden G so beschaffen ist, dass deren je $q(q+1)(n-1)$ eine Curve C^q berühren.

c) Liegt ein Pol P auf der Curve C^m, so geht die zu ihm gehörige Curve A^n in Bezug auf die Basis durch n feste Punkte auf G_∞, nämlich die unendlich fernen Punkte von C^n. (577.) Ziehen wir durch irgend einen Punkt Q eine Gerade, die in ihm ihren Schwerpunkt hat, so gehen weiter alle Curven A^n für Pole auf dieser Geraden durch Q. Jedem Schnittpunkt derselben mit der Curve C^m entspricht also eine Curve A^n, die durch Q geht. Da ferner durch Q $(n-1)$ Transversalen S gehen, deren Schwerpunkte in Q liegen, so liegen auf der Basis auch $m(n-1)$ Pole, deren zugehörige Curven A^n durch einen Punkt Q gehen, oder das ganze System Curven A^n für Pole P auf C^m ist so beschaffen, dass deren je $m(n-1)$ durch einen Punkt Q gehen. (577.)

Für jeden Pol P auf einer Asymptote der Basis hat die Curve A^n diese Asymptote ebenfalls zur Asymptote, oder die Curve A^n berührt für jeden Pol P auf einer Asymptote die Basis in dem unendlich fernen Punkt

dieser Asymptote. Fällt der Pol auf die Basis selbst, so kann man sagen, die Curve A^n habe mit der Basis eine $(n-1)$punktige Berührung in diesem Punkte. Wir haben somit:

Die Basis C^n wird in jedem der n Punkte a_∞ der Basis von m Curven A^n einfach und in ihren $m.n$ Schnitten mit der Curve C^m von je einer $(n-1)$-punktig berührt. (577.)

d) Die Curve C^m hat ferner mit der Ortscurve $S_g{}^n$ $2m(n-1)$ Punkte gemein; hieraus folgt, dass je $2m(n-1)$ der Curven A^n für Pole auf C^m irgend eine Gerade G berühren. Lassen wir wieder einen Punkt Q auf der Geraden G fortgleiten und ziehen an jede der $m(n-1)$ durch ihn gehende Curven A^n des Systems eine Tangente, QR, so gehen durch jeden Punkt Q auf G $m(n-1)$ solche Gerade QR, aber die Gerade QR wird auch $2m(n-1)$mal mit G zusammenfallen, und zwar für jede Curve A^n, die G berührt, einmal. Der Ort der Geraden QR wird demnach eine Curve der Classe $2m(n-1)+m(n-1)=3m(n-1)$, $Q^{3m(n-1)}_{2m(n-1)}$ sein, und sie wird G zur $2m(n-1)$-fachen Tangente haben. Ziehen wir ebenso an jede Curve C^q eines Büschels $B(C^q)$ durch q^2 Grundpunkte in jedem Schnitt derselben eine Tangente QT, so ist der Ort dieser Tangente eine Curve der $(2q-1)^{\text{ten}}$ Classe, Q^{2q-1}_{2q-2}, mit G als $(2q-2)$-facher Tangente. Die beiden Curven $Q^{3m(n-1)}_{2m(n-1)}$ und Q^{2q-1}_{2q-2} haben ausser der Geraden G noch

$$3m(n-1)(2q-1)-2m(n-1)(2q-2)=m(n-1)(2q+1)$$

weitere Tangenten gemein. Soll also eine Curve A^n des Systems eine Curve C^q eines Büschels berühren, so sind auf irgend einer Geraden G $m(n-1)(2q+1)$ Berührungspunkte Q solcher 2 Curven gelegen, oder der Ort dieses Berührungspunktes ist eine Curve $m(n-1)(2q+1)^{\text{ten}}$ Grades, $Q^{m(n-1)(2q+1)}_{m(n-1)}$, die die Grundpunkte des Büschels zu $m(n-1)$-fachen Punkten hat, indem durch jeden dieser Grundpunkte $m(n-1)$ Curven A^n gehen und jede dieser von einer Curve des Büschels in diesem Punkt berührt wird.

Ausser den Grundpunkten hat die Curve $Q^{m(n-1)(2q+1)}_{m(n-1)}$ mit einer einzelnen Curve des Büschels noch

$$qm(n-1)(2q+1)-q^2.m(n-1)=qm(n-1)(q+1)$$

Punkte gemein; oder:

Irgend eine Curve C^q wird im Allgemeinen von $qm(n-1)(q+1)$ Curven des Systems $S(A^n)$ berührt. (577.)

e) Aus der Anzahl gemeinsamer Punkte der Curve $\mathfrak{S}^{2n-3}$ und der Curve C^m folgt weiter, dass:

auf C^m $4m(n-2)$ solche Pole P_0 gelegen sind, für welche die zugehörige Curve A^n die Curve D^{n-1} vierpunktig berührt. (577.)

V.

Ueber den Ort des Schwerpunkts der Tangenten einer algebraischen Curve m^{ten} Classe C^m.

Die obige Ortscurve $S_g{}^n$ hat mit irgend einer Curve m^{ter} Classe $m.n$ Tangenten gemein. Auf jeder Geraden G liegen also auch $m.n$ solche Punkte, die Schwerpunkte von Tangenten der C^m sind; oder wir erhalten:

Soll die durch die Basis C^n gezogene Transversale S eine Curve m^{ter} Classe C^m berühren, so ist der Ort ihres Schwerpunkts eine Curve des $m.n^{\text{ten}}$ Grades $Sm.n.$ (578.)

VI.

Ueber Transversalen S_1, deren Schwerpunkte in der Basis gelegen sind.

a) Durch jeden Pol gehen $n(n-1)$ solche Sehnen S_1, deren Schwerpunkte in der Basis selbst gelegen sind; oder:

Der Ort der Transversalen S_1, deren Schwerpunkt A_1 in der Basis selbst gelegen ist, ist eine Curve der $n(n-1)^{\text{ten}}$ Classe $S_1{}^{n(n-1)}$. (578.)

Für jeden Pol P, der auf der Basis und einer ihrer Asymptoten zugleich angenommen wird, fällt eine der Geraden S_1 auf die Asymptote, und für jeden unendlich fernen Punkt der Basis fällt eine S_1 auf die Asymptote, die andern $(n-2)$ dagegen fallen auf G_∞. Jede Asymptote ist demnach $(n-1)$-fache Tangente und die Gerade G_∞ $n(n-2)$-fache Tangente. Die im Endlichen gelegenen Tangenten des Orts sind zu n und n parallel und zwar sind deren n Schwerpunkte allemal die Punkte, welche ein Durchmesser D mit der Basis gemein hat. Wir erhalten also:

Die Curve $S_1{}^{n(n-1)}$ hat die Gerade G_∞ zur $n(n-2)$-fachen und die Asymptoten der Basis $(n-1)$-fachen Tangenten und sie ist demnach vom $n(n^2-3)^{\text{ten}}$ Grade. (578.)

b) Irgend einem Pol P der Ortscurve $S_1{}^{n(n-1)}$ entspricht eine solche Curve A^n, welche die Basis in irgend einem Punkte berührt, indem für diesen Fall 2 Gerade S_1 in eine vereinigt sind. Mit irgend einer Curve m^{ten} Grades hat die Ortscurve $m.n.(n^2-3)$ Punkte gemein; oder:

Das ganze System Curven $S(A^n)$ für Pole P auf einer Curve C^m ist so beschaffen, dass $m.n(n^2-3)$ derselben die Basis berühren. (577.)

c) Bilden wir in Bezug auf einen Pol Q und alle Curven eines Büschels die Polargeraden, so gehen alle durch einen bestimmten Punkt R, und speciell:

Alle Durchmesser, die einer gegebenen Richtung in Bezug auf alle einzelnen Curven eines Büschels conjugirt sind, gehen durch einen Punkt R.

Die Gerade QR hat ferner die Eigenschaft, dass sie auch Polargerade ist, und zwar für die Curve des Büschels, welche durch Q geht; QR muss somit die Curve nothwendig berühren, d. h. wir haben:

Ziehen wir durch den Punkt R nach der gegebenen Richtung eine Gerade RQ, so ist die Gerade Asymptote einer einzelnen Curve des Büschels; und

Jede Curve eines Büschels schneidet eine Asymptote einer einzelnen Curve desselben Büschels in solchen n Schnittpunkten a, dass deren Schwerpunkt bei allen Curven derselbe ist, oder die Gerade QR hat in Bezug auf alle Curven des Büschels denselben Schwerpunkt R.

Wir sahen ferner oben, dass der Ort der Tangente einer algebraischen Curve, eines Büschels $B(C^n)$, wenn der Berührungspunkt auf einer Geraden G gelegen ist, eine Curve der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Classe mit G als $(2n-2)$-facher Tangente ist. Dies giebt:

Der Ort aller Asymptoten einzelner Curven eines Büschels ist eine Curve der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Classe mit der unendlich fernen Geraden als $(2n-2)$-fachen Tangente.

Bilden wir weiter in Bezug auf einen Pol P und jede einzelne Curve des Büschels $B(C^n)$ die Ortscurven A^n, so gehen alle durch $(2n-1)$ Punkte R, die auf den $(2n-1)$ durch P gehenden Asymptoten einzelner Curven des Büschels gelegen sind. Ausser diesen Punkten R haben alle Curven A^n noch den Pol P zum $(n-1)$-fachen Punkt, also in $P(n-1)^2$ Punkte gemein. Die Anzahl ihrer gemeinschaftlich festen Punkte ist also: $(n-1)^2+2n-1=n^2$, d. h.:

Das System Curven A^n eines Pols P für alle einzelnen Curven eines Büschels ist selbst wieder ein Büschel.

Ziehen wir durch P irgend eine Gerade, so geht durch jeden Punkt von ihr, der nicht mit einem der obigen Punkte R oder mit P selbst zusammenfällt, eine einzige Curve A^n; oder:

Jeder Punkt einer Geraden G ist Schwerpunkt derselben in Bezug auf eine einzige Curve des Büschels.

Eine Curve des Büschels $B(C^n)$ bestimmt auf einer Geraden H n Punkte b und auf einer Geraden G einen Schwerpunkt A. Durch jeden Punkt A auf G gehen n Gerade Ab und Ab fällt auch einmal mit G zusammen, für die Curve nämlich, die durch den Schnittpunkt von G und H geht. Durch jeden Punkt b auf H geht dagegen nur eine einzige von H verschiedene Gerade bA, und bA fällt $n$mal mit H zusammen, für die Curve nämlich, für die der Schnitt von H und G Schwerpunkt der Geraden G ist; d. h. wir erhalten:

Der Ort der Geraden Ab ist eine Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Classe G^{n+1}, mit G als einfacher und H als n-facher Tangente.

Irgend eine Curve C^n eines Büschels bestimmt auf der Geraden H n Punkte b und auf der Geraden G n Punkte c. Durch jeden Punkt auf G oder H gehen n Gerade bc, die von G oder H verschieden sind; es fallen aber auch $(n-1)$ Gerade bc auf G und ebenso viele auf H, und zwar für die Kurve des Büschels, die durch den Schnittpunkt von G und H geht. Daraus schliessen wir:

Der Ort der Geraden bc ist eine Curve $(2n-1^{\text{ter}})$ Classe $G^{2n-1}_{(n-1)}$ mit G und H als $(n-1)$-fachen Tangenten.

Die beiden Curven G^{2n-1}_{n-1} und $G_1{}^{n+1}$ haben $(2n-1)(n+1) = 2n^2+n-1$ Tangenten gemein. Diese setzen sich zusammen aus:

α) $1.(n-1) = (n-1)$ Tangenten, die auf G,

β) $(n-1)n = n^2-n$ Tangenten, die auf H fallen,

γ) n Tangenten, die parallel der Geraden G sind, also derjenigen Curve des Büschels zugeordnet sind, welche durch den unendlich fernen Punkt von G geht und

δ) n^2 weiteren Tangenten, die sich in n Gruppen zu je n anordnen, die allemal von einem Punkt A_0 auf G ausgehen, und jeder dieser Punkte A_0 hat ferner die Eigenschaft, dass er der Schwerpunkt der Geraden G in Bezug auf die durch ihn gehende Curve des Büschels ist. Oder:

Unter den Curven eines Büschels giebt es stets n solche, bei denen der Schwerpunkt einer Geraden G in Bezug auf jede dieser Curven in einen der Schnitte von G mit der Curve fällt.

Ziehen wir durch jeden Punkt M der Geraden G diejenigen $(n-1)$ Transversalen MN, deren Schwerpunkte in Bezug auf die durch M gehende Curve in M fallen, so gehen durch jeden Punkt von G $(n-1)$ solche Transversalen MN, die nicht mit G zusammenfallen, aber die Gerade MN wird, wie wir eben sahen, auch $n$mal auf G zu liegen kommen. Der Ort der Transversale MN wird somit eine Curve der $(n+n-1) = (2n-1)^{\text{ten}}$ Classe $G_n{}^{2n-1}$ mit G als n-facher Tangente sein. Ziehen wir in jedem Punkt von G an die durch den Punkt gehende Curve des Büschels eine Tangente, so ist der Ort dieser Tangente eine schon oft genannte Curve $(2n-1)^{\text{ter}}$ Classe G^{2n-1}_{2n-2} mit G als $(2n-2)$-facher Tangente. Beide Curven G^{2n-1}_{2n-2} und G^{2n-1}_n haben ausser G noch

$$(2n-1)^2 - n(2n-2) = 2n^2 - 2n + 1$$

Tangenten gemein. Unter letzteren ist aber die Asymptote der durch den unendlich fernen Punkt von G gehenden Curve des Büschels in diesem Punkte inbegriffen. Ziehen wir diese ab, so bleiben noch $2n^2-2n = 2n(n-1)$ weitere solche Tangenten übrig, für welche der Schwerpunkt in Bezug eine einzelne Curve des Büschels zugleich zum Berührungspunkt geworden ist, und auf G liegt, oder:

Soll der Berührungspunkt M einer Tangente einer Curve eines Büschels Schwerpunkt der Tangente in Bezug auf diese Curve sein, so ist der Ort des Berührungspunktes eine Curve $2n(-1)^{\text{ten}}$ Grades $M^{2n(n-1)}$.

Wählen wir die Gerade G durch einen der Grundpunkte des Büschels, so werden eine gewisse Anzahl der Punkte des Orts $M^{2n(n-1)}$ in diesem Grundpunkt vereinigt sein. Um diese Anzahl zu finden, haben wir nur zu berücksichtigen, dass der Grundpunkt selbst als Curve 1ter Classe den Ortscurven G_n^{2n-1} und G_{2n-2}^{2n-1} angehört. Sehen wir von denselben ab, so gehen beide Curven in die Ortscurven G_{n-1}^{2n-2} und G_{2n-3}^{2n-2} über, die von der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Classe sind und die Gerade G nur noch zur $(n-1)$-fachen, resp. zur $(2n-3)$-fachen Tangente haben. Beide haben ausser der Geraden G noch

$$(2n-2)^2-(2n-3)(n-1)=2n^2-3n+1$$

Tangenten gemein. Ziehen wir davon noch die zu G parallele Asymptote der Curve des Büschels durch den unendlich fernen Punkt von G ab, so bleiben uns noch $2n^2-3n$ Punkte des Orts $M^{2n(n-1)}$ auf G, die mit G nicht zusammenfallen; in dem Grundpunkte des Büschels sind somit n Punkte des Orts vereinigt, oder:

Die Ortscurve $M^{2n(n-1)}$ hat die Grundpunkte des Büschels zu n-fachen Punkten.

Ausser den Grundpunkten hat die Curve $M^{2n(n-1)}$ mit einer einzelnen Curve des Büschels noch:

$$2n^2.(n-1)-n^3=n^3-2n^2=n^2(n-2)$$

Punkte gemein, woraus wieder folgt:

Die Curve $S_1^{n(n-1)}$ berührt die Basis in $n^2(n-2)$ Punkten. (579.)

d) Die Curve $S_1^{n(n-1)}$ hat mit der Basis noch $n(n-1)n.(n-1)$ Tangenten gemein. Hierbei sind die Asymptoten der Basis je n-fach zählend inbegriffen; es bleiben also ausser den Asymptoten noch deren $n^3(n-2)$ übrig. Ziehen wir hiervon für obige $n^2(n-2)$ Berührungspunkte beider Curven $2n^2(n-2)$ ab, so bleiben noch deren

$$n^3(n-2)-2n^2(n-2)=n^2(n-2)^2$$

übrig. Jeder dieser Tangenten entspricht ein Schwerpunkt, der auf der Basis C^n liegt, aber nicht in ihren Berührungspunkt mit derselben fällt, sondern in einen ihrer Schnitte, d. h. wir haben:

Es giebt $n^2(n-2)$ Tangenten der Basis, deren Berührungspunkt a_2 ihr Schwerpunkt ist, und es giebt $n^2(n-2)^2$ solche Tangenten, deren Schwerpunkt a_1 ein anderer Schnittpunkt a_1 der Tangente und der Basis ist. (580.)

Hiermit haben wir die von Jacob Steiner als wahrscheinlich bezeichneten Werthe für die Anzahl der Punkte a_2 und a_1 als richtig befunden.

Die weiteren von Steiner hier und bei einigen der oben behandelten Fragen gegebenen Eigenschaften der auftretenden Curven übergehen wir, weil deren Ableitung keine Schwierigkeit bietet.

VII.

Ueber den Schwerpunkt der Tangenten einer Curve.

Die oben erwähnte Curve S_g^n hat mit der Basis C^n im Ganzen $n^2(n-1)$ Tangenten gemein. Davon gehen für die Asymptoten n ab und es bleiben noch deren $n^2(n-1)-n=n(n^2-n-1)$ andere übrig. Auf jeder Geraden G sind also auch $n(n^2-n-1)$ Punkte A_0 gelegen, die Schwerpunkte von Tangenten der Basis sind. Daraus folgt:

Der Ort des Schwerpunkts A_0 aller Tangenten S_0 der Basis C^n, dieselben als Transversalen angesehen, ist eine Curve $n(n^2-n-1)^{\text{ten}}$ Grades, $A_0^{n(n^2-n-1)}$ u. s. w. (589.)

VIII.

Ueber den Ort des Schwerpunkts der Durchmesser einer Basis C^n.

Die Ortscurve S_g^n hat mit der Curve D^{n-1} auch $n.(n-1)$ Tangenten gemein. Beide Curven berühren zudem die Asymptoten. Ziehen wir hierfür n Werthe ab, so bleiben noch $n(n-2)$ weitere Tangenten übrig, denen Punkte A_d auf G entsprechen, die Schwerpunkte einzelner Durchmesser der Basis sind; oder:

Der Ort des Schwerpunkts aller Durchmesser D der Basis C^n ist eine Curve des $n(n-2)^{\text{ten}}$ Grades. (581.)

Hiermit haben wir alle Sätze von Jacob Steiner in § 25 seiner Abhandlung: „Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren. (Ges. Werke, Bd. 2, p. 501—596)“ bewiesen.

Stuttgart, im Juni 1891.

VI.

Ueber eine Methode zur Aufstellung eines „vollständigen" Systems blosser Invarianten beliebig vieler quadratischen Formen jeder Stufe.

Von

JOHANN KLEIBER,

Assistent d. Kgl. Techn. Hochschule in München.

Die Behandlung des Problems, die rational unabhängigen Invarianten (im gewöhnlichen Sinne zu verstehen) von beliebig vielen quadratischen Formen beliebig hoher Stufe anzugeben, kann füglich in der Art und Weise, wie sie im Nachfolgenden skizzirt ist, als eine canonische betrachtet werden, deren Wirkungskreis allerdings nicht über die quadratischen Formen hinauszureichen scheint. Thatsächlich involvirt diese Methode nichts anderes, als eine schärfere Pointirung eines von Herrn Gordan bei Gelegenheit der Ableitung des „vollen" Formensystems zweier quadratischen ternären Formen ausgesprochenen Gedankens,* der aber dort wegen Kürze der Behandlung etwas zurücktritt.

Wenn wir hier Gelegenheit nehmen, den Gedanken an dem oben genannten einfachsten Probleme zur Anwendung zu bringen, so möge dies als eine vorbereitende Mittheilung angesehen werden, um die Methode zu kennzeichnen, welche in einem demnächst mitzutheilenden Aufsatz über „ein vollständiges Formensystem (115 Formen) zweier quaternären quadratischen Formen" einen ausgedehnteren Gebrauch erfahren wird.

Am letzteren Probleme sowohl, wie an dem hier sogleich zu verfolgenden, kann man so recht die grosse Einfachheit und Eleganz des anzuwendenden Verfahrens darthun, da die Fragen auch anderweitig bereits eine Bearbeitung, wenn auch nur eine unvollständige, nach anderen Gesichtspunkten ausgeführte, erfahren haben.**

---

* Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesung über Geometrie, p. 288.

** Mertens: Ueber die Invarianten dreier ternärer quadratischer Formen. Sitzgsber. der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Wien 14. T. 86.

Mertens: Invariante Gebilde quaternärer Formen. Daselbst 23. V. 89 etc.

§ 1.

Formulirung des Gordan'schen Gedankens.

1. Darstellung einer quadratischen Form in einem Gebiete von n Dimensionen. Seien die Punktcoordinaten des Gebiets mit x bezeichnet, so existiren ausser diesen Punktcoordinaten noch folgende andere Arten (Linien-, Ebenen-, Raum- etc.) Coordinaten:

$$x_{12}\ x_{123}\ x_{1234}\cdots x_{123\cdots n},$$

wobei z. B. unter x_{1234} die Coordinaten jener Gebilde zu verstehen sind, die durch 4 Punkte x bestimmt sind u. s. f.

Die Hauptdarstellung der quadratischen Form sei (nach Aronhold) $f=a_x^2$; dann existiren für diese Form noch Darstellungen in den Zwischencoordinaten, wie wir die $x_{ih\ldots}$ interimsweise bezeichnen wollen. Diese sind nach dem von Clebsch begründeten Uebertragungsprincipe folgende:

$$(a_{12}\,x_{12})^2,\ (a_{123}\,x_{123})^2,\ (a_{1234}\,x_{1234})^2\cdots(a_{123\cdots}\ x_{123\cdots n})^2,$$

wobei z. B. unter $(a_{123}\,x_{123})^2$ zu verstehen ist: $(abc x_{123})^2$ und im Allgemeinen statt $a_{123\cdots k}$ der Ausdruck $[abc\ldots]$ von k gleichwerthigen Symbolen einer Form $a_x{}^n$.

In der Ebene existiren so für den Kegelschnitt die Bezeichnungen $a_x{}^2$, $(a_{12}\,x_{12})^2\equiv(abu)^2$, im Raume für die Fläche 2ter Ordnung ax^2, $(a_{12}\,x_{12})^2\equiv(abp)^2$; $(a_{123}\,x_{123})^2=(abcu)^2$; wie bereits bekannt.

Anmerkung. Dass die Coordinaten $x_{12\ldots}$ im Allgemeinen nicht unabhängig sind, ist aus den Untersuchungen von Clebsch bekannt; die ihnen zugeordneten Relationen werden aber die von uns zu lösende Aufgabe nicht berühren.

2. Der Gordan'sche Satz für die Symbole $a_{123\cdots k}$ des ternären Gebiets.* Diese Symbole sind hier a und $a_{12}\equiv(ab)$. Kommen nun in irgend einem Ausdruck (Invariante) I von realer Bedeutung bei dessen Schreibweise in Symbolen $a=b=c=\ldots$ der quadratischen Form $f=ax^2$ zwei der Symbole a, b in demselben Klammerfactor — wir sagen: partiell gefaltet — vor, so kann man den Ausdruck I, wenn nöthig, so umformen, dass die Symbole a, b total gefaltet auftreten, d. h. da a zweimal, b zweimal in der symbolischen Schreibform der Invariante I vorkommen muss, dass a und b nur in der Verbindung $(ab\ldots)$ vorkommen. Demnach kann man für sie das Zeichen a_{12} von $(a_{12}x_{12})^2=(a_{12}u)^2=(\alpha u)^2$ einführen.

Aus diesen Bemerkungen ist zu schliessen, dass man jede Invariante von f (zusammen mit anderen Grundformen φ) immer so umzugestalten vermag, dass einfache Symbole a, b nie mehr in partieller Faltung, sondern discret auftreten.

---

* Clebsch-Lindemann, Geometrie. Bd. I, p. 288.

Was aber von den a gilt, gilt in gleicher Weise von den a_{12}., d. h. jeder Ausdruck, der die Symbole a_{12}, b_{12} partiell gefaltet aufweist, kann in einen andern umgeformt werden, der diese Symbole in totaler Faltung enthält. Man könnte also statt des total gefalteten Paares $(a_{12} b_{12} \ldots)$ wieder ein neues Symbol einführen. Dies ist aber unnöthig, da das gefaltete Symbol $(a_{12} b_{12} \ldots)$ auf das ursprüngliche a zurückführt, bis auf ein anzufügendes Vielfaches des Ausdrucks $(abc)^2$, der nichts anderes ist als die Discriminante der Form $f = a_x^2$, die wir als a_{123}^2 einführen wollen.

Resultat. Jeder invariante Ausdruck, der die Symbole der Form $f \equiv a_x^2 \equiv (a_{12} u)^2$ enthält, kann durch einen andern ersetzt werden, in dem zwei gleichartige Symbole a, bez. a_{12} nie in partieller Faltung auftreten. Sind aber a und a_{12} selbst partiell gefaltet, so spaltet sich der reale Factor $\overline{a a}_{12}{}^2 = a_{123}{}^2$ ab. — Dies ist der Gordan'sche Gedanke.

§ 2

Erweiterung auf beliebige Dimensionen.

Es kann hier in genau derselben Art und Weise, wie dies von Herrn Gordan für das ternäre Gebiet geschieht, Folgendes nachgewiesen werden:

Treten in einem Klammerfactor des Gebietes n^{ter} Dimension ϱ Symbole der Art $a_{12\ldots k}$ partiell gefaltet und coordinirt auf (welch' letztere Eigenschaft mit der Faltung im Folgenden inbegriffen sein soll), so kann man den zugehörigen invarianten Ausdruck auch so umgestalten, dass die ϱ Symbole total gefaltet erscheinen. Diese ϱ gliedrige Gruppe von Symbolen kann man, abgesehen von einem als Factor vor die Invariante tretenden Vielfachen der Discriminante $a^2_{123\ldots n\,\overline{n+1}}$, durch ein einziges Symbol der Reihe:

$$a, \quad a_{12}, \quad a_{123}, \quad \ldots a_{123\ldots n}$$

ersetzen, nämlich durch $a_{123\ldots[\varrho k]}$, wobei als die letzte Ziffer $[\varrho k]$ des Index nicht das wirkliche Product ϱk, sondern nur diese Zahl $\bmod n$ zu nehmen ist. Der Exponent der vor die Invariante tretenden Discriminante $a^2_{123\ldots n\,\overline{n+1}}$ ist dann:

$$\varepsilon = \frac{\varrho . k - [\varrho k]}{n+1},$$

wobei $[\varrho k]$ die eben angegebene Bedeutung hat.

Analoges gilt für coordinirt partiell gefaltete Symbole $a_{12\ldots k}$ mit verschiedener Endziffer.

§ 3.

Nachweis eines Hauptsatzes.

Wenn schon bereits die vorangegangenen Sätze ein mächtiges Hilfsmittel zur Ausgestaltung des Formensystems der quadratischen Formen sind, so wird der Nachweis für die Endlichkeit des „vollen" Formensystems doch erst durch einen weiteren Satz dargethan, der als Pendant

zum vorhergehenden aufzufassen ist. Er ist es, welcher uns das Mittel in die Hand geben wird, unsere Invarianten der quadratischen Form in eine canonische Symbolschreibung bringen zu können. Bevor wir auf den Satz näher eingehen, treffen wir folgende Festsetzung: Wir legen jedem Symbole $a_{123\ldots k}$ ein Hilfsgewicht

$$\pi = 1 + 2 + 3 + \ldots k = \binom{k+1}{2}$$

bei und erklären als Hilfsgewicht einer Invariante die Summe der Hilfsgewichte der darin auftretenden Symbole. Wir erkennen, dass alle Umformungen, welche durch die oben auseinandergesetzte Gordan'sche Regel benöthigt werden, solche sind, welche das Hilfsgewicht der ursprünglichen Form der Invariante erhöhen. Das Hilfsgewicht ist also nur an die Form der Invariante gebunden, somit nichts Wesentliches, wohl aber als Gradmesser der geleisteten Umformungsarbeit sehr brauchbar. Dass thatsächlich immer eine Erhöhung des Hilfsgewichts statthat, wenn man oben umformen kann, ist aus der Giltigkeit der Gleichung:

$$k.\binom{\varrho+1}{2} < \binom{n+2}{2}.(\varrho.k - [\varrho k]) + \binom{[\varrho k]+1}{2}$$

für alle Grössenverhältnisse von ϱ und $[\varrho k]$ zu ersehen.

Aus der Definition des Hilfsgewichts kann man auch erkennen, dass dann und nur dann eine Erhöhung desselben zu erreichen ist, wenn Symbolgruppen noch nicht total gefaltet in einem Ausdrucke auftreten. Nennen wir einen solchen Ausdruck, je nachdem in ihm „blos partiell“ gefaltete Symbolgruppen auftreten, oder lauter „total gefaltete“: normalisirbar bez. normalisirt, so schliesst diese Bezeichnung also auch die Constatirung der Möglichkeit in sich, das zugehörige Hilfsgewicht zu erhöhen oder nicht.

Nach diesen Vorbereitungen in der Bezeichnungsweise können wir nun unsern Hauptsatz so aussprechen:

> „Treten in einem normalisirten Ausdruck zwei (discrete, d. h. nicht im selben Klammerfactor befindliche) Symbole gleicher Art auf: $a_{12\ldots k}$, $b_{123\ldots k}$, so kann man dieselben „partiell“ austauschen (d. h. eines der zwei Einzelzeichen $a_{12\ldots k}$ mit irgend einem Einzelzeichen der $b_{12\ldots k}$ — gleichzeitige Vertauschung aller wäre ja ohnehin schon erlaubt) unter Adjunction von höher normalisirbaren Termen.“

In der That ergiebt sich durch einfache Ueberlegung eine Formel:

$$M(a_{12\ldots k}\, x_{12\ldots k})(b_{12\ldots k}\, y_{12\ldots k})$$
$$= M(b_{12\ldots k}\, x_{12\ldots k})(a_{12\ldots k}\, y_{12\ldots k}) + M(\overbrace{a_{12\ldots k},\, b_{12\ldots k}};\, \overbrace{x_{12\ldots k},\, y_{12\ldots k}}),$$

worin der letzte Term thatsächlich unter das Gordan'sche Gesetz fällt. Da, wie ersichtlich, keines der alten Symbole „aufgelöst“ zu werden

braucht, so wird sich natürlich bei Ausführung der Normalisirung des Termes das Hilfsgewicht erhöhen müssen.

§ 4.

Folgerungen.

Die Wirkungsfähigkeit des oben angeführten Satzes äussert sich erst, wenn wir unserer näheren Betrachtung das Formensystem von quadratischen Formen zu Grunde legen. Zu dem Ende seien die Symbole der benutzten uadratischen Formen:

$$\begin{array}{llll} a, & a_{12}, & a_{123}, & \ldots a_{123\ldots n}, \\ a', & a'_{12}, & a'_{123}, & \ldots a'_{123\ldots n}, \\ a'', & a''_{12}, & a''_{123}, & \ldots a''_{123\ldots n}, \end{array}$$

u. s. f.

Dann können wir folgende Behauptung als richtig erweisen:

„Treten im symbolischen Ausdruck einer Invariante der obigen quadratischen Formen in zwei Klammerfactoren Gruppen von correspondirend gleichwerthigen Symbolen auf, also z. B.:

$$M.(a_{12\ldots\mu}\, a'_{12\ldots\varrho}\, a''_{12\ldots\mu}\ldots x)\ldots$$
$$\ldots(b_{12\ldots\mu}\, b'_{12\ldots\varrho}\, b''_{12\ldots\mu}\ldots y),$$

so kann man statt der Gruppe von correspondirenden Symbolen des zuletzt geschriebenen Klammerfactors eine andere substituiren, welche mit der des ersten identisch ist, also:

$$M'(a_{12\ldots k}\, a'_{12\ldots\varrho}\, a''_{12\ldots\mu}\ldots x)\ldots$$
$$\ldots(a_{12\ldots k}\, a'_{12\ldots\varrho}\, a''_{12\ldots\mu}\ldots y),$$

wenn man noch höher normalisirbare Terme adjungirt."

Es folgt dieser Satz direct aus der partiellen Vertauschungsfähigkeit von Einzelsymbolen $b_{12\ldots k}$ mit Einzelsymbolen $a_{12\ldots k}$, wie oben angegeben.

Gleichzeitig ist ersichtlich, dass sich eine solche Gruppe

$$(a_{12\ldots k}\, a'_{12\ldots\varrho}\, a''_{12\ldots\mu}\ldots)$$

„gemischter Elemente" wie ein einziges Symbol behandeln lässt.

Als Specialfall des vorhergehenden Satzes können wir den folgenden aussprechen:

„Zwei gleichgebaute Klammerfactoren mit correspondirend gleichwerthigen Symbolen und Variablen sind Anlass, dass die zugehörige Invariante in zwei Summanden sich zerlegen lässt, von denen der erste das Quadrat des Klammerfactors als selbstständige Invariante abspaltet, der zweite aber höher normalisirbar ist."

Und hieraus:

„Soll eine Invariante dem „vollen" Formensystem der quadratischen Formen angehören, so darf sie — ge-

hörig normalisirt — keine zwei Klammerfactoren von gleichem Typus aufweisen.“

Da die Möglichkeit, einen Klammerfactor mit Symbolen einer endlichen Zahl quadratischer Formen und einer Combination der Veränderlichen

$$x, \quad x_{12}, \quad x_{123}, \quad \cdots x_{12\cdots n}$$

zu besetzen, auf eine endliche Zahl von Complexionen führt, so ist hierdurch bewiesen,

„dass das „volle“ Formensystem beliebig vieler quadratischer Formen ein **endliches** sein muss.“

Die Besetzung eines Klammerfactors im ternären Gebiete kann z. B. blos von der folgenden Art sein:

$$(ax), \ (a_{12}x_{12}) \text{ u. s. f.}$$
$$(aa'x_{12}), \ (aa'_{12}), \ (a_{12}a'), \ (a_{12}a'_{12}x) \text{ u. s. f.}$$
$$(aa'a''), \ (a_{12}a_{12}a'_{12}) \text{ u. s. f.},$$

wo die durch „u. s. f.“ angedeuteten Terme durch blosse Vertauschung der Symbole von ax^2, $a'x^2$, $a''x^2 \ldots$ hervorgehen.

Dem Hinschreiben der „vollen“ Formensysteme liegt nun nichts mehr im Wege; der Satz, dass keine zwei Klammerfactoren von gleichem Typus auftreten dürfen, leistet die Hauptarbeit.

Doch werden in dem so erhaltenen Formensystem noch viele Formen enthalten sein, welche theils reductibel sind an sich, theils durch den Clebsch'schen Satz*, der besagt, dass nur eine Reihe von jeder Variablenreihe auftreten darf (es aber möglich ist, dass — formell zwar nicht — aber in der That, etwa durch „Zusammenrücken“ zweier zuerst verschiedener Variablen, der Fall sich realisirt).** Die Restarbeit wird durch Reductionsformeln zu besorgen sein, welche ich in meiner später zu veröffentlichenden Arbeit verkürzte Identitäten genannt habe.

Im ternären Gebiete giebt es blos eine solche verkürzte Identität, nämlich:

$$(aa'u)(\alpha\alpha'x) \equiv 0,\text{***}$$

wobei das „congruent Null“ besagen will: *modulo* von Termen, die direct in Factoren zerfallen oder (was im ternären Gebiete allerdings noch nicht eintritt) höher normalisirt werden können. Im quaternären Gebiete erweitert sich die Zahl der „verkürzten Identitäten“ auf 15 u. s. f.

Anmerkung. Wir wollen diese Betrachtungen nicht verlassen, ohne die Leichtigkeit zu erwähnen, mit der wir hiermit im Stande sind, das

---

* Clebsch: Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie.

** Herr Mertens vermeidet wohl absichtlich dieses „Zusammenziehen“ der Variablen. Vergl. a. a. O. p. 732. 1889.

*** Vergl. Clebsch-Lindemann a. a. O. p. 290.

Gordan'sche System von 20 Formen, das zweien quadratischen ternären Formen zugeordnet ist, anzuschreiben. Man hat:

a) die constituirenden Factorentypen:

$$a_x, \; a'_x, \; (a a' u), \; u_\alpha, \; u_\alpha, \; (\alpha \alpha' x), \; a_\alpha, \; a'_\alpha, \; a^2_{123}, \; a'^2_{123}.$$

b) Unter Berücksichtigung, dass vermöge der einzig auftretenden „verkürzten" Identität die Factorentypen $(a a' u)$ und $(\alpha \alpha' x)$ nicht in derselben Invariante auftreten dürfen:

(Quadrate): $a_x^2, a'^2_x, (a a' u)^2, u_\alpha^2, u'^2_\alpha, (\alpha \alpha' x)^2, a_\alpha^2, a'^2_\alpha, a_{123}^2, a'^2_{123}$.

(Gemischte Producte): Hier müssen die Symbole, wie leicht ersichtlich, eine „Kette" bilden und darf ein Symbol nicht mehr, denn einmal auftreten.

$(u\alpha)(\alpha a')(a'x)$

$(u\alpha)(\alpha a')(a'ua)(ax)$

$(u\alpha)(\alpha a')(a'ua)(a\alpha')(\alpha'u)$

$(u\alpha)(\alpha x\alpha')(\alpha'u)$

$(u\alpha)(\alpha x\alpha')(\alpha'a)(ax)$

$(xa)(a\alpha')(\alpha'x\alpha)(\alpha a')(a'x)$

$(xa)(aua')(a'x)$

$(u\alpha')(\alpha'a)(ax)$

$(u\alpha')(\alpha'a)(aua')(a'x)$

$(u\alpha')(\alpha'x\alpha)(\alpha a')(a'x)$

§ 5.

Ueber die „Invarianten" quadratischer Formen im Allgemeinen.

Wir wissen nun bereits, dass das „volle" Formensystem quadratischer Formen endlich ist und haben zugleich die Hilfsmittel bezeichnet, welche uns gestatten würden, ein solches hinzuschreiben. Doch ist diese Aufgabe zunächst nur ohne Mühe beim ternären Gebiete so zu lösen, dass wir ein möglichst reducirtes System erhalten. Wir wollen aber nun annehmen, es sei uns gelungen, ein von allen überflüssigen Elementen freies „vollständiges" Formensystem für N quadratische Formen im Gebiete von n Dimensionen vermöge unserer Anleitung anzugeben. Die Elemente des so erhaltenen vollen Formensystems Φ bestehen dann aus lauter normalisirten Ausdrücken, deren Anzahl z sein möge.

Betrachten wir nunmehr neben den obigen N Formen noch eine weitere, die wir $ax^2 \equiv (a_{12} x_{12})^2 \equiv (a_{123} x_{123})^2 \equiv \ldots$ bezeichnen wollen. Dann wird dem System der nunmehr $(N+1)$ quadratischen Formen eine Reihe von blossen Invarianten (d. h. ohne Variable) zukommen, deren natürlich unendlich viele sein werden. Aber aus diesen blossen Invarianten wird sich ein „volles" System φ von blossen Invarianten abspalten lassen, das selbst endlich sein wird nach unseren früheren Sätzen. Wir fragen nun, wie man dieses endliche System sofort anschreiben könne.

Die Beantwortung dieser Aufgabe ergiebt sich aus Folgendem:

Sei I eine blosse Invariante aus dem „vollen“ System φ, dann kann man sie im „vollen“ System φ beibehalten, auch wenn man die Symbole der zuletzt hinzugefügten quadratischen Form $a_x^2 = \ldots$, sofern sie nur gleichwerthige sind (also $a_{12\ldots k}$ mit $b_{12\ldots k}$ u. s. w.) in I beliebigen partiellen oder totalen Vertauschungen unterwirft. Anders ausgesprochen lautet dies so: Ersetzt man in I alle gleichwerthigen Symbole der letzten quadratischen Form immer durch eine einzige zugehörige Variable mit dem complementaren Index (also z. B. wenn $n=5$ ist, $a_{12\ldots k}$ durch $x_{12\ldots[5-k+1]}$), so entsteht eine Covariante = allgemeine Invariante (im Clebsch'schen Sinn) der ersten N quadratischen Formen. Aus dieser findet man gemäss oben beschriebener Freiheit, wieder die alte „blosse“ Invariante, indem man für die auftretenden Variablen:

$$x$$
$$x_{12}$$
$$x_{123}$$
$$\cdots$$

so lange Symbole von $a_x^2 = \ldots$ einführt (natürlich je mit complementärem Index), bis sie alle — in irgend welcher Weise — besetzt sind.

Führen wir bei allen Elementen des „vollen“ Systems φ der blossen Invarianten den Transformationsprocess durch, durch welchen wir Covariantinvarianten der N ersten quadratischen Formen erhalten, so transformirt sich also das „volle“ System φ in einen Theil des „vollen“ Systems Φ der N Formen, ev. in Produkte von Termen des letzteren.*

Dann ergiebt sich der Satz:

Es giebt so viel linearunabhängige blosse Invarianten von $N+1$ quadratischen Formen irgend einer Stufe, als Glieder im vollständigen System der Covariantinvarianten gerader Ordnung von blos N Formen derselben Stufe. Hierzu ist noch die Discriminante der letzten $= N+1^{\text{ten}}$ Form zu zählen.

Wie man aus den betreffenden Covariantinvarianten die Invarianten selbst erhält, ist oben gezeigt.

Wir wollen die diesbezüglichen Resultate an 3 ternären, bez. 3 quaternären quadratischen Formen näher bezeichnen.

§ 6.

Blosse Invarianten von 3 ternären quadratischen Formen.

Wir haben, laut der entwickelten Vorschrift, an erster Stelle aus dem „vollständigen“ Formensystem von blos 2 ternären quadratischen Formen

* Was Produkte von Termen ungerader Ordnung anbetrifft, so müssten sie den ersten Sätzen von § 4 genügen, lassen sich aber meist ohne Mühe ausscheiden.

diejenigen Covariantinvarianten herauszusuchen, welche in den auftretenden Variablen von gerader Ordnung sind. Wir haben oben das vollständige Formensystem hierfür angegeben und finden sofort:

$$(ax)^2,\ (a'x)^2,\ (aa'u)^2,\ (u\alpha)^2,\ (u\alpha')^2,\ (\alpha\alpha'x)^2$$
$$(a\alpha')^2,\ (a'\alpha)^2,\ a^2_{123},\ a'^2_{123}.$$

Statt der Variablen x ist nun überall $a''_{12} = \alpha''$, statt u die Symbole a'' zu setzen, dann folgt:

$$(a\alpha'')^2,\ (a'\alpha'')^2,\ (aa'a'')^2,\ (a''\alpha)^2,\ a''\alpha')^2,\ (\alpha\alpha'\alpha'')^2$$
$$(a\alpha')^2,\ (a'\alpha)^2,\ {a_{123}}^2,\ {a'_{123}}^2.$$

Fügt man noch die Discriminante

$${a''_{123}}^2$$

der dritten ternären Form an, so haben wir genau die 11 Invarianten vor uns, welche auch Herr Mertens a. a. O. aufgestellt hat.

§ 7.

Blosse Invarianten von 3 quaternären quadratischen Formen.

Ich entnehme die hier nöthigen Covariantinvarianten dem von mir zu veröffentlichenden „vollständigen" System zweier quaternären Formen. Diese sind:

I.

$$(ax)^2,\ (a_{12}p)^2,\ (a_{123}u)^2,\ a^2_{1234},$$
$$(a'x)^2,\ (a'_{12}p)^2,\ (a'_{123}u)^2,\ a'^2_{1234}.$$

II.

$$(aa'p)^2,\ (aa'_{12}u)^2,\ (aa'_{123})^2,$$
$$(a_{12}a'u)^2,\ (a_{12}a'_{12})^2,\ (ua_{12}\,a'_{12}x)^2,\ (a_{12}a'_{123}x)^2.$$
$$(a_{123}a')^2,\ (a_{123}a'_{12})^2,\ (a_{123},a'_{123}\cdot p)^2.$$

III.

$$(ax)\,(aa'_{12}u)\,a'_{12}a_{123}x)\,(a_{123}u)$$
$$(a'x)\,(a'a_{12}u)\,(a_{12}a'_{123}x)\,(a'_{123}u)$$
$$(a_{12}p)\,(a_{12}a'_{12})\,(a'_{12}p)$$

IV.

$$(aa'_{123})\,(a'_{123}a_{123}p)\,(a_{123}a')\,(a'ap)$$
$$(ax)\,(aa'_{12}u)\,(a'_{12}a_{12})\,(a_{12}a'u)\,(a'x)$$
$$(a_{123}u)\,(a_{123}a'_{12}x)\,(a'_{12}a_{12})\,(a_{12}a'_{123}x)\,(a'_{123}u)$$
$$(ax)\,(aa'_{123})\,(a'_{123}a_{123}p)\,(a_{123}a'_{12}x)\,(a'_{12}p)$$
$$(a'x)\,(a'a_{123})\,(a_{123}a'_{123}p)\,(a'_{123}a_{12}x)\,(a_{12}p)$$
$$(a_{123}u)\,(a_{123}a')\,(a'ap)\,(aa'_{12}u)\,(a'_{12}p)$$
$$(a'_{123}u)\,(a'_{123}a)\,(aa'p)\,(a'a_{12}u)\,(a_{12}p).$$

V.

$(ax)\,(aa'p)\,(a'a_{123})\,(a_{123}a'_{12}x)\,(a'_{12}a_{12})\,(a_{12}p)$
$(a'x)\,(a'ap)\,(aa'_{123})\,(a'_{123}a_{12}x)\,(a_{12}a'_{12})\,(a'_{12}p)$
$(a_{123}u)\,(a_{123}a'_{123}p)\,(a'_{123}a)\,(aa'_{12})\,(a'_{12}a_{12})\,(a_{12}p)$
$(a'_{123}u)\,(a'_{123}a_{123}p)\,(a_{123}a')\,(a'a_{12})\,(a_{12}a'_{12})\,(a'_{12}p)$
$(ax)\,(aa'_{123})\,(a'_{123}a_{12}x)\,(a_{12}a'u)\,(a'a_{123})\,(a_{123}u)$
$(a'x)\,(a'a_{123})\,(a_{123}a'_{12}x)\,(a'_{12}au)\,(aa'_{123})\,(a'_{123}u).$

VI.

$(ax)\,(aa'_{123})\,(a'_{123}a_{12}x)\,(a_{12}a'_{12})\,(a'_{12}a_{123}x)\,(a_{123}a')\,(a'x)$
$(a_{123}u)\,(a_{123}a')\,(a'a_{12}u)\,(a_{12}a'_{12})\,(a'_{12}au)\,(aa'_{123})\,(a'_{123}u).$

VII.

$(a_{123},\ ap,\ a'_{12})^2$
$(a'_{123},\ a'p,\ a_{12})^2.$

Setzen wir nun in den vorstehenden Ausdrücken in beliebiger Weise

$$\begin{aligned} &\text{statt } x\ldots a''_{123} = b''_{123} = \ldots \\ &\text{„} \quad p\ldots a''_{12} = b''_{12} = \ldots \\ &\text{„} \quad u\ldots a'' = b'' = \ldots \end{aligned}$$

so erhält man 38 Invarianten der 3 quaternären Formen, welche mit der Discriminante a''^2_{1234} der dritten Form zusammengenommen ein „vollständiges" System der blossen Invarianten der 3 Grundformen darbieten, deuten wir unter $[ihk]$ an, dass die zugehörige Invariante vom i^{ten} Grade in den Coefficienten der ersten Grundform, vom k^{ten} in jenen der zweiten, vom k^{ten} in jenen der dritten sei, so kommen den 39 Invarianten folgende Zahlen zu:

I.

[103], [202], [301], [400]
[013] [022] [031] [040].

II.

[112], [121], [130]
[211], [220], [224], [233]
[310], [323], [332].

III.

[424] [244[[222].

IV.

[442] [334[[554] [455] [545] [434] [344].

V.

[635] [365] [653] [563] [644] [464].

VI.

[666] [662].

VII.

[422] [242].

VIII.

$a_{1234}{}^2 = [004]$.

Wie wir ersehen, sind sämmtliche Invarianten mit verschiedenen Indices behaftet. Wir können denselben also auch die Indicesgruppe als Name beilegen und erhalten, wenn wir sie nach Permutationsformen ordnen, folgende Reihe von 39 Gebilden:

[103] [013] [202]
[031] [130] [022]
[310] [301] [220]

[112] [400] [224]
[121] [004] [242]
[211] [040] [422]

[332] [442] [554]
[323] [424] [545]
[233] [244] [455]

[222] [666]

[635] [653] [434] [644]
[365] [563] [344] [464]

[334] [662].

München, April 1891.

VII.

Die trinomische und quadrinomische Gleichung in elementarer Behandlungsweise.

Von

Dr. W. Heymann.

I. Die trinomische Gleichung.

§ 1. Einleitende Bemerkungen.

Die trinomische Gleichung hat schon mannigfache Bearbeitung gefunden, eine durchaus elementare liegt aber meines Wissens noch nicht vor.*

Um Missverständnissen zu begegnen, wollen wir gleich Anfangs feststellen, welche Anforderungen wir an eine solche elementare Behandlungsweise stellen.

Denken wir uns die trinomische Gleichung

$$y^n + ay^{n-s} + b = 0$$

vorgelegt, so fragen wir nach einem Ausdruck für y, der erstens eine bequeme Potenzirung zulässt, zweitens n-deutig ist und drittens der gegebenen Gleichung ersichtlich genügt. Genauer gesprochen, suchen wir also n Ausdrücke; dieselben werden sich jedoch von selbst unter einem gemeinsamen Typus einstellen.

Dass der gewünschte Ausdruck im Allgemeinen kein algebraisch geschlossener sein kann, ist selbstverständlich, und geschlossene transcendente Ausdrücke, wie bestimmte Integrale, elliptische Functionen u. dgl., wollen wir principiell bei Seite lassen.**

Es wird sich also unsere Betrachtung auf ein anderes Gebilde, nämlich auf eine, beziehentlich mehrere (hypergeometrische) Reihen beziehen. Eben diese Reihen sind, wie schon bemerkt, ziemlich oft aufgestellt worden, doch meist nach Methoden, welche mehr oder weniger die Differential- und Integralrechnung voraussetzen. So hat man vielfach das Theorem von Mac Laurin als Ausgangspunkt gewählt, man hat jene Reihen auch aus den

---

* Vergl. des Verfassers „Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen". Teubner 1891, S. 403. Daselbst findet man Seite 248 auch Angaben über die einschlägige Literatur.

** Ueber solche transcendente Auflösungen vergl. auch meine Arbeit „Theorie der trinomischen Gleichungen". Math. Annalen, Bd. XXVIII.

entsprechenden hypergeometrischen Differentialgleichungen abgeleitet, man hat die allgemeinen Formeln von Lagrange zu Grunde gelegt u. s. f.

Wir vermeiden alles Das und setzen, wenn auch zunächst etwas unmotivirt, eine unendliche Reihe an die Spitze unserer Untersuchung. Wird dieses nicht bemängelt, so treten einige Vortheile sogleich zu Tage, nämlich folgende:

1. Die hypothetisch aufgestellte, zuvörderst eindeutige Reihe, wird sich als potenzfähig erweisen. Das soll heissen: die in die m^{te} Potenz erhobene Reihe ist wieder eine Reihe von dem ursprünglichen Charakter, oder auch: die vorliegende (hypergeometrische) Reihe n^{ter} Ordnung giebt potenzirt gleichfalls eine solche Reihe n^{ter} Ordnung.

2. Wird die mit zwei willkürlichen Parametern ausgestattete Reihe in die trinomische Gleichung eingeführt, so lassen sich jene so bestimmen, dass die linke Seite der Gleichung identisch verschwindet.

3. Jene Parameter hängen nur von einer binomischen Gleichung ab, und sie veranlassen es, dass in die Lösung y die n^{te} Einheitswurzel eingeht. Auf solche Weise entsteht für y ein n-deutiger Ausdruck, welcher sämmtliche Wurzeln der trinomischen Gleichung zur Darstellung bringt.

4. Für die aufgestellte Reihe ergiebt sich eine gewisse einfache Convergenzbedingung. Ist letztere nicht erfüllt, so liefert eine Transformation, resp. Buchstabenvertauschung eine andere Reihe, welche gerade dann convergirt, wenn die ursprüngliche divergirt.

5. Die Ausdrücke, welche der trinomischen Gleichung genügen, führen zu einer hypothetischen Annahme über die Form der Lösungen von quadrinomischen und überhaupt vielgliedrigen Gleichungen, welche nachträglich leicht zur Gewissheit erhoben werden kann.

§ 2. Einführung einer Reihe.

Wir legen unserer Betrachtung die unendliche Reihe:

$$1)\qquad \zeta = 1 + \delta^{(1)}\frac{\xi}{1} + \delta^{(2)}\frac{\xi^2}{1.2} + \delta^{(3)}\frac{\xi^3}{1.2.3} + \dots = F(\xi)$$

zu Grunde, in welcher $\delta^{(h)}$ nachstehendes Product bedeutet:

$$2)\qquad \delta^{(h)} = \frac{m}{n}\prod_{k=1}^{h-1}\left[k + \frac{m-hs}{n}\right].$$

Da dieses Product erst mit $h=2$ in Wirksamkeit tritt, so haben wir festzustellen, was wir unter $\delta^{(0)}$ und $\delta^{(1)}$ verstehen. Es sei:

$$\delta^{(0)} = 1 \quad \text{und} \quad \delta^{(1)} = \frac{m}{n}.$$

Ueber die Zahlen m, n, s brauchen augenblicklich keine beschränkenden Voraussetzungen gemacht zu werden, nur h muss immer ganz und positiv

gedacht werden. Angenommen werde ferner, dass die Reihe wenigstens für gewisse Werthe von ξ convergirt.

Setzen wir im Product 2) $h-k$ an Stelle von k und ordnen die Factoren in umgekehrter Reihenfolge an, so ergiebt sich die mit 2) äquivalente Formel:

$$\text{2a)} \qquad \delta^{(h)} = \frac{m}{n} \prod_{k=1}^{h-1} \left[\frac{m + h(n-s)}{n} - k \right].$$

Endlich wollen wir uns gestatten, für die Reihe 1) bisweilen die naheliegende symbolische Bezeichnung

$$\zeta = e^{\delta \xi}, \quad \text{wo} \quad \delta^h = \delta^{(h)}$$

einzuführen.

§ 3. **Beweis, dass die Reihe für ζ die Eigenschaft einer Potenz besitzt.**

Indem wir jetzt besonders darauf achten, in welcher Weise ζ von m abhängt, schreiben wir $\zeta_{(m)}$ statt ζ und $\delta_{(m)}$ statt δ und beweisen, dass die Eigenschaft

$$\text{3)} \qquad \zeta_{(m)} \cdot \zeta_{(\mu)} = \zeta_{(m+\mu)}$$

vorhanden ist. Wir multipliciren zu diesem Zweck die beiden Reihen links wirklich aus und vergleichen die Coefficienten von ξ^h. Dann ergiebt sich die Bedingung:

$$\delta^{(h)}_{(m)} + \binom{h}{1} \delta^{(h-1)}_{(m)} \delta^{(1)}_{(\mu)} + \binom{h}{2} \delta^{(h-2)}_{(m)} \delta^{(2)}_{(\mu)} + \ldots + \delta^{(h)}_{(\mu)} = \delta^{(h)}_{(m+\mu)},$$

d. h., es bleibt zu erweisen, dass unser Product δ für jedes ganze positive h die Eigenschaft

$$\text{4)} \qquad \left[\delta_{(m)} + \delta_{(\mu)}\right]^h = \delta^{(h)}_{(m+\mu)}$$

besitzt, wobei die Potenzen von δ symbolisch in der festgestellten Weise zu verstehen sind.

Nun ist

für $h = 1$

$$\left[\delta_{(m)} + \delta_{(\mu)}\right]^1 = \delta^{(1)}_{(m)} + \delta^{(1)}_{(\mu)} = \frac{m}{n} + \frac{\mu}{n} = \frac{m+\mu}{n} = \delta^{(1)}_{(m+\mu)},$$

für $h = 2$

$$\begin{aligned} \left[\delta_{(m)} + \delta_{(\mu)}\right]^2 &= \delta^{(2)}_{(m)} + 2\,\delta^{(1)}_{(m)} \delta^{(1)}_{(\mu)} + \delta^{(2)}_{(\mu)} \\ &= \frac{m}{n}\left[1 + \frac{m-2s}{n}\right] + 2\frac{m}{n}\cdot\frac{\mu}{n} + \frac{\mu}{n}\left[1 + \frac{\mu - 2s}{n}\right] \\ &= \frac{m+\mu}{n}\left[1 + \frac{m+\mu-2s}{n}\right] = \delta^{(2)}_{(m+\mu)}. \end{aligned}$$

An diese speciellen Formeln anschliessend, kann man sich durch den Schluss von h auf $h+1$ von der Existenz der allgemeinen Formel überzeugen.

Bezeichnen wir $\zeta_{(1)}$ mit η, so ist nun:

$$\eta^m = \zeta_{(1)}^m = \zeta_{(1)} \cdot \zeta_{(1)} \cdot \zeta_{(1)} \cdots = \zeta_{(m)},$$

d. h. aber, die Reihe $\zeta_{(m)}$ ist die m^{te} Potenz der Reihe $\zeta_{(1)}$. Allgemeiner noch kann man sagen: Die Reihe $\zeta_{(m)}$ wird in die p^{te} Potenz erhoben, indem man das Element m mit p multiplicirt, also:

$$\zeta_{(m)}^p = \zeta_{(mp)}.$$

§ 4. Beweis, dass durch die in entsprechender Weise mit der n^{ten} Einheitswurzel ausgestattete Reihe für ζ jede Wurzel einer trinomischen Gleichung dargestellt werden kann.

Es sei

$$\zeta_{(m)} = \tau^m\, F(m,\ \sigma\xi) \tag{5}$$

im Wesentlichen wieder die unter 1) aufgeschriebene Reihe, also:

$$\zeta_{(m)} = \tau^m \left\{ 1 + \delta_{(m)}^{(1)} \frac{\sigma\xi}{1} + \delta_{(m)}^{(2)} \frac{\sigma^2\xi^2}{1.2} + \dots \right\}. \tag{5a}$$

Die beiden hinzugefügten Constanten σ und τ, welche sogleich bestimmt werden sollen, alteriren die Eigenschaft

$$\zeta_{(m)}\,\zeta_{(\mu)} = \zeta_{(m+\mu)}$$

in keiner Weise, also auch nicht die Eigenschaft $\zeta_{(1)}^m = \zeta_{(m)}$. Wir behaupten jetzt, dass die Reihe $\eta = \zeta_{(1)}$ bei geeigneter Wahl von σ und τ der trinomischen Gleichung

$$\eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0 \tag{6}$$

genügt und bilden deshalb

$$\begin{aligned}
\eta^n &= \tau^n \left\{ 1 + \delta_{(n)}^{(1)} \frac{\sigma\xi}{1} + \delta_{(n)}^{(2)} \frac{\sigma^2\xi^2}{1.2} + \dots \right\} \\
\xi\eta^{n-s} &= \xi\tau^{n-s} \left\{ 1 + \delta_{(n-s)}^{(1)} \frac{\sigma\xi}{1} + \delta_{(n-s)}^{(2)} \frac{\sigma^2\xi^2}{1.2} + \dots \right\} \\
1 &= 1.
\end{aligned}$$

Soll aber die Summe der Grössen auf der linken Seite identisch verschwinden, so muss

$$0 = \tau^n + 1 + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\sigma^h \xi^{h+1}}{(h+1)!} \left[\sigma\tau^n \delta_{(n)}^{(h+1)} + \tau_{n-s}\,(h+1)\,\delta_{(n-s)}^{(h)} \right].$$

Nun besteht, wie wir nachträglich zeigen, für jedes h zwischen 0 und ∞ die Beziehung

$$\delta_{(n)}^{(h+1)} = (h+1)\,\delta_{(n-s)}^{(h)}, \tag{7}$$

folglich geht die vorige Gleichung über in

$$0 = \tau^n + 1 + (\sigma\tau^n + \tau^{n-s}) \sum_{h=0}^{\infty} \delta_{(n-s)}^{(h)} \frac{\sigma^h \xi^{h+1}}{h!},$$

und sie ist sicher erfüllt, wenn wir σ und τ so wählen, dass

8) $\tau^n + 1 = 0$ und $\sigma\tau^n + \tau^{n-s} = 0$, d. h. $\sigma = \tau^{n-s}$.

Was die in 7) ausgesprochene Eigenschaft von δ anlangt, so ist zufolge der Definition in § 2

für $h=0$ $\qquad \delta^{(1)}_{(n)} = \delta^{(0)}_{(n-s)} = 1,$

für $h=1$ $\qquad \delta^{(2)}_{(n)} = 2\,\delta^{(1)}_{(n-s)} = 2\frac{n-s}{n},$

für alle weiteren h ist

$$\delta^{(h+1)}_{(n)} = \prod_{k=1}^{h}\left[k + \frac{n-(h+1)s}{n}\right],$$

oder, wenn der letzte Factor des Productes vor das Zeichen $\prod$ gesetzt wird,

$$\delta^{(h+1)}_{(n)} = \frac{(h+1)(n-s)}{n}\prod_{k=1}^{h-1}\left[k + \frac{n-s-hs}{n}\right],$$

d. h. aber

$$\delta^{(h+1)}_{(n)} = (h+1)\,\delta^{(h)}_{(n-s)}. \tag{7}$$

Bemerken wir noch, dass die unter 5a) angegebene Reihe zufolge der n-Deutigkeit von τ, resp. σ selbst n-deutig wird, so lässt sich das Ergebniss von diesem Paragraphen wie folgt aussprechen:

Die m^{ten} Potenzen sämmtlicher Wurzeln der trinomischen Gleichung

$$\eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0 \tag{6}$$

können durch die Reihen

$$\eta^m_\varkappa = \tau^m \left\{1 + \delta^{(1)}_{(m)}\frac{\sigma\xi}{1} + \delta^{(2)}_{(m)}\frac{\sigma^2\xi^2}{1.2} + \dots\right\} = \tau^m e^{\sigma\xi\delta(m)} \tag{5a}$$

dargestellt werden, wobei

$$\left\{\begin{aligned} &\tau = e^{\frac{(2\varkappa+1)\pi\sqrt{-1}}{n}} \quad (\varkappa = 0, 1, \dots, n-1), \quad \sigma = \tau^{n-s} \\ &\delta^{(1)}_{(m)} = \frac{m}{n}, \quad \delta^{(h)}_{(m)} = \frac{m}{n}\prod_{k=1}^{h-1}\left[k + \frac{m-hs}{n}\right] \end{aligned}\right. \tag{9}$$

bedeutet und nur solche Werthe von ξ zugelassen werden dürfen, für welche Convergenz statt hat.*

§ 5. Umgestaltung der Reihe. — Convergenzbedingung.

Die im vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Reihe

$$\eta^m_\varkappa = \tau^m \sum_{h=0}^{\infty} \delta^{(h)}_{(m)} \frac{\sigma^h \xi^h}{h!} \tag{5a}$$

möge in der Form

---

* Es ist evident, dass die Coefficienten $\delta^{(h)}$ mit den Differentialquotienten $\left(\frac{d^h\eta^m}{d\xi^h}\right)_{\xi=0}$ zusammenfallen und durch die hinzutretende Einheitswurzel n-deutig werden. Unsere Betrachtungen sollen aber, wie schon vorausgeschickt, hierauf keine Rücksicht nehmen, den Begriff des Differentiales vermeiden und die Eigenschaften von δ in elementarer Weise begründen.

$$10)\qquad \eta_{\varkappa}^{m} = \tau^{m}\{A_0 + A_1\sigma + A_2\sigma^2 + \ldots + A_{n-1}\sigma^{n-1}\}$$

gesetzt werden, dann ist offenbar

$$11)\qquad A_g = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \alpha_{g+\varrho n}\frac{\xi^{g+\varrho n}}{(g+\varrho n)!}\qquad (g=0,1,\ldots,n-1),$$

und die α_i können von den früheren $\delta^{(i)}$ höchstens im Vorzeichen abweichen; man hat nämlich

$$\alpha_{g+\varrho n} = (-1)^{\varrho(n-s)}\,\delta^{(g+\varrho n)}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass sich $\alpha_{g+\varrho n}$, resp. $\delta^{(g+\varrho n)}$ durch ihre Anfangswerthe α_g, resp. $\delta^{(g)}$ ausdrücken lassen. Es war nach § 2

$$\delta^{(g)} = \frac{m}{n}\prod_{k=1}^{g-1}\left[k + \frac{m-gs}{n}\right],$$

folglich, wenn g um n wächst,

$$\delta^{(g+n)} = \frac{m}{n}\prod_{k=1}^{g+n-1}\left[k - s + \frac{m-gs}{n}\right].$$

Zerlegen wir diesen Ausdruck nach dem Schema

$$\prod_{k=1}^{g+n-1} = \prod_{k=1}^{s}\cdot\prod_{s+1}^{g+s-1}\cdot\prod_{g+s}^{g+n-1}$$

und vertauschen im

ersten Product k mit $s-k$,
zweiten „ k „ $s+k$,
dritten „ k „ $s+k+g$,

so entsteht nach einfacher Umformung

$$12)\quad \delta^{(g+n)} = (-1)^s\,\delta^{(g)}\prod_{k=0}^{s-1}\left[k + \frac{gs-m}{n}\right]\cdot\prod_{k=0}^{n-s-1}\left[k + \frac{g(n-s)+m}{n}\right]$$

und dem entsprechend

$$\alpha_{g+n} = f(g)\,.\,\alpha_g,\quad \alpha_{g+2n} = f(g)\,.\,f(g+n)\,.\,\alpha_g \text{ etc.},$$

wobei zur Abkürzung

$$13)\qquad f(g) = (-1)^n\prod_{k=0}^{s-1}\left[k + \frac{gs-m}{n}\right]\cdot\prod_{k=0}^{n-s-1}\left[k + \frac{g(n-s)+m}{n}\right]$$

gesetzt wurde.

Da wir später (vergl. § 6) bei der Vertauschung der Parameter n und s unter sich, wenn auch immer ganze, so doch negative Zahlen für s und $n-s$ erhalten werden, und dann die Producte in 12) resp. 13) nicht ohne Weiteres brauchbar sind, so wollen wir selbige in Gestalt von Factoriellen schreiben, nämlich

13a) $$f(g) = (-1)^n \left[\frac{gs-m}{n}\right]^{(s)} \cdot \left[\frac{g(n-s)+m}{n}\right]^{(n-s)},$$

womit also das Symbol

$$a^{(k)} = a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1)$$

eingeführt ist. Für ganze **negative** Exponenten k kann man dann von der leicht erweisbaren Beziehung

$$a^{(-k)} = \frac{1}{(a-k)^{(k)}} = \frac{(-1)^k}{(1-a)^{(k)}}$$

Gebrauch machen.

Wir gelangen nun zu dem Resultat:

Die m^{ten} **Potenzen sämmtlicher Wurzeln der trinomischen Gleichung**

6) $$\eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0$$

können durch den Ausdruck*

10) $$\eta_\varkappa^m = \tau^m \{A_0 + A_1\sigma + A_2\sigma^2 + \ldots + A_{n-1}\sigma^{n-1}\}$$

dargestellt werden, wobei

14) $$\left\{\begin{aligned} &\tau = e^{\frac{(2\varkappa+1)\pi\sqrt{-1}}{n}} \quad (\varkappa = 0,\ 1, \ldots,\ n-1), \quad \sigma = \tau^{n-s}, \\ &A_g = \alpha_g \left\{\frac{\xi^g}{g!} + f(g)\frac{\xi^{g+n}}{(g+n)!} + f(g)\cdot f(g+n)\frac{\xi^{g+2n}}{(g+2n)!} + \ldots\right\}, \\ &\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = \frac{m}{n};\ g = 0,\ 1, \ldots,\ (n-1);\ \alpha_g = \frac{m}{n}\prod_{k=1}^{g-1}\left[k + \frac{m-gs}{n}\right], \\ &f(g) = (-1)^n \left[\frac{gs-m}{n}\right]^{(s)} \cdot \left[\frac{g(n-s)+m}{n}\right]^{(n-s)}. \end{aligned}\right.$$

Behufs Feststellung der Convergenz der Reihe für A_g in 14) bezeichne man den Coefficienten von $\xi^{g+\varrho n}$ mit U_ϱ, dann findet man leicht

$$\lim_{\varrho=\infty} \frac{U_{\varrho+1}}{U_\varrho} = \varDelta\xi^n$$

und, falls $\varDelta\xi^n = 1$,

$$\lim \varrho \left[1 - \frac{U_{\varrho+1}}{U_\varrho}\right] = \frac{3}{2},$$

wobei zur Abkürzung

$$\varDelta = (-1)^n n^{-n} s^s (n-s)^{n-s}$$

gesetzt wurde. Die durch die Ausdrücke 10) und 14) dargestellte Lösung ist demnach zulässig, so lange

$$\varDelta\xi^n \leqq 1.$$

---

* Man könnte den Ausdruck 10) auch so umgestalten, dass an Stelle von σ durchweg τ steht; es würde dies aber eine Aenderung in der Reihenfolge der A_g bedingen. (Vergl. die analoge Darstellung bei der quadrinomischen Gleichung, § 9).

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass der Exponent m auf die Convergenzbedingung keinen Einfluss hat; dann, dass der Fall $m = 0$ nicht bedeutungslos ist, sondern zur Darstellung der natürlichen Logarithmen der Wurzeln der trinomischen Gleichungen führt. Vergl. die Aufgaben 88 und 89 in meinen „Studien".

§ 6. Die Transformation und vollständige Auflösung der trinomischen Gleichung.

Wir haben bis jetzt folgendes Resultat gefunden: Die m^{ten} Potenzen sämmtlicher Wurzeln der trinomischen Gleichung

$$\eta^n + \xi \eta^{n-s} + 1 = 0 \tag{6}$$

lassen sich durch eine unendliche Reihe

$$\zeta = F[m, n, s, \xi], \qquad (\zeta = \eta^m) \tag{15}$$

darstellen; dieselbe enthält die n^{ten} Einheitswurzeln und convergirt, falls $\varDelta \xi^n \leqq 1$.

Es ist nun bemerkenswerth, dass durch eine einfache Transformation, welche schliesslich auf eine blosse Buchstabenvertauschung hinauskommt, die trinomische Gleichung in sich zurückgeführt werden kann. Die oben bezeichnete Lösung wird aber hierbei nicht in sich transformirt, sie geht vielmehr in eine andere über, mit einer neuen Convergenzbedingung, welche letztere der früheren gerade entgegengesetzt ist.

Substituiren wir in 6) und 15)

$$\xi^n = a_0^{s-n} a_s^n a_n^{-}, \quad \eta = a_0^{\frac{1}{n}} a_n^{-\frac{1}{n}} y,$$

so ergiebt sich

$$a_0 y^n + a_s y^{n-s} + a_n = 0 \tag{16}$$

mit der entsprechenden Lösung

$$z = a_0^{-\frac{m}{n}} a_n^{\frac{m}{n}} F\left[m, n, s, (a_0^{s-n} a_s^n a_n^{-s})^{\frac{1}{n}}\right], \qquad (z = y^m) \tag{17}$$

und der zugehörigen Convergenzbedingung

$$a) \qquad \varDelta a_0^{s-n} a_s^n a_n^{-s} \leqq 1, \quad \varDelta = (-1)^n n^{-n} s^s (n-s)^{n-s}.$$

Wir bezeichnen von jetzt ab die Gleichung 6) als Normalform, die Gleichung 16) als die allgemeine Form der trinomischen Gleichung; die Lösung 17) mag die erste Hauptlösung heissen.

Vertauschen wir

die Zahlen	n	s	a_n	a_s
mit	s	n	a_s	a_n

und multipliciren die Gleichung 16) hinterher mit y^{n-s}, so bleibt selbige völlig ungeändert, während die erste Hauptlösung 17) in

18) $$z = a_0^{-\frac{m}{s}} a_s^{\frac{m}{s}} F\left[m,\ s,\ n,\ (a_0^{n-s} a_n^s a_s^{-n})^{\frac{1}{s}}\right], \qquad (z = y^m)$$

übergeht. Zugleich bemerkt man, dass infolge der Vertauschung der Werth $\varDelta\, a_0^{s-n} a_s^n a_n^{-s}$ genau in seinen reciproken umschlägt, mithin

b) $$\varDelta\, a_0^{s-n} a_s^n a_n^{-s} \geqq 1\,.$$

Die neue Convergenzbedingung ist also in der That der früheren entgegengesetzt. Ausserdem sind die n^{ten} Einheitswurzeln von F übergegangen in s^{te} Einheitswurzeln.

Den Ausdruck 18) bezeichnen wir als zweite Hauptlösung der trinomischen Gleichung. Er stellt zufolge seiner s-Deutigkeit die m^{ten} Potenzen von s Wurzeln der trinomischen Gleichung 16) dar; insbesondere sind es jene s Wurzeln, welche mit a_n nicht gleichzeitig verschwinden.

Vertauschen wir weiter

$$\begin{array}{lcccc} \text{die Zahlen} & n & s & a_0 & a_s \\ \text{mit} & n-s & -s & a_s & a_0, \end{array}$$

so ändert sich die allgemeine Form 16) ebenfalls nicht. Die erste Hauptlösung 17) verwandelt sich dagegen in

19) $$z = a_s^{-\frac{m}{n-s}} a_n^{\frac{m}{n-s}} F\left[m,\ n-s,\ -s,\ (a_s^{-n} a_0^{n-s} a_n^s)^{\frac{1}{n-s}}\right], \quad (z = y^m)$$

und die zugehörige Convergenzbedingung geht aus gleichem Grunde wie oben in die bereits aufgestellte b) über.

Den Ausdruck 19) bezeichnen wir als dritte Hauptlösung; denn er stellt infolge seiner $(n-s)$-Deutigkeit die m^{ten} Potenzen von $n-s$ Wurzeln der trinomischen Gleichung 16) dar. Es sind dies insbesondere jene Wurzeln, welche mit a_n gleichzeitig verschwinden, oder, was dasselbe ist, welche mit verschwindendem a_0 nicht zugleich unendlich gross werden.

Demnach haben wir folgendes definitive Resultat:

Die m^{ten} Potenzen z sämmtlicher Wurzeln der allgemeinen trinomischen Gleichung

16) $$a_0 y^n + a_s y^{n-s} + a_n = 0$$

können dargestellt werden — entweder durch die erste Hauptlösung 17) — oder durch die vereinigte zweite und dritte Hauptlösung 18) und 19), je nachdem der Werth, resp. Modul von

$$(-1)^n n^{-n} s^s (n-s)^{n-s} a_0^{s-n} a_s^n a_n^{-s}$$

ein echter oder ein unechter Bruch ist. Wird jener Bruch gleich der Einheit, so sind sämmtliche Lösungen zulässig.

Das Princip der Vertauschung der Parameter, welches hier zur Anwendung kam, verdient umsomehr Beachtung, als es sich sofort auf quadrinomische, überhaupt vielgliedrige Gleichungen übertragen lässt und jede Rechnung entbehrlich macht.

Für den praktischen Gebrauch wird man indessen besser nachträglich einen oder zwei der Coefficienten der allgemeinen Form 16) gleich der

Einheit setzen. Nehmen wir etwa $a_0 = a_n = 1$, $a_s = a$, gehen also wieder auf die Normalform

$$y^n + a y^{n-s} + 1 = 0 \qquad (z = y^m)$$

zurück, so erhalten wir als zugehörige Hauptlösungen

$$20) \quad \begin{cases} z = F[m, n, s, a], & \Delta a^n \lesseqgtr 1, \\ z = a^{\frac{m}{s}} F\left[m, s, n, a^{-\frac{n}{s}}\right], & \Delta a^n \geqq 1, \\ z = a^{-\frac{m}{n-s}} F\left[m, n-s, -s, a^{-\frac{n}{n-s}}\right] & \Delta a^n \geqq 1. \end{cases}$$

II. Die quadrinomische Gleichung.

§ 7. Hypothetische Erweiterung der Reihe für ζ mit Rücksicht auf die quadrinomische Gleichung.

Sei die Gleichung

$$21) \qquad \eta^n + x_p \eta^{n-p} + x_q \eta^{n-q} + 1 = 0$$

vorgelegt, oder kürzer

$$22) \qquad \eta^n + \vartheta + 1 = 0,$$

wo ϑ die Zwischenglieder aufnehmen soll, also

$$23) \qquad \vartheta(x, \eta) = x_p \eta^{n-p} + x_q \eta^{n-q}.$$

Wir versuchen jetzt, ob die m^{ten} Potenzen ζ der Wurzeln jener Gleichung durch die Reihe

$$24) \qquad \zeta = \tau^m \left\{ 1 + \frac{\vartheta(\delta x, \tau)}{1} + \frac{\vartheta^2(\delta x, \tau)}{1.2} + \dots \right\} = \tau^m e^{\vartheta(\delta x, \tau)},$$

$$\tau^n + 1 = 0$$

dargestellt werden könne. Diese Annahme rechtfertigt sich vorläufig schon dadurch, dass, wenn eines der beiden x gleich Null gesetzt wird, die Reihe genau in jene übergeht, welche nach § 4 auf die entsprechende trinomische Gleichung passt.

Es interessirt nun zunächst der Ausdruck

$$25) \qquad \vartheta^h(\delta x, \tau) = [\delta_p x_p \tau^{n-p} + \delta_q x_q \tau^{n-q}]^h$$

und in diesem die symbolischen Potenzen von δ_p und δ_q.

Im Falle $x_q = 0$, d. h. wenn eine trinomische Gleichung vorliegt, muss

$$\delta_p^{(h)}(m) = \frac{m}{n} \prod_{k=1}^{h-1} \left[k + \frac{m - hp}{n}\right], \quad \delta_p^{(0)}(m) = 1, \quad \delta_p^{(1)}(m) = \frac{m}{n};$$

falls aber $x_p = 0$, so wäre

$$\delta_q^{(h)}(m) = \frac{m}{n} \prod_{k=1}^{h-1} \left[k + \frac{m - hq}{n}\right], \quad \delta_q^{(0)}(m) = 1, \quad \delta_q^{(1)}(m) = \frac{m}{n}.$$

Nach dem Früheren besteht hier die Beziehung

$$[\delta_p(m) + \delta_p(\mu)]^h = \delta_p^{(h)}(m+\mu), \quad [\delta_q(m) + \delta_q(\mu)]^h = \delta_q^{(h)}(m+\mu).$$

Als neues Symbol tritt daher in 25) nur die Form

$$\delta_p^{(\nu_p)}(m)\,\delta_q^{(\nu_q)}(m).$$

auf, wobei ν_p und ν_q zwei ganze positive Zahlen, incl. Null, sind, deren Summe immer h beträgt, und dieses Symbol werde definirt durch

$$26)\quad \delta_p^{(\nu_p)}(m)\,\delta_q^{(\nu_q)}(m) = \frac{m}{n}\prod_{k=1}^{h-1}\left[k + \frac{m-(p\nu_p+q\nu_q)}{n}\right], \qquad \nu_p+\nu_q = h.$$

Offenbar enthält der Ausdruck 26) die früher mitgetheilten (für $\nu_p = 0$, resp. $\nu_q = 0$) als Sonderfälle in sich. Dass auch die Eigenschaft

$$27)\quad [\delta_p(m) + \delta_p(\mu)]^{\nu_p}\,[\delta_q(m) + \delta_q(\mu)]^{\nu_q} = \delta_p^{(\nu_p)}(m+\mu)\,\delta_q^{(\nu_q)}(m+\mu)$$

vorhanden ist, wird erkannt, wenn man zur Definition 26) zurückgeht. Im einfachsten Falle $\nu_p = 1$, $\nu_q = 1$, $h = 2$ hat man

$$[\delta_p(m) + \delta_p(\mu)]\,[\delta_q(m) + \delta_q(\mu)] = \delta_p(m)\,\delta_q(m) + \delta_p(m)\,\delta_q(\mu) + \delta_p(\mu)\,\delta_q(m)$$

$$+ \delta_p(\mu)\,\delta_q(\mu) = \frac{m}{n}\left[1 + \frac{m-(p+q)}{n}\right] + \frac{m}{n}\cdot\frac{\mu}{n} + \frac{\mu}{n}\frac{m}{n} + \frac{\mu}{n}\left[1 + \frac{\mu-(p+q)}{n}\right]$$

$$= \frac{m+\mu}{n}\left[1 + \frac{m+\mu-(p+q)}{n}\right],$$

d. h. aber

$$[\delta_p(m) + \delta_p(\mu)]\,[\delta_q(m) + \delta_q(\mu)] = \delta_p(m+\mu)\,\delta_q(m+\mu).$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit 26) und Anwendung des Schlusses von h auf $h+1$ kann man schliesslich die Existenz der allgemeinen Formel erweisen.

Kehren wir jetzt zu dem Ausdruck für $\vartheta^h(\delta x, \tau)$ zurück und bezeichnen ihn, um seine Abhängigkeit von m hervortreten zu lassen, kurz durch $\vartheta^h(m)$, so dass

$$\vartheta^h(m) = [\delta_p(m)\,x_p\,\tau^{n-p} + \delta_q(m)\,x_q\,\tau^{n-q}]^h.$$

Auch von diesem können wir zeigen, dass er wie $\delta^{(h)}(m)$ die Eigenschaft

$$28)\qquad [\vartheta(m) + \vartheta(\mu)]^h = \vartheta^h(m+\mu)$$

besitzt. Im Falle $h = 0$ und $h = 1$ ist dies unmittelbar ersichtlich; im Falle $h = 2$ hat man

$$\vartheta^2(m+\mu) = [\delta_p(m+\mu)\,x_p\,\tau^{n-p} + \delta_q(m+\mu)\,x_q\,\tau^{n-q}]^2$$

$$= [\delta_p(m) + \delta_p(\mu)]^2\,x_p^2\,\tau^{2(n-p)} + [\delta_q(m) + \delta_q(\mu)]^2\,x_q^2\,\tau^{2(n-q)}$$

$$+ 2\,[\delta_p(m) + \delta_p(\mu)]\,[\delta\ (m) + \delta_q(\mu)]\,x_p\,x_q\,\tau^{2n-p-q}$$

$$= [\delta_p(m)\,x_p\,\tau^{n-p} + \delta_q(m)\,x_q\,\tau^{n-q}]^2 + [\delta_p(\mu)\,x_p\,\tau^{n-p} + \delta_q(\mu)\,x_q\,\tau^{n-q}]^2$$

$$+ 2\,[\delta_p(m)\,x_p\,\tau^{n-p} + \delta_q(m)\,x\ \ \tau^{n-q}].[\delta_p(\mu)\,x_p\,\tau^{n-p} + \delta_q(\mu)\,x_q\,\tau^{n-q}],$$

d. h.

$$\vartheta^2(m+\mu) = \vartheta^2(m) + \vartheta^2(\mu) + 2\,\vartheta(m)\,\vartheta(\mu) = [\vartheta(m) + \vartheta(\mu)]^2.$$

Bei fortgesetzter Multiplication und Hinzuziehung der symbolischen Ausdrucksweise gelangt man schliesslich zu Formel 28.

§ 8. Beweis, dass die erweiterte Reihe die Eigenschaft einer Potenz besitzt, und dass durch sie eine jede Wurzel der quadrinomischen Gleichung dargestellt werden kann.

Als Erstes zeigen wir, dass

29) $$\zeta(m) . \zeta(\mu) = \zeta(m+\mu),$$

wobei also

24) $$\zeta(m) = \tau^m \left\{1 + \frac{\vartheta(m)}{1} + \frac{\vartheta^2(m)}{1.2} + \ldots\right\},$$

25) $$\vartheta^h(m) = \vartheta^h(\delta x, \tau) = [\delta_p(m)\, x_p\, \tau^{n-p} + \delta_q(m)\, x_q\, \tau^{n-q}]^h, \quad \tau^n + 1 = 0.$$

Durch Ausführung der angedeuteten Multiplication findet man, dass die Beziehung 29) keine andere nach sich zieht, als folgende:

$$\vartheta^h(m) + \binom{h}{1} \vartheta^{h-1}(m)\, \vartheta(\mu) + \binom{h}{2} \vartheta^{h-2}(m)\, \vartheta^2(\mu) + \ldots + \vartheta^h(\mu) = \vartheta^h(m+\mu),$$

d. h. die bereits als richtig erkannte

28) $$[\vartheta(m) + \vartheta(\mu)]^h = \vartheta^h(m+\mu).$$

Um weiter zu zeigen, dass die Reihe $\eta = \zeta_{(1)}$ der quadrinomischen Gleichung

21) $$\eta^n + x_p\, \eta^{n-p} + x_q\, \eta^{n-q} + 1 = 0$$

genügt, führen wir die potenzirten Reihen $\zeta_{(n)}$, $\zeta_{(n-p)}$ und $\zeta_{(n-q)}$ ein, dann entsteht auf der linken Seite von 21:

$$\tau^n \left\{1 + \frac{\vartheta(n)}{1} + \frac{\vartheta^2(n)}{1.2} + \ldots\right\}$$

$$+ x_p\, \tau^{n-p} \left\{1 + \frac{\vartheta(n-p)}{1} + \frac{\vartheta^2(n-p)}{1.2} + \ldots\right\}$$

$$+ x_q\, \tau^{n-q} \left\{1 + \frac{\vartheta(n-q)}{1} + \frac{\vartheta^2(n-q)}{1.2} + \ldots\right\} + 1$$

oder

$$\tau^n + 1 + \sum_{h=0}^{\infty} \left[\tau^n\, \vartheta^{h+1}(n) + (h+1)\, [x_p\, \tau^{n-p}\, \vartheta^h(n-p) + x_q\, \tau^{n-q}\, \vartheta^h(n-q)] .\right]$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$\tau^n + 1 = 0;$$

es verschwindet aber auch die angedeutete Summe, weil für jedes ganze positive h zwischen 0 und ∞ die Identität

30) $$\vartheta^{h+1}(n) = (h+1)\, [x_p\, \tau^{n-p}\, \vartheta^h(n-p) + x_q\, \tau^{r-q}\, \vartheta^h(n-q)]$$

statt hat. Es wird nämlich bei binomischer Entwicklung der drei Grössen ϑ der Coefficient von

$$x_p^{\nu_p} x_q^{\nu_q} \tau^{(n-p)\nu_p + (n-q)\nu_q}$$

links gleich:

$$\frac{(h+1)!}{\nu_p!\, \nu_q!} \delta_p^{(\nu_p)}(n)\, \delta_q^{(\nu_q)}(n),$$

rechts gleich:

$$(h+1)\left\{\frac{h!}{(\nu_p-1)!\,\nu_q!}\delta_p^{(\nu_p-1)}(n-p)\,\delta_q^{(\nu_q)}(n-p) + \frac{h!}{\nu_p!\,(\nu_q-1)!}\delta_p^{(\nu_p)}(n-q)\,\delta^{(\nu_q-1)}(n-q)\right\},$$
$$(\nu_p + \nu_q = h+1).$$

Vergleicht man diese Ausdrücke und kürzt beiderseits mit den Binomialcoefficienten ab, so verbleibt

$$31)\quad \delta_p^{(\nu_p)}(n)\,\delta_q^{(\nu_q)}(n) = \nu_p\,\delta^{(\nu_p-1)}(n-p)\,\delta_q^{(\nu_q)}(n-p) + \nu_q\,\delta_p^{(\nu_p)}(n-q)\,\delta_q^{(\nu_q-1)}(n-q),$$

eine Beziehung, die für $\nu_q = 0$ oder $\nu_p = 0$ in die beiden bekannten

$$\left.\begin{aligned}\delta_p^{(h+1)}(n) &= (h+1)\,\delta_p^{(h)}(n-p)\\ \delta_q^{(h+1)}(n) &= (h+1)\,\delta_q^{(h)}(n-q)\end{aligned}\right\}\ \text{(vergl. § 4)}$$

übergeht. Dass sie aber auch für sonstige ganze positive ν_p und ν_q gilt, sieht man folgendermassen ein. Es ist laut Definition

$$\delta_p^{(\nu_p-1)}(n-p)\,\delta_q^{(\nu_q)}(n-p) = \frac{n-p}{n}\prod_{k=1}^{h-1}\left[k + \frac{n-p-[p(\nu_p-1)+q\nu_q]}{n}\right],$$

$$\delta_p^{(\nu_p)}(n-q)\,\delta_q^{(\nu_q-1)}(n-q) = \frac{n-q}{n}\prod_{k=1}^{h-1}\left[k + \frac{n-q-[p\,\nu_p + q(\nu_q-1)]}{n}\right],$$

und man bemerkt, dass die beiden Werthe im Zeichen Π nicht verschieden sind. Mulltiplicirt man nun mit Rücksicht auf 31) die letzten Gleichungen mit ν_p, resp. ν_q und addirt, so entsteht rechter Hand

$$\frac{(n-p)\,\nu_p + (n-q)\,\nu_q}{n}\prod_{k=1}^{h-1}\left[k + \frac{n-(p\,\nu_p + q\,\nu_q)}{n}\right].$$

Es ist aber wegen $\nu_p + \nu_q = h+1$:

$$\frac{(n-p)\,\nu_p + (n-q)\,\nu_q}{n} = h + \frac{n-(p\,\nu_p + q\,\nu_q)}{n},$$

so dass diese Grösse mit unter das Productzeichen Π gezogen werden kann, welches letztere dann von $k=1$ bis $k=h$ zu erstrecken ist. Wir sind damit auf das Product

$$\prod_{k=1}^{h}\left[k + \frac{n-(p\,\nu_p + q\,\nu_q)}{n}\right]$$

gekommen, und dieses ist nichts Anderes als $\delta_p^{(\nu_p)}(n)\,\delta_p^{(\nu_q)}(n)$.

Es besteht also die Formel 31) unter allen Umständen, und sonach ist auch der Beweis erbracht, dass die Reihe 24) der quadrinomischen Gleichung 21) genügt.

Das Endergebniss lässt sich jetzt wie folgt aussprechen:

Die m^{ten} Potenzen sämmtlicher Wurzeln der quadrinomischen Gleichung

$$21)\qquad \eta^n + x_p\,\eta^{n-p} + x_q\,\eta^{n-q} + 1 = 0$$

können durch die Reihen

$$24)\qquad \eta_\varkappa{}^m = \tau^m \left\{ 1 + \frac{\vartheta(m)}{1} + \frac{\vartheta^2(m)}{1.2} + \dots \right\}$$

dargestellt werden, wobei

$$32)\qquad \begin{cases} \tau = e^{\frac{(2\varkappa+1)\pi\sqrt{-1}}{n}} \qquad (\varkappa = 0, 1, \dots, n-1), \\ \vartheta^h(m) = [\delta_p(m)\,x_p\,\tau^{n-p} + \delta_q(m)\,x_q\,\tau^{n-q}]^h, \\ \delta_p{}^{(\nu_p)}(m)\,\delta_q{}^{(\nu_q)}(m) = \frac{m}{n}\prod_{k=1}^{h-1}\left[k + \frac{m-(p\,\nu_p + q\,\nu_q)}{n}\right],\ \nu_p + \nu_q = h \end{cases}$$

bedeutet und vorausgesetzt wird, dass es für x_p und x_q solche Werthepaare giebt, für welche Convergenz statt hat.*

§ 9. Umgestaltung der Reihe.

Wir entwickeln den letzterwähnten Ausdruck für ϑ^h binomisch, also

$$\frac{\vartheta^h(m)}{h!} = \sum_\nu \delta_p{}^{(\nu_p)}(m)\,\delta_q{}^{(\nu_q)}(m)\,\frac{x_p{}^{\nu_p}\,x_q{}^{\nu_q}}{\nu_p!\,\nu_q!}\,\tau^{(n-p)\nu_p + (n-q)\nu_q},$$

und hier erstreckt sich das Summenzeichen über alle ganzen positiven Werthe, incl. Null der Exponenten ν_p und ν_q, welche nur an die Bedingung

$$a)\qquad \nu_p + \nu_q = h$$

gebunden sind.

Sei g eine der Zahlen $0, 1, 2, \dots, n-1$ und λ eine ganze positive Zahl, incl. Null, so kann man sich g und λ immer so bestimmt denken, dass

$$b)\qquad (n-p)\,\nu_p + (n-q)\,\nu_q = n\lambda + g,$$

also

$$\tau^{(n-p)\nu_p + (n-q)\nu_q} = (-1)^\lambda\,\tau^g.$$

Vermöge dieser Bezeichnungsart kann man den Ausdruck $\vartheta^h(m)$ folgendermassen anordnen:

$$24)\qquad \frac{\vartheta^h(m)}{h!} = A_0 + A_1\,\tau + A_2\,\tau^2 + \dots + A_{n-1}\,\tau^{n-1},$$

wobei

---

* Es ist leicht ersichtlich, dass $\vartheta^h(m)$ nichts Anderes ist, als der Differentialquotient $\left(\frac{d^h\eta^m}{d\xi^h}\right)_{\xi=0}$, gebildet für die Gleichung $\eta^n + \xi\,\vartheta + 1 = 0$, während $\delta_p{}^{(\nu_p)}(m)\,\delta_q{}^{(\nu_q)}(m)$ übereinkommt mit $\left(\frac{\partial^{\nu_p+\nu_q}\eta^m}{\partial x_p{}^{\nu_p}\,\partial x_q{}^{\nu_q}}\right)_{\substack{x_p=0\\x_q=0}}$.

$$A_g = \sum_{\nu} (-1)^{\lambda}\, \delta_p^{(\nu_p)}(m)\delta_q^{(\nu_q)}(m)\, \frac{x_p^{\nu_p} x_q^{\nu_q}}{\nu_p!\, \nu_q!},$$

und die ν_p und ν_q innerhalb der A_g den beiden Bedingungen a) und b) unterworfen sind. Substituiren wir endlich die Werthe von $\vartheta^h(m)$ (für $h = 1, 2, 3\ldots$) in die Reihe 24), so entsteht das Resultat:

Die m^{ten} Potenzen sämmtlicher Wurzeln der quadrinomischen Gleichung

$$21)\qquad \eta^n + x_p\, \eta^{n-p} + x_q\, \eta^{-q} + 1 = 0$$

können durch den Ausdruck

$$\eta_\varkappa^{\,m} = \tau^m \left[A_0 + A_1\,\tau + A_2\,\tau^2 + \cdots + A_{n-1}\,\tau^{n-1}\right]$$

dargestellt werden, wobei

$$34)\quad \begin{cases} \tau = e^{\frac{(2\varkappa+1)\pi\sqrt{-1}}{n}} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1), \\ A_g = \sum_{\nu} (-1)^{\lambda}\, \delta_p^{(\nu_p)}(m)\, \delta_q^{(\nu_q)}(m) \frac{x_p^{\nu_p} x_q^{\nu_q}}{\nu_p!\, \nu_q!}, \\ g = 0, 1, \ldots, (n-1) \\ \delta_p^{(\nu_p)}(m)\, \delta^{(\nu\ )}(m = \frac{m}{n} \prod_{k=1}^{h-1} \left[k + \frac{m - (p\,\nu_p + q\,\nu_q)}{n}\right], \\ h = \nu_p + \nu_q. \end{cases}$$

Die Exponenten ν_p und ν_q haben innerhalb der A_g alle möglichen ganzen positiven Zahlen von 0 bis ∞ zu durchlaufen, welche mit der Bedingung

$$b)\qquad (n-p)\,\nu_p + (n-q)\,\nu_q = n\lambda + g \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

verträglich sind.

§ 10. Abschliessende Bemerkungen.

Wir führen die Untersuchung nicht weiter, weil damit Dinge reproducirt würden, die wir bei anderer Gelegenheit bereits mitgetheilt haben.* Auch ist ja unmittelbar ersichtlich, dass sich die gewonnenen Formeln von der quadrinomischen Gleichung auf eine vielgliedrige ausdehnen lassen.

Nur betreffs des Transformationsproblems sei hier wiederholt, dass sich für ein und dieselbe k-gliedrige Gleichung $\frac{k(k-1)}{2}$ Lösungen ergeben, also bei der trinomischen Gleichung die früher aufgestellten drei Lösungen, bei der quadrinomischen sechs Lösungen u. s. f. Für die trinomische Gleichung waren jene drei Lösungen auch durchaus erforderlich, und wir dürfen sagen, dass unsere diesbezüglichen Untersuchungen in der That in sich abgeschlossen erscheinen.

Nicht so bei den quadrinomischen und mehrgliedrigen Gleichungen. Die Reihen, welche für diese in Betracht kommen, schreiten nach mehreren

* Vergl. die allgemeineren, auf transcendentem Wege erhaltenen Resultate in den „Studien“ des Verfassers, S. 248—297.

Veränderlichen x_p, x_q, x_r, ... fort und sind zu einer numerischen Berechnung nicht unmittelbar geeignet; auch die Convergenzbedingungen sind weit schwieriger festzustellen. Nichtsdestoweniger dürfte jenen Lösungen ein formales Interesse kaum abzusprechen sein, und es können selbige bei gewissen allgemeinen Untersuchungen sehr wohl in Gebrauch genommen werden. So gestatten sie, um nur Eines zu erwähnen, eine augenblickliche Herstellung der bekannten Girard-Waring'schen Formel für die Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

VIII.

Topologische Betrachtungen.

Von

Dr. Hermann Brunn

in München.

Hierzu Tafel IV, Figur 1—11.

I.

Kritische Bemerkungen zu dem von Simony aufgestellten Begriffe der Torsion verknoteter Bänder.

In seiner Schrift: „Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „in ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen“ und verwandter merkwürdiger Probleme“ bestimmt O. Simony u. A. die „Torsion“ gewisser geschlossener Bänder, eine Constante, die in der That in vielen Fällen direct auf den gewöhnlichen Begriff der Torsion sich bezieht. Der Umstand, dass seine populären Auseinandersetzungen hierüber Versehen enthalten, die in den späteren Aufsätzen Simony's keine Berichtigung finden und neuerdings auch in eine andere wissenschaftliche Schrift* übergegangen sind, veranlasst mich zu einigen Bemerkungen über diesen für die Lehre von den verschlungenen Bändern fundamentalen Punkt.

Wir geben zunächst einen wörtlichen Abdruck der auf die Bestimmung der Torsionszahl bezüglichen Hauptstelle (l. c. § 1, S. 2—4).

Citat I.

„Man verwendet ... einen rechteckigen Papierstreifen, in dessen Ecken auf seiner oberen und unteren Fläche beispielsweise nach dem Muster der schematischen Figur 1 die Ziffern 1, 2, 3, 4 geschrieben werden mögen, wobei jedes Eck beiderseits mit derselben Ziffer zu versehen ist. Biegt man hierauf die beiden Enden des Streifens in der durch die schematische Figur 2** versinnlichten Art gegen einander und verdreht dessen recht-

---

* Topologische Studien etc. von Dr. Fr. Dingeldey. Leipzig 1890 bei B. G. Teubner.

** Siehe auf unserer Tafel IV, Figur 1. Die Figurennummern im Folgenden beziehen sich stets auf Tafel IV.

seitiges Ende so lange, bis die Ecken (1) und (4), (2) und (3) zum ersten Male neben einander zu liegen kommen, so hat man eine Drehung um 1×180^0 ausgeführt. Ich nenne dieselbe positiv (+), wenn sie im Sinne des Pfeiles (p), negativ (−), wenn sie im entgegengesetzten Sinne vorgenommen worden ist. Durch Verdoppelung, Verdreifachung etc. der eben charakterisirten Drehung lässt sich analog eine Verdrehung des rechtseitigen Endes um 2×180^0, 3×180^0 etc. erzeugen; sie wird als positiv oder negativ zu bezeichnen sein, je nachdem sie aus einer Verdoppelung, Verdreifachung etc., einer positiven oder einer negativen Drehung um 1×180^0 hervorgegangen ist.

Die Vereinigung beider Enden des Streifens liefert natürlich stets einen ringförmig geschlossenen, knotenfreien Streifen, dessen Gesammttorsion (T) mit jener des rechtseitigen Endes des ungeschlossenen Streifens übereinstimmt. Handelt es sich also umgekehrt um den Nachweis einer bestimmten Gesammttorsion in einem ringförmig geschlossenen, knotenfreien Streifen, so verwandle man denselben mittels eines, seine ganze Breite durchsetzenden Querschnittes in einen Streifen mit zwei freien Enden und verdrehe dessen rechtseitiges Ende bei negativem T in positivem, bei positivem T in negativem Sinne um jenes Vielfache von 180^0, welches für T angegeben wurde. War die betreffende Angabe richtig, so müssen nach Vollendung dieser Operation sämmtliche Torsionen aus dem Streifen verschwunden sein. Ebenso einfach gestaltet sich die Prüfung der Gesammttorsion eines ringförmig geschlossenen Streifens, falls derselbe einen Knoten von dem Habitus der schematischen Figuren 13, 14, 27, 28, 31, 32* besitzt. Schneidet man nämlich den Streifen unmittelbar neben den Umschlingungen des Knotens quer durch und zieht jenen Theil des Streifens, welcher die Umschlingungen trägt, ohne Drehung aus den letzteren heraus, so hat man den vorgelegten Streifen ohne Aenderung seiner Gesammttorsion in einen knotenlosen Streifen mit zwei freien Enden transformirt, dessen Gesammtverdrehung wieder in der zuvor beschriebenen Weise controlirt werden kann."

Vor Allem sei der mit Knotenexperimenten nicht vertraute Leser gewarnt, die hier mit den Streifen vorgenommene Operation für eine harmlose und überhaupt ein Aufschneiden und Hervorziehen eines Streifentheiles, wenn nur keine neue Torsion hinzugefügt wird, bei Bestimmung der Torsionszahl für erlaubt zu halten. Einige Beispiele werden sofort zeigen, in welche Widersprüche man dadurch gerathen kann. Figur 4 entspricht der Figur 19 bei Simony. Wollte man die Torsion des abgebildeten Bandes dadurch bestimmen, dass man dasselbe bei a aufschneidet, den Theil ab aus den Umschlingungen ohne Torsion hervorzieht und über den früheren Umschlingungen zur Schnittstelle a hinlaufen lässt, so würde das jetzt unverknotete Band eine Torsion von 4π aufweisen; verführe man genau so,

* Vergl. auf unserer Tafel die als Repräsentanten ausgewählten Fig. 2 und 3.

nur mit der Aenderung, den herausgezogenen Streifen unter den früheren Umschlingungen zur Schnittstelle hinlaufen zu lassen, so würde sich eine Torsion von 8π ergeben. Welche der beiden Zahlen soll nun als Torsionszahl des ursprünglichen, verknoteten Bandes angesehen werden? Und warum soll nicht jede der beiden Operationen zur Bestimmung der Torsion ebenso berechtigt sein, wie die von Simony vorgeschlagene? Oder: Figur 5 stellt ein Band vor, dessen Torsion entweder direct nach der für unverknotete Ringe gegebenen Vorschrift oder mittels Aufschneiden bei a und Herausziehen von ab aus der Umschlingung etc. bestimmt werden kann, wobei die einer Umwandlung unterworfene Stelle der in Fig. 14 bei Simony abgebildeten ganz gleich ist. Das erste Verfahren giebt als Torsionszahl $-\pi$, das zweite $+3\pi$. Wie steht es mit der Berechtigung eines Verfahrens, das schon bei so einfachem Beispiel zu den bedenklichsten Widersprüchen führt?

Nun sagt allerdings Simony selbst in der auf das Citat I bezüglichen Anmerkung 5:

Citat II.

„Dieser Satz hat lediglich den Werth einer empirischen Regel, welche zwar speciell für die hier in Betracht kommenden Knotenformen richtige Resultate liefert, im Allgemeinen jedoch keine unbedingte Giltigkeit besitzt."

„Empirisch" möchten wir die Regel deswegen nicht nennen, weil nur ein einziger Umstand bei ihrer Begründung auf Empirie gestützt werden kann. Bei einem einzigen der von Simony in § 1 behandelten Gebilde nämlich kann die Torsion einwurfsfrei empirisch bestimmt werden. Es ist dies Gebilde das durch Mittelschnitt aus einem geschlossenen, einmal tordirten Bande entstehende Band, und die dafür gefundene Torsionszahl ordnet sich allerdings dem Gesetze unter, das für die Torsionszahlen der aus mehrfach tordirten Bändern entstehenden Streifen mittels obiger Regel aufgestellt wird.

Für diese letzteren Streifen aber stellt die Regel dogmatisch, nicht empirisch, etwas fest.

Es ist noch zweckdienlich, die Gründe kennen zu lernen, die Simony veranlassten, seiner Regel unbedingte Giltigkeit abzusprechen. In einem seiner anderen Aufsätze: „Sitzb. d. Wien. Ac. II. Abth. 1881, S. 250" findet sich die Stelle:

Citat III.

„Endlich muss bei der Erledigung des 2. Hauptfalles noch der Thatsache Rechnung getragen werden, dass die hierbei in Betracht kommenden Verknüpfungen und Verschlingungen je nach der Art ihrer Auflösung verschiedene Torsionszahlen liefern, also durch das Experiment im Allgemeinen nur die ausserhalb der betreffenden Verknüpfung resp. Verschlingung auf-

tretenden Torsionen um je 180^0, welche in ihrer Gesammtheit die jeweilige äussere Verdrehung: $V = \xi \times 180^0$ der untersuchten Fläche bestimmen, ihrem Sinne und ihrer Anzahl nach eindeutig festgestellt werden können."

Den einfachsten Fall der in Frage stehenden Verknüpfungen und Verschlingungen stellen die beiden Figuren 6 und 7 dar. Im allgemeinen Fall dürfen an Stelle der einen Umschlingung bei ab beliebig viele gleichsinnige Umschlingungen des horizontalen Streifentheiles treten, auch darf der Sinn der Umschlingungen bei ab und cd ein anderer als in der Figur sein. Simony setzt auseinander, dass für Figur 6, je nachdem man die im Citat I am Schlusse beschriebene Operation nur auf die Stelle ab, nur auf die Stelle cd, oder auf beide Stellen zusammen anwendet, die Torsionen -4π, $+4\pi$ oder 0 erhalten werden, dass aber bei Vergleichung der Figur mit einer symmetrischen Gründe sich ergeben, welche nur die letzte Torsion als die richtige erscheinen lassen. Analoges gilt von Figur 7.

Was nun hier nachgewiesen werden soll, ist, dass die in Citat I gegebene Regel nicht nur für die Knoten im Citat III zweifelhafte, sondern auch für die in der populären Schrift behandelten direct verwerfliche Resultate giebt, dass aber sehr wohl eine Regel aufgestellt werden kann, welche stets unzweideutige, unter einander widerspruchsfreie und mit der Empirie übereinstimmende Torsionszahlen liefert.

Es ist klar, dass die Regel Citat I hätte in Beziehung gesetzt werden müssen zu der Stelle S. 5—6, wo das Torsionsäquivalent von Ueberkreuzungen in folgender Weise besprochen wird:

Citat IV.

„An die hier gegebene elementare Erläuterung des ersten und zweiten Experiments knüpft sich ausserdem noch eine theoretische Folgerung, welche speciell für die Beurtheilung der jeweiligen Gesammtverdrehung eines geschlossenen, mit einem Knoten versehenen Streifens von Bedeutung ist. Da sich nämlich die Figuren 4 und 6* lediglich durch die zwischen ihren Hälften auftretenden Ueberkreuzungen unterscheiden, so bildet eine Ueberkreuzung zweier Theile eines und desselben geschlossenen Streifens, gemäss unserer letzten Bemerkungen, das charakteristische Aequivalent für eine Torsion um $+2.180^0$ resp. -2.180^0, je nachdem sie mit der als positiv zu bezeichnenden Ueberkreuzung in Figur 4 oder mit der negativen Ueberkreuzung in Figur 6 gleichsinnig ist. Es kann daher auch umgekehrt eine Torsion um $+2.180^0$ als positive Ueberkreuzung, eine solche um -2.180^0 als negative Ueberkreuzung zweier Streifentheile auftreten, welcher Satz sich u. A. durch Flachdrücken eines um 2.180^0 resp. um -2.180^0 verdrehten, ringförmig geschlossenen Streifens besonders anschaulich controliren lässt."

* Siehe unsere Tafel Fig. 8 und 9, wo die Stellung der Figuren übrigens verändert ist.

Denn bei der in der Regel Citat I vorgeschriebenen Operation werden Ueberkreuzungen aufgehoben, oder ihre Natur verändert. Es scheint nun Simony das Versehen passirt zu sein, die aufgehobenen Ueberkreuzungen als paarweise einander entgegengesetzt, und somit einer Torsion 0 äquivalent angesehen zu haben. Indem nämlich bei ihm S. 5 und 6 der Unterschied einer positiven und negativen Ueberkreuzung einfach durch Hinweis auf seine Figuren 4 und 6 erklärt wird, lag die Gefahr nahe, Ueberkreuzungen durch eine oberflächliche Vergleichung nur der unmittelbar in der Nähe der Ueberkreuzungen befindlichen Streifentheile falsch zu beurtheilen.

Man braucht, um ein gleiches Aussehen beider Figuren in der Nähe der Ueberkreuzungsstelle herbeizuführen, nur eine derselben in ihrer Ebene, um 90^0 zu drehen. Es ist daher gerathen, den „Sinn" einer Ueberkreuzung etwas sorgsamer, etwa folgendermassen zu definiren:

Man halte die Ueberkreuzung so vor sich hin, dass der dem Blick zugewendete (vordere) Streifentheil in der Nähe der Ueberkreuzungsstelle senkrecht, der andere wagrecht verläuft, und denke sich von der Kreuzungsstelle o nach oben gegen a einen das Band durchlaufenden Punkt ausgehen; kommt derselbe im weiteren Verlaufe von rechts, von b, zur Ueberkreuzungsstelle zurück, so liegt eine rechtsinnige, positive Ueberkreuzung vor (s. Fig. 8); im entgegengesetzten Falle eine linksinnige, negative (s. Fig. 9).*

Beachtet man diese Vorschrift und nimmt man den Satz von der Aequivalenz einer positiven Streifen-Ueberkreuzung mit einer Torsion von $+2\pi$, einer negativen Streifen-Ueberkreuzung mit einer Torsion von -2π als allgemein giltig an, so kommt man in allen von mir untersuchten Fällen zu einer einheitlichen, unzweideutigen und mit der Erfahrung übereinstimmenden Bestimmung der Torsionszahl.

Beispiele. Die Ueberkreuzungen in den Fig. 13, 27, 31** bei Simony sind sämmtlich positiv, die in seinen Fig. 14, 28, 32 sämmtlich negativ.

S. Fig. 5. Die beiden Ueberkreuzungen sind negativ, ausserdem in dem Bande 3 positive Torsionen um π vorhanden. Die Gesammttorsion wird somit $(3-4)\pi = -\pi$ sein, wie man dies auch beim Auseinanderfalten, Aufschneiden und Torsionslosmachen des Bandes bestätigt findet.

S. Fig. 6. Die beiden Ueberkreuzungen bei a, b sind positiv, die bei c, d negativ, so dass ihre Torsionsäquivalente sich aufheben; die Ueberkreuzung bei e ist negativ, ausserdem besitzt das Band 2 Torsionen um π, so dass als Gesammttorsion 0 sich ergiebt, entsprechend dem von Simony, unter den drei von ihm erhaltenen, aus Symmetriegründen als einzig richtig hervorgehobenen Resultate.

---

* Diese Erklärungen sind verwandt, aber nicht identisch mit der von Listing gegebenen Unterscheidung einer dexiotropen und laeotropen Ueberkreuzung. S. in den Göttinger Studien I. 1847 die „Vorstudien zur Topologie". S. 860 u. ff.

** Vergl. auf unserer Tafel Fig. 2 und 3.

Die Verschiedenheit der Resultate bei Simony hängt damit zusammen, dass er einmal eine positive, einmal eine negative, und einmal zwei entgegengesetzte Ueberkreuzungen aufhebt und in entgegengesetzte verwandelt.

S. Fig. 4. An dieser Figur bestimmt Simony die Torsion eines Bandes, die er vorher nach Regel Citat I bestimmt hat, direct durch Flachdrücken und Abzählen der Torsionen und Ueberkreuzungen. Auffälliger Weise gelangt er zu dem nämlichen Ergebniss wie vorher. Sollen wir also Recht haben, so muss hier abermals ein Fehler vorliegen, und in der That bezeichnet Simony die Ueberkreuzung bei p als negativ, während sie doch positiv ist, und erhält dadurch eine um $+4\pi$ zu kleine Torsionszahl.

Ganz ähnliche Versehen liegen bei den Torsionsbestimmungen sämmtlicher Knoten in §§ 1 und 2 vor, indem Simony allgemein bei einem Knoten, der aus $(2K+1)$-fach tordirtem Ringbande durch Mittelschnitt entstanden ist, $2K$ gleichsinnige Ueberkreuzungen bei der Zählung vernachlässigt, und dadurch den absoluten Werth der Torsion um $4K\pi$ zu klein erhält. Demgemäss ist die Stelle auf Seite 15, Zeile 17 von oben in folgenden Wortlaut umzugestalten:

„Ausser dem Knoten besitzt der neu erzeugte Streifen auch noch eine charakteristische Verdrehung, indem seine Gesammttorsion zwar mit jener des ursprünglichen Streifens gleichsinnig, ihr absoluter Betrag jedoch auf $4(2K+1).180^0$ [nicht $4(K+1).180^0$] gestiegen ist, wobei $2(2K+1)$ Torsionen um je 180^0 stets in der Form von $2K+1$ Ueberkreuzungen zweier Streifentheile auftreten."

Ebenso ist auf Seite 19, Zeile 17 von oben entsprechend zu corrigiren in: „...Beide Streifen zeigen eine mit jener des ursprünglichen Streifens gleichsinnige Gesammtverdrehung, deren absoluter Werth bei dem längeren $4(2K+1).180^0$ ausmacht, etc."

II.

Andere Auffassung des Torsionsbegriffes. Die Zahl ν.

Nachdem sich nun gezeigt hat, dass die im Vorliegenden behandelte Eigenschaft der „Torsion" bei Verknotung des Bandes gar nicht rein durch eine Torsion des Bandes dargestellt werden kann, ohne Aenderungen an dem Bande vorzunehmen, deren Zulässigkeitsbeweis bei rein empirischem Verfahren zu einem circulus vitiosus verführt, wird man über das rein empirische Verfahren hinausgehen und versuchen müssen, von vornherein eine auf alle Bänder gleichmässig anwendbare Definition zu erlangen.

Eine solche Definition lässt sich gewinnen, indem man die Verschlingung* der Randcurven, resp. der Randcurve des Bandes ins Auge fasst.

Wir knüpfen die Betrachtung an die plattgedrückte Form der Bänder, wie sie unsere Figuren aufweisen, und beginnen mit dem Fall, dass das

* Die Wichtigkeit des Gauss'schen Begriffes der Verschlingung an dieser Stelle wurde mir gesprächsweise von Herrn Prof. W. Dyck betont.

Band zwei Randcurven besitzt, wie sich dies bei den strittigen Figuren Simony's in der That immer so verhält.

Die beiden Ränder sind dann zwei geschlossene Curven in einer Ebene, an deren Kreuzungspunkten ein Untenliegen der einen und Obenliegen der andern unterschieden wird. Es lässt sich für diese „Ueberkreuzungen" zweier Curven der relative Sinn ganz ähnlich feststellen, wie dies für die Ueberkreuzungen einer Curve oder eines Streifens schon oben auf Seite 110 von uns ausgeführt worden ist.

Man theile jeder Curve einen bestimmten Sinn — Pfeil — zu, in dem sie durchlaufen werden soll. Eine Ueberkreuzung soll positiv oder rechtssinnig heissen, wenn, sobald man in der Richtung des Pfeiles der obern, dem Beschauer zugewendeten Curve blickt, der Pfeil der untern Curve von rechts zur Ueberkreuzungsstelle kommt, nach links sie verlässt. Die Seite, von welcher man die Ebene der Curven ansieht, hat hierbei keinen Einfluss auf die Bestimmung. Dagegen ändert sich allerdings der Sinn der Ueberkreuzung, sobald man den Pfeil einer der beiden Curven umdreht, was bei der Bestimmung des Charakters der Ueberkreuzungen einer Curve nicht der Fall ist. Die Unterscheidung, welche Ueberkreuzungen gleichen, welche entgegengesetzten Sinn haben, ist aber wieder unabhängig von der Richtung der Pfeile, mit anderen Worten, es ist der „relative" Sinn der Ueberkreuzungen eindeutig bestimmt; ebenso auch der absolute Werth der Differenz $\delta - \lambda$, wo δ die Anzahl der positiven, λ die der negativen gegenseitigen Ueberkreuzungen beider Curven bedeutet.

Diese Differenz $\delta - \lambda$ ist bei Unveränderlichkeit der Pfeile für stetige Gestaltsveränderungen beider Curven, die unter Wahrung der Undurchdringlichkeit derselben vorgenommen werden, eine Invariante, da bei diesen Aenderungen neue Doppelpunkte nur in Paaren, deren Individuen entgegengesetzten Ueberkreuzungssinn haben, gewonnen oder verloren werden, indem irgend zwei (endlose) Theile beider Curven sich gegeneinander-übereinander oder übereinander-auseinander schieben.

Für die beiden Randcurven eines Bandes wählen wir die Pfeile so, dass sie in den benachbarten nebeneinander herlaufenden Theilen beider Curven gleichen Sinn haben, besser gesagt so, wie sie sich ergeben, wenn man dem ganzen Bande einen bestimmten Sinn beilegt, indem es von einem Querschnitt durchlaufen wird. Unter Festhaltung dieser Beschränkung über die Pfeilrichtung wird das Vorzeichen der Ueberkreuzungen des Weiteren von der Pfeilstellung unabhängig, da eine Aenderung derselben den Sinn in beiden Curven ändert.

An einem flachgedrückten Bande zeigen sich zwei Arten von Singularitäten: Knickungs- und Ueberkreuzungsstellen. Während bei der früheren, von der Torsion des gestreckten oder ringförmigen Bandes ausgehenden Begriffsfassung nur die ersteren unmittelbar evident zur Torsion beitragen, die letzteren nur auf Umwegen als äquivalent gewissen Torsionen erkannt

wurden, erscheinen beide Singularitäten bei unserer gegenwärtigen Begriffsfassung nur gradweise verschieden.

Jede Knickung führt eine Ueberkreuzung beider Curven herbei und zwar eine positive für die Form von Figur 10, eine negative für die Form von Figur 11. Für die geradlinig begrenzten und undehnsamen Papierbänder lassen sich beide Formen folgendermassen bequem auseinander halten:

Nimmt man seinen Augpunkt über einem Punkte des Winkels $< \pi$, den beide in der Knickung zusammenstossende Bandtheile bilden, und denkt sich den Scheitel dieses Winkels vom Beschauer weggewendet ($\wedge$), so hat man eine Plus-Ueberkreuzung vor sich, wenn der obere, dem Auge nähere Bandtheil nach rechts, eine Minus-Ueberkreuzung, wenn er nach links zieht.

Jede Ueberkreuzung des Bandes führt zwei gleichsinnige Ueberkreuzungen beider Curven herbei, und zwar zwei positive oder zwei negative, je nachdem die Bandüberkreuzung nach der auf Seite 110 gegebenen Definition positiv oder negativ ist.

Die Differenz der sämmtlichen in den Knickungen und Ueberkreuzungen des Bandes enthaltenen positiven und negativen Randcurvenüberkreuzungen ist die für das Band charakteristische Zahl $\nu = \delta - \lambda$, um die es sich handelt, und für welche man, wenn man will, den Namen Torsionszahl beibehalten kann, insofern sie in den Fällen des tordirten gestreckten oder unverknoteten ringförmigen Bandes nach Multiplication durch π offenbar übereinstimmt mit der von Simony definirten Torsion. Eine noch schärfere Begriffstheilung aber würde man erhalten, wenn man mit Torsion nur solche Erscheinungen an Bändern bezeichnete, welche sich durch Drehung sei es eines variablen Querschnittes, einer variablen Ebene oder dergl. ausreichend definiren lassen bei jeder Gestalt des Bandes;* mit der obigen Eigenschaft scheint mir dies nach meinen bisherigen Versuchen nicht der Fall zu sein.

Doch es liegt uns noch ob, unsere charakteristische Zahl auch für einrandige Bänder zu definiren. Es ergiebt sich hier eine kleine Schwierigkeit. Während nämlich bei zweirandigen Bändern nur die Ueberkreuzungen der Curven untereinander zur Bestimmung von ν beigezogen, die Ueberkreuzungen der Curven mit sich selbst vernachlässigt wurden, fliessen bei einrandigen Bändern beide Arten von Ueberkreuzungen in eine zusammen, und man ist in Gefahr, auf eine mit der früheren wenig verwandte Zahl ν zu gerathen. Man kann sich aber dadurch helfen, dass man das einrandige Band quer durchschneidet, so, dass der Querschnitt keine Ueberkreuzung oder Knickung passirt, und durch Hinzufügen einer Torsion des einen Endes um π und Wiedervereinigung der Enden ein zweirandiges Band herstellt, dessen $\nu = \alpha$ nach dem Obigen bestimmt werden kann. Dem

* Wohl dasselbe, was Simony unter „äusserer Verdrehung“ versteht.

einrandigen Bande wird man dann die charakteristische Zahl $\nu = \alpha - 1$ zuordnen. Zu zeigen ist dann jedenfalls, dass es gleichgiltig ist, an welcher Stelle der Querschnitt angebracht wird.

Für die Knickungsstellen ändert sich offenbar gar nichts, wo man auch den Querschnitt hin verschieben mag. Bei einer Ueberkreuzungsstelle ist es möglich, dass bei einer Lagenänderung des Querschnittes die beiden Punkte, welche zuerst Selbstüberkreuzungen beider Randcurven vorstellten, mit jenen, welche gegenseitige Ueberkreuzungen waren, die Rollen tauschen. Dies macht aber für ν nichts aus, weil das Vorzeichen aller vier Ueberkreuzungen das nämliche ist.

Das Resultat der obigen Vorschrift für einrandige Bänder ist also das nämliche, als ob man sämmtliche Ueberkreuzungen der Randcurve mit sich selbst an dem unveränderten Bande bestimmt, die Anzahl der von Bandüberkreuzungen herrührenden sowohl positiven als negativen aber nur halbirt in die Differenz $\delta - \lambda$ hätte eingehen lassen.

Ein etwas organischeres Verfahren der Bestimmung von ν bei einrandigen Bändern scheint übrigens wünschenswerth. Die eben berührte Schwierigkeit ist von allgemeinerer Bedeutung; sie behindert immer wieder den Uebergang von der Theorie der Verschlingung zweier Curven zur Verknotung einer Curve und ist auch in Böddicker's Arbeit: „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen etc." mehr verdeckt als gehoben. Der Verfasser hofft auf diese Dinge an anderer Stelle zurückzukommen.

III.

Beziehung der Zahl ν zu dem Gauss'schen Verschlingungsintegral.

Die Zahl $|\nu| = |\delta - \lambda|$ für zwei getrennte Randcurven ist eine gerade Zahl, weil $\delta + \lambda$ als Anzahl der Schnittpunkte zweier geschlossenen Curven in einer Ebene gerade ist. Sie ist gleich dem absoluten Werth des halben Coefficienten von π in dem Werthe, den das Gauss'sche Integral

$$\int\int \frac{\begin{vmatrix} x'-x & dx & dx' \\ y'-y & dy & dy' \\ z'-z & dz & dz' \end{vmatrix}}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = 4\,m\pi$$

annimmt, wenn die Integrationen über die Punkte x, y, z der einen und die Punkte x', y', z' der andern Curve ausgedehnt werden. m zählt hierbei die Differenz der positiven und negativen „Umschlingungen" der einen Curve C' um die andere C.

Böddicker* hat gezeigt, dass m zugleich die Differenz der Anzahlen zweier Schnittpunktsgruppen ist; die erste Gruppe enthält jene Schnittpunkte,

* Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen etc. Stuttgart 1876.

in welchen C eine von C' begrenzte zweiseitige Fläche in einem Sinne durchsetzt, die zweite Gruppe enthält die Schnittpunkte entgegengesetzten Sinnes.

Dies vorausgesetzt, lässt sich die Gleichung:

$$|\nu| = |2m|$$

folgendermassen beweisen:

C und C' seien wieder in einer Ebene gedacht, mit Unterscheidung eines „oben" und „unten" an den Kreuzungspunkten.

Von einem beliebigen Punkte p' der Ebene, der sich in endlicher Entfernung von der Curve befindet, denke man sich die Radienvectoren R' nach den Punkten c' von C' gezogen. Die R' bilden eine plattgedrückte Kegelfläche $\mathfrak{K}'$ mit der Spitze p' und der Randcurve C', welche im Allgemeinen die Ebene mit mehreren, an verschiedenen Orten verschieden vielen Blättern bedeckt. An diesen Blättern lässt sich im Anschluss an die Curvenkreuzpunkte ein „oben" und „unten" unterscheiden, wenn auch nicht in völlig bestimmter Weise. Bis zu einem gewissen Grade bleiben nämlich die Lagen der R', nach welchen sich die Kegelfläche selbst durchsetzt und ein Blatt in Bezug auf ein anderes von „unten" nach „oben" übergeht, willkürlich. Diese Willkürlichkeit schwindet, wenn man C, C' und $\mathfrak{K}'$ als Projectionen zweier bestimmten, im Raum gewundenen Curven und eines im Raum sich ausdehnenden Kegels ansieht.

Der Sinn, in welchem die c' auf C' durchlaufen werden, überträgt sich auf die R' der Fläche $\mathfrak{K}'$, wodurch es gelingt, die beiden Seiten der Fläche zu unterscheiden; die eine, von der aus betrachtet die R' die Uhrzeigerbewegung haben und die wir willkürlich die rechte, positive Seite der Fläche nennen, die andre, wo das entgegengesetzte der Fall ist. Diese Unterscheidung der Seiten bleibt auch bestehen für die Sectoren, in welche wir die $\mathfrak{K}'$ jetzt zerlegen wollen. Jeder dieser Sectoren $\mathfrak{S}'$ bedecke die Ebene in seiner ganzen Ausdehnung einfach und sei von zwei verschiedenen Radienvectoren R'_1 und R'_2 seitlich begrenzt. Eine Zerlegung der Fläche in Sectoren, welche diese Bedingungen erfüllen, ist immer möglich. Das dritte Stück der Begrenzung, der Curve C' angehörig, heisse S'. Es darf sich offenbar nicht selbst schneiden. Wir geben dem Contur eines jeden $\mathfrak{S}'$ einen bestimmten Umkreisungssinn, übereinstimmend mit dem für S' geltenden Pfeile. Hierdurch erhalten auch die R'_1, R'_2 bestimmte Sinne und zwar wird jeder dieser Radienvectoren als Grenze für zwei benachbarte Sectoren zweimal in entgegengesetzten Weisen in Anspruch genommen.

Betrachten wir nun, wie die Curve C einen beliebigen der Sectoren $\mathfrak{S}'$ passiren kann. Denkt man sich auf C von einem bestimmten Anfangspunkte a aus einen Punkt im Sinne des Pfeiles laufen, so wird derselbe bei der Rückkehr nach a den Sector $\mathfrak{S}'$ ebenso oft betreten als verlassen haben; und es werden diese regelmässig abwechselnden Ein- und Austritte, d. h. die Ueberkreuzungen von C mit dem Contur von $\mathfrak{S}'$, paarweise einander

zugeordnet werden können. Die beiden Curvenüberkreuzungen eines solchen Paares sollen auf C einander unmittelbar folgen und können

α) vom nämlichen Sinne,

β) vom entgegengesetzten Sinne

sein.

Im Falle α) muss die Curve C, wenn sie beim Eintritt über dem Contur von $\mathfrak{S}$ läuft, beim Austritt unter demselben laufen, und umgekehrt, woraus zu schliessen ist, dass C zwischen den beiden Ueberkreuzungen den Sector einmal öfter im einen Sinn durchsetzt hat, als im entgegengesetzten.

Im Falle β) dagegen erfolgen Ein- und Austritt von C auf der nämlichen Flächenseite von $\mathfrak{S}$; der Sector muss gerade so oft im einen wie im andern Sinne durchsetzt worden sein.

Und zwar entspricht nach den oben getroffenen Festsetzungen über die Vorzeichen zwei positiven Ueberkreuzungen eine Flächendurchsetzung von der positiven zur negativen Seite, was wir willkürlich als positive Durchsetzung bezeichnen dürfen, etc.

Es gilt natürlich auch umgekehrt: Wenn C beim einmaligen Passiren eines Sectors denselben einmal öfter positiv als negativ durchsetzt, so entstehen zwei positive Ueberkreuzungen etc.

Da nun feststeht, dass bei einmaligem Passiren des Sectors zwei positiven Ueberkreuzungen eine überschüssige positive, zwei negativen Ueberkreuzungen eine überschüssige negative, zwei entgegengesetzten Ueberkreuzungen keine überschüssige Flächendurchsetzung entspricht, so ist leicht ersichtlich, wie sich durch Summation über die verschiedenen Durchschreitungen eines Sectors, dann über die sämmtlichen Sectoren der gewünschte Satz

$$|\nu| = |2m|$$

nach den getroffenen Vorzeichenbestimmungen sogar

$$\nu = 2m$$

ergiebt. Hierbei ist nur auf das Eine noch aufmerksam zu machen, dass die für die Ueberkreuzungen von C mit sämmtlichen Sectorconturen gebildete Differenz $\delta - \lambda$ deswegen direct gleich ν, d. h. gleich der für die Ueberkreuzungen von C mit C' gebildeten Differenz $\delta - \lambda$ ist, weil jede Ueberkreuzung von C mit einem R'_1 oder R'_2 zweimal auftritt, das eine Mal positiv, das andere Mal negativ (s. oben Seite 115, Zeile 9 v. u.).

München, 30. Juli 1891.

IX.

Ueber Tetraederpaare.

Von

Dr. P. Muth

in Osthofen (Rheinhessen).

Hierzu Taf. V, Fig. 1–3.

a) Im Folgenden soll das Problem behandelt werden, *einem gegebenen Tetraeder* $ABCD$ *ein zweites Tetraeder* $\alpha\beta\gamma\delta$ *ein- und zugleich umzuschreiben, wenn von letzterem Tetraeder die Ecken* α *in der Ebene* BCD *und* γ *in der Ebene* ABD *beliebig angenommen werden.*

Wir treffen nun zunächst die Festsetzung:
$\alpha\, BCD$, $\beta\, CDA$, $\gamma\, DAB$, $\delta\, ABC$ d. h. α liegt in BCD, nach Annahme, β soll in CDA liegen u. s. w. und haben es alsdann mit 24 *verschiedenen Aufgaben* zu thun, da die Reihenfolge, nach welcher die Seitenflächen des Tetraeders $\alpha\beta\gamma\delta$ durch die Ecken des Tetraeders $ABCD$ gehen sollen, eine willkürliche ist.

Fordern wir:

I) $$\alpha\beta\gamma D,\quad \beta\gamma\delta A,\quad \gamma\delta\alpha B,\quad \delta\alpha\beta C,$$

also dass $\alpha\beta\gamma$ durch D gehe u. s. w., so haben wir eine Aufgabe,* welche bereits Möbius (Cr. J. Bd. III, S. 275; Bd. X, S. 324) behandelt und gelöst hat. Möbius zeigt, dass bei gegebenem α und γ noch *unendlich viele* Lösungen existiren; dies hat auch J. Steiner in seinen „Systematischen Entwickelungen“ S. 248 in höchst einfacher Weise nachgewiesen, sowie dass auch in folgenden drei Fällen:

II) $$\begin{cases} 1)\ \alpha\beta\gamma A,\ \alpha\beta\delta B,\ \alpha\gamma\delta C,\ \beta\gamma\delta D,\\ 2)\ \alpha\beta\delta A,\ \alpha\beta\gamma B,\ \beta\gamma\delta C,\ \alpha\gamma\delta D,\\ 3)\ \alpha\gamma\delta A,\ \beta\gamma\delta B,\ \alpha\beta\gamma C,\ \alpha\beta\delta D,\end{cases}$$

bei beliebigem α und γ *unendlich viele* Lösungspaare $\beta\delta$ vorhanden sind.

---

* Tetraeder dieser Lage I behandelt auch Herr J. Neuberg: Sur les tétraèdres de Möbius. (Liège) 1885; daselbst werden vier Gerade beliebig angenommen und es sollen auf diesen vier Punktpaare $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ $D\delta$ bestimmt werden, welche zwei Tetrader der Lage I bilden; es giebt unendlich viele Lösungen. l. c. S. 14.

Prüft man nun die noch *übrigen 20 Fälle* auf ihre Lösbarkeit, indem man den von Steiner l. c. bei den vier ersten Fällen eingeschlagenen Weg befolgt, so erkennt man, *dass in jedem dieser Fälle bei gegebenem α und γ eine einzige (eigentliche) Lösung vorhanden ist.* Greifen wir z. B. den Fall

$$\text{III)} \quad \begin{cases} \alpha BCD, \ \beta ACD, \ \gamma ABD, \ \delta ABC, \\ \alpha\beta\gamma A, \ \ \beta\gamma\delta B, \ \ \gamma\delta\alpha C, \ \ \delta\alpha\beta D \end{cases}$$

heraus. α und γ werden in BCD resp. ABD beliebig angenommen (Fig.1); β muss liegen in ACD und $A\alpha\gamma$, also auf dem Schnitt AF dieser Ebenen, δ soll in ABC und $C\alpha\gamma$ liegen, also muss es in den Schnitt CG dieser Ebenen liegen, ferner muss die Gerade $\beta\delta$ die Geraden $B\gamma$ und $D\alpha$ schneiden; wir müssen also diejenigen beiden Geraden suchen, welche AF, CG, $B\gamma$, $D\alpha$ schneiden. Die Gerade $\alpha\gamma$ schneidet zwar diese vier windschiefen Geraden, liefert aber eine *uneigentliche* Lösung, ein in *vier Punkte einer Geraden degenerirtes Tetraeder.* Es handelt sich nun um die einfachste Construction der zweiten Geraden (Fig. 1).* Ich denke mir, ein Punkt β bewege sich auf AF, alsdann werden die Ebenen $B\gamma\beta$ und $D\alpha\beta$ um $B\gamma$ resp. $D\alpha$ projectivische Ebenenbüschel beschreiben, ihr Durchschnitt $\beta\delta$ aber ein einfaches Hyperboloid erzeugen, auf welchem $\alpha\gamma$ liegt, welches also von der Ebene $C\alpha\gamma = C\alpha G$ berührt wird. Diese Ebene enthält noch einen Strahl der Regelschaar $D\alpha$, $B\gamma$, AF oder mit anderen Worten, indem $\beta\delta$ das Hyperboloid beschreibt, schneidet es die Ebene $C\alpha\gamma G$ in einer Geraden, welch' letztere GC in dem gesuchten Punkt δ trifft.

Rückt β nach A, so ist Ebene $B\gamma\beta = B\gamma A = BDA$ und schneidet $D\alpha\beta = D\alpha A$ in der Geraden DA, AD trifft $C\alpha\gamma G$ in K. Fällt β nach F, so schneiden sich $B\gamma F$ und $D\alpha F = B\alpha F$ in BF; diese Gerade schneidet Ebene $C\alpha\gamma$ in J. KJ schneidet CG in dem gesuchten Punkt δ, worauf sich β leicht finden lässt.

Analog erledigen sich sämmtliche übrigen Fälle.

b) Construirt man nun bei gegebenem α und γ Tetraeder, welche jede der 24 vorgeschriebenen Lagen aufweisen, so hat man es zwar mit 24 verschiedenen Figuren, aber *nur mit 5 verschiedenen Arten der gegenseitigen Einschreibung* zu thun. Betrachten wir, um dies klar zu legen, wieder den Fall:

$$\text{III)} \quad \begin{cases} \alpha BCD, \ \beta CDA, \ \gamma DAB, \ \delta ABC, \\ \alpha\beta\gamma A, \ \ \beta\gamma\delta B, \ \ \gamma\delta\alpha C, \ \ \delta\alpha\beta D. \end{cases}$$

Schreiben wir hier für α und A (da ja die Bezeichnung willkürlich ist) β und B, statt β und B aber α und A, so haben wir folgende Lage:

---

* In Fig. 1 ist die ganze Construction ausgeführt; die Schnittgeraden fallen im Allgemeinen nicht zusammen. Man sehe auch die Fig. 2 u. 3 nach.

$$\alpha BCD,\ \beta ACD,\ \gamma ABD,\ \delta ABC,$$
$$\alpha\gamma\delta A,\ \ \alpha\beta\gamma B,\ \ \beta\gamma\delta C,\ \ \alpha\beta\delta D,$$

die unter jenen 20 Fällen auftritt. Nehmen wir solche Vertauschungen vor, welche die Vorschrift: αBCD, βACD, γABD, δABC ungeändert lassen, dann bleibt auch die Lage I ungeändert. Dagegen gehen die Lagen der Gruppe II in einander über; Gruppe II repräsentirt also *eine* Art der gegenseitigen Einschreibung. Aus:

III) $$A\alpha\beta\gamma,\ B\beta\gamma\delta,\ C\alpha\gamma\delta,\ D\alpha\beta\delta$$

gehen durch die besprochenen Vertauschungen *6 Lagen* hervor.

Eine weitere Gruppe ist durch

IV) $$A\beta\gamma\delta,\ B\alpha\beta\gamma,\ C\alpha\beta\delta,\ D\alpha\gamma\delta$$

characterisirt und enthält *6 Fälle.*

Schliesslich umfasst die Gruppe V die noch übrigen *8 Fälle;* dieselbe ist durch

V) $$A\beta\gamma\delta,\ B\alpha\beta\delta,\ C\alpha\beta\gamma,\ D\alpha\gamma\delta$$

bestimmt. Also:

„*Zwei Tetraeder können einander auf fünf verschiedene Arten um- und zugleich eingeschrieben werden.*"

Ferner:

„*Es können Tetraeder jeder dieser 5 Lagen construirt werden, wobei man das Tetraeder $ABCD$ beliebig und von dem Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$ irgend zwei Eckpunkte in den betreffenden Ebenen beliebig annehmen kann.*"

Denn wir haben gezeigt, dass man z. B. die Lage IV construiren kann bei beliebig angenommenen α und γ; ebenso alle Fälle, welche in der Gruppe IV enthalten sind, d. h. aber mit anderen Worten, dass man auch α und δ, oder α und β u. s. w. beliebig annehmen kann, wenn es sich darum handelt, ein Tetraederpaar zu erzeugen, welches die Lage IV

$$\begin{cases} \alpha BCD,\ \beta CDA,\ \gamma DAB,\ \delta ABC \\ A\beta\gamma\delta,\ B\alpha\beta\gamma,\ C\alpha\beta\delta,\ D\alpha\gamma\delta \end{cases}$$

aufweist.

Diese Lage IV zeichnet sich jedoch vor allen übrigen dadurch aus, dass die Punkte β und δ *in eine Kante* des ersten Tetraeders $ABCD$ zu liegen kommen, wenn man α in BCD und γ in ABD *beliebig* annimmt;* dadurch tritt eine gewisse Unbestimmtheit auf, welche beseitigt wird, wenn man etwa α und β beliebig annimmt. Den Grund dieses Verhaltens werden wir im folgenden Abschnitt kennen lernen, in welchem eine höchst einfache Construction von Tetraederpaaren der Lage IV gegeben wird.

c) Nimmt man in einer Ebene vier Punkte α, B, C, D beliebig an (Fig. 2), bezeichnet den Schnittpunkt der Geraden BC und $D\alpha$ mit x, den der Ge-

---

* Ebenso α und γ, wenn β und δ gleichzeitig beliebig angenommen werden. Vergl. Fig. 2.

raden CD und $B\alpha$ mit y, so trifft die Gerade xy die Gerade BD in einem Punkte b derart, dass die Schnittpunkte einer beliebig durch b gelegten Geraden g mit BC und $B\alpha$, BD und $C\alpha$, CD und $D\alpha$, die mit aa', bb', cc' bezeichnet werden mögen, drei Punktpaare eine Involution bilden.

Fasst man nämlich das Viereck $C\alpha xy$ in's Auge, so folgt die Richtigkeit des Behaupteten aus einem bekannten Satze über die Schnittpunkte einer Geraden mit den Seiten eines vollständigen Vierecks.

Nun giebt es im Allgemeinen eine Curve dritter Classe K^3, deren Tangenten drei Geradenpaare* in Involution schneiden; diese zerfällt in unserem Falle in den Punkt b und eine Curve zweiter Classe, welche wiederum in die Punkte C und α zerfällt.

Also *nur* die Geraden des Punktes b schneiden BC und $B\alpha$, BD und $C\alpha$, CD und $D\alpha$ in der Involution aa', bb', cc'. Es liegen aber auch die Paare: ac', bb', ca' nach bekanntem Satz involutorisch, die sechs Punkte a, b, c, a', b', c' liegen also *zweifach* involutorisch. Eine kleine Ueberlegung zeigt, dass b und b' sowohl durch a und c, als auch durch a' und c' harmonisch getrennt werden.

Ausserhalb der Ebene BCD nehmen wir jetzt irgend einen Punkt A an, verbinden ihn mit a, b und c durch Gerade, nehmen ferner auf Ac einen Punkt β beliebig an und construiren schliesslich γ als Schnittpunkt der Geraden Ab und $\beta a'$ und δ als Schnittpunkt von aA und $b'\beta$; dann geht die Gerade $\gamma\delta$ durch c', also zeigen die beiden Tetraeder $ABCD$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ die Lage IV. Denn die Gerade $\beta\delta$ schneidet die Gerade $C\alpha$ u. s. w.

Von dem zweiten Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$ konnten wir also wieder α in BCD und β in ACD beliebig annehmen, wodurch die Gerade g durch b und alle andern Punkte bestimmt sind. γ fällt dabei *immer* in die Gerade Ab. Nehmen wir also ausser α noch γ in ABD *beliebig* an, dann muss ein Ausnahmefall eintreten und in der That sahen wir am Schluss der Abschnitte b), dass alsdann β und δ in die Kante AC fallen. Nimmt man dagegen γ auf Ab an, so giebt es unendlich viele Lösungspaare β, δ; die Geraden, welche zusammengehörige β und δ verbinden, liegen auf einem Hyperboloid.

d) Es seien a, b, c drei Punkte einer Geraden g (Fig. 3); ich ordne dem Punkt a den Punkt b, diesem den Punkt c, diesem wieder a zu, bestimme also auf g eine cyklische Projectivität dritten Grades; a', b', c' sei ein zweites Tripel derselben. Dann ist die Figur: $aba'b'$ project. zu $bcb'c'$, letztere aber project. zu $c'b'cb$, also auch $aba'b'$ project. zu $c'b'cb$, also liegen die Paare:

1) ac', bb', ca'

in Involution. Analog zeigt man, dass zugleich

2) aa', bc', cb'

und

3) ab', ba', cc'

* D. h. drei zerfallende Kegelschnitte; K^3 ist demnach die Hermite'sche Curve des betreffenden Netzes.

involutorisch liegen. In Figur 3 sind solche sechs Punkte gezeichnet. Man kann nun durch g eine Ebene E_1 legen und ein Viereck αBCD in derselben zeichnen, dessen Gegenseiten $B\alpha$ und CD durch a resp. c' gehen, von dem BD durch b' und $C\alpha$ durch b, $D\alpha$ durch c und BC durch a' geht, wobei die Beziehung 1) benutzt wird. Alsdann construirt man in einer zweiten durch g beliebig gelegten Ebene E_2 ein Viereck $A\beta\gamma\delta$ derart, dass $A\gamma$ durch b', $\beta\delta$ durch a u. s. w. hindurchgeht, was gemäss der involutorischen Lage 3) immer möglich ist. Die Punkte $ABCD$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ bilden dann zwei Tetraeder, welche die mit V bezeichnete Lage besitzen.

Geht man von A, B, C, D, α und γ als gegebenen Punkten aus [vergl. a], so ist zunächst die Gerade g zu finden, welche aus den Seiten des Vierecks αBCD zwei Tripel abc und $a'b'c'$ herausschneidet und durch den Punkt b' geht, in welchem die Ebene BCD von $A\gamma$ getroffen wird. Es giebt nun [vergl. c] eine Curve 3. Classe, deren Tangenten die Seiten des Vierecks αBCD so schneiden, dass abc, $a'b'c'$ zwei Tripel einer cyklischen Projectivität bilden; diese Curve zerfällt aber hier in den Punkt α und eine Curve 2. Classe, welche von der Geraden CD in ihrem Schnittpunkt mit $B\alpha$, von DB in ihrem Schnittpunkt mit $C\alpha$, endlich von BC in ihrem Schnittpunkt mit $D\alpha$ berührt wird.

Von b' gehen an diese Curve zwei Tangenten, nämlich BD und die gesuchte Gerade g; g kann also durch einfache Construction gefunden werden*, worauf noch β und δ, wie oben, zugefügt werden können.

e) 1. Die Geraden AB, CD, $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ gehören einer Regelschaar an, wenn die beiden Tetraeder $ABCD$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ die Lage I zeigen, ebenso AC, BD, $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ und AD, BC, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$. (Steiner, l. c. Anmerkung. Steiner verwechselt daselbst die Lage I mit Lage II.) Ferner liegen die beiden Tetraeder dreifach hyperboloidisch, indem $A\beta$, $B\alpha$, $C\delta$, $D\gamma$ vier Gerade einer Regelschaar bilden, ebenso $A\gamma$, $B\delta$, $C\alpha$, $D\beta$ und $A\delta$, $B\gamma$, $C\beta$, $D\alpha$ (Schur, Math. Ann. Bd. XX, S. 275). Ferner liegen die Geraden, in welchen die Ebenen BCD und $\alpha\gamma\delta$, ACD und $\beta\gamma\delta$, ABD und $\alpha\beta\gamma$, ABC und $\alpha\beta\delta$ sich schneiden, auf einem Hyperboloid; desgleichen treten noch zwei weitere hyperboloidische Lagen auf.

2. Wir untersuchen jetzt die Lage II:

$$\text{II)} \quad \begin{cases} \alpha BCD, & \beta ACD, & \gamma ABD, & \delta ABC \\ \alpha\gamma\delta A, & \beta\gamma\delta B, & \alpha\beta\gamma C, & \alpha\beta\delta D. \end{cases}$$

Wie sofort ersichtlich, werden die Geraden AD, BC, $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ von jeder der Geraden $A\delta$, $C\beta$, $B\gamma$, $D\alpha$ geschnitten. Ebenso AC, BD, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ von $A\gamma$, $B\delta$, $C\alpha$, $D\beta$, so dass hier *zwei Paar Gegenkanten des Tetraeders $ABCD$ mit den betreffenden Gegenkanten des Tetraeders $\alpha\beta\gamma\delta$ auf je einem Hyperboloid liegen*; *ausserdem liegen die beiden Tetraeder sowohl rücksicht-*

---

* In Figur 3 ausgeführt.

lich der Verbindungsgeraden ihrer Ecken, als auch rücksichtlich der Schnittgeraden ihrer Seitenflächen zweifach hyperboloidisch. Schreibt man nämlich für die Ebene ABC den einen Buchstaben D', für ACD B' u. s. w., δ' für $\alpha\beta\gamma$, γ' für $\alpha\beta\delta$ u. s. w., so wird die obige Lage II durch das Schema:

$$\begin{cases} A'\beta'\gamma'\delta', & B'\alpha'\gamma'\delta', & C'\alpha'\beta'\delta', & D'\alpha'\beta'\gamma', \\ \alpha'A'C'D', & \beta'B'C'D', & \gamma'A'B'C', & \delta'A'B'D' \end{cases}$$

dargestellt und es liegen somit die Geraden: $A'\delta' = (BCD,\ \alpha\beta\gamma)$, $C'\beta' = (ABD,\ \alpha\gamma\delta)$, $B'\gamma' = (ACD,\ \alpha\beta\delta)$, $D'\alpha' = (ABC,\ \beta\gamma\delta)$ auf einem Hyperboloid, ebenso die vier Geraden: $A'\gamma'$, $B'\delta'$, $C'\alpha'$, $D'\beta'$.

3. *Bei keiner der folgenden drei Lagen III, IV und V liegen Kanten des Tetraeders $ABCD$ mit Kanten des Tetraeders $\alpha\beta\gamma\delta$ auf einem Hyperboloid.* Aber betreffs der Lage III gilt folgender Satz:

„*Zwei Tetraeder, welche sich nach Art III gegenseitig eingeschrieben sind, liegen **vierfach hyperboloidisch** sowohl in Bezug auf die Verbindungsgeraden ihrer Eckpunkte, als in Bezug auf die Schnittgeraden ihrer Seitenflächen und können somit stets als zwei Quadrupel einer cyklischen Raumcollineation* aufgefasst werden.*“

Den ersten Theil dieses Satzes beweist man nach Analogie der vorhergehenden Betrachtungen. Der zweite Theil folgt dann aus einem von Herrn Schur, Math. Ann. Bd. XX, S. 270 gegebenen Satze. Man kann auch sagen:

„*Von den vierfach hyperboloidischen Tetraederpaaren, deren es überhaupt ∞^{18} giebt**, sind ∞^{16} einander gleichzeitig nach Art III ein- und umgeschrieben.*“

4. *Tetraederpaare der Lage IV liegen endlich zweifach hyperboloidisch sowohl bezüglich der Verbindungsgeraden ihrer Eckpunkte, als bezüglich der Schnittgeraden ihrer Seiten.* Bei Tetraederpaaren der Lage V treten *keine* hyperboloidische Lagen auf.

---

* Vergl. über solche Collineationen: Schroeter, Math. Ann. Bd. 20, S. 245. P. Muth, Math. Ann Bd. 33, S. 497.

** Schur, l. c. S. 270.

Kleinere Mittheilungen.

VII. Bemerkung zu einer dioptrischen Construction.

In einem Anhange zur „Entwickelung der Lehre von den dioptrischen Bildern mit Hilfe der Collineationsverwandtschaft“ hat Möbius (Werke Bd. 4; Berichte Sächs. Ges. Bd. 7, 1855) eine Construction angegeben, die einer Erweiterung für beliebige centrirte Systeme fähig ist und wegen ihrer Beziehung zu den dioptrischen Grundpunkten Beachtung verdient.

Es seien F und Φ' die Brennpunkte, H und H' die Hauptpunkte, auch K und K' die Knotenpunkte eines centrirten Systems brechender Kugelflächen, also $HF = \Phi' K'$ und $H'\Phi' = FK$ seine Brennweiten. Einem beliebigen Achsenpunkte P gehöre P' als Bildpunkt zu, so dass die in P und P' zur Achse senkrechten Ebenen p und p' einander conjugirt sind. Ist v_p das Bildgrössenverhältniss dieser Ebenen, so ist bekanntlich

$$1)\qquad \frac{PF}{HF} = v_p, \quad \frac{P'\Phi'}{H'\Phi'} = \frac{1}{v_p}, \quad PF.P'\Phi' = HF.H'\Phi'.$$

Für das dual entsprechende Winkelverhältniss w_p der Strahlbündel P und P' gilt ferner

$$2)\qquad w_p = \frac{P'H'}{PH} = -\frac{P'\Phi'}{HF}, \quad \frac{1}{w_p} = -\frac{PF}{H'\Phi'}.$$

Man errichte nun, eine beliebige durch die Achse gehende Ebene zur Zeichnungsebene wählend, Lothe zur Achse in den Brennpunkten F und Φ' und trage auf diesen die Strecken

$$3)\qquad FU = \Phi'V' = HF, \quad FV = \Phi'U' = H'\Phi'$$

auf, und zwar nach gleichen oder entgegengesetzten Seiten der Achse, je nachdem HF und $H'\Phi'$ entgegengesetzt oder gleich gerichtet sind. Hierauf construire man den Kreis, der U und U', also auch V und V' zu Gegenpunkten hat.

Dieser Kreis kann zunächst dazu dienen, zu einem gegebenen Achsenpunkte P den conjugirten P' zu finden. Denn schneidet PU den Kreis in M_p, so wird $M_p U'$ die Achse in P' treffen, wie aus rechtwinkligen ähnlichen Dreiecken der Figur ersichtlich ist. Es bestehen nämlich die Gleichungen

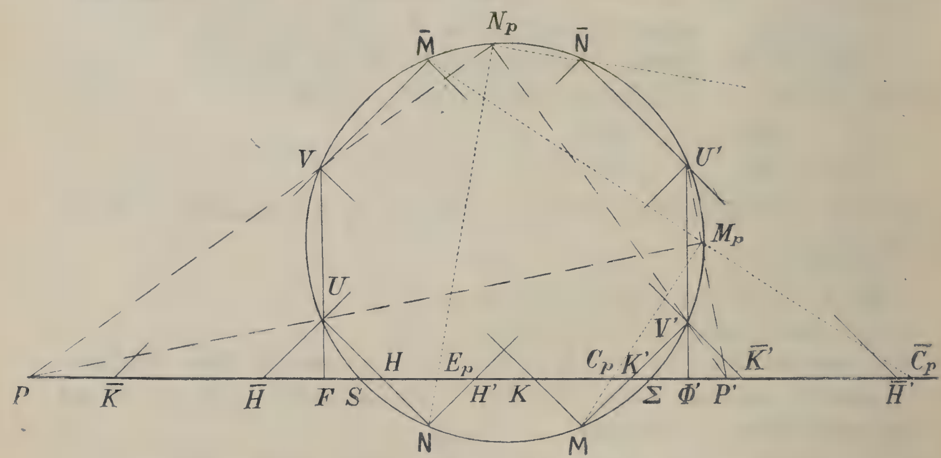
$$\frac{PF}{FU} = \frac{PM_p}{M_pP'} = \frac{\Phi'U'}{P'\Phi'},$$

aus denen, mit Rücksicht auf 3), folgt $PF.P'\Phi' = HF.H'\Phi'$. Soweit ist die Construction ein bekannter besonderer Fall von dem Durchschneiden projectiver Büschel auf einem Kegelschnitt. Die Punkte S und Σ, in denen der Kreis die Achse schneidet, sind die (reellen oder imaginären) symptotischen Punkte.

Aber wegen der mit Rücksicht auf 1) geltenden Beziehungen

$$\frac{PM_p}{M_p P'} = \frac{PF}{FU} = \frac{PF}{HF} = v_p$$

ist weiter ersichtlich, dass die Winkelhalbirenden des Winkels $PM_p P'$ die Strecke PP' in den Verhältnissen $\pm v_p$ theilen. Errichtet man also den zu UU' senkrechten Durchmesser und nennt M denjenigen Endpunkt desselben, durch den VK (Winkelhalbirende von UVU') und $V'K'$ gehen, den andern Endpunkt $\overline{\mathsf{M}}$, so schneidet die Gerade $\mathsf{M}M_p$ auf der Achse das Collineationscentrum C_p der Ebenen p und p' an. Eine durch C_p gehende Gerade lässt also zu einem beliebigen Punkte einer dieser Ebenen den conjugirten finden. Der Punkt, wo $\overline{\mathsf{M}}M_p$ die Achse schneidet, möge negatives Collineationscentrum $\overline{C_p}$ heissen.



Ebenso wie PU und $P'U'$ in M_p, schneiden sich auch PV und $P'V'$ auf einem Punkte N_p des betrachteten Kreises, und die Winkelhalbirenden des Winkels PN_pP' theilen PP' in den Verhältnissen $\pm w_p$. Das erkennt man auf Grund der Gleichungen 2) an den ähnlichen Dreiecken PFV, PN_pP', $V'\Phi'P'$. Nennt man N denjenigen Endpunkt des zu VV' senkrechten Durchmessers, durch den die Linien UH und $U'H'$ gehen, den andern Endpunkt $\overline{\mathsf{N}}$, so schneidet $\mathsf{N}N_p$ die Achse in dem Punkte E_p, in welchem die Collineationsebene der Bündel P und P' normal zur Achse steht. Die im Schnittpunkte $\overline{E}_p$ der Achse mit der Linie $\overline{\mathsf{N}}E_p$ zur Achse normale Ebene möge negative Collineationsebene heissen.

Die Figur lässt leicht erkennen, dass die Grundpunkte des Systems besondere Lagen der Punkte C, $\overline{C}$, E und $\overline{E}$ sind. Fällt P nach ∞, also

P' nach Φ', so rücken die Punkte in der angegebenen Reihenfolge nach dem zweiten Knotenpunkt K', negativem Knotenpunkt $\overline{K}'$, Hauptpunkt H', negativem Hauptpunkt $\overline{H}'$. Dagegen werden sie beim Punktepaare F_∞ zu den entsprechenden ersten Grundpunkten K, $\overline{K}$, H, $\overline{H}$. Auch übersieht man sogleich, wie für das Punktepaar HH' der Punkt C ins Unendliche fällt, für KK' ebenso E, für $\overline{H}\overline{H}'$ der Punkt $\overline{C}$ und $\overline{E}$ für $\overline{K}\overline{K}'$.

Der feste Kreis mit seinen 8 festen Punkten $UU'VV'\mathsf{M}\overline{\mathsf{M}}\mathsf{N}\overline{\mathsf{N}}$ bildet also eine für das dioptrische System auffallend charakteristische Figur. Die Construction conjugirter Punkte mit Hilfe dieses Kreises, der etwa als symptotischer Kreis bezeichnet werden könnte, ist unabhängig von der Existenz reeller symptotischer Punkte, auch auf teleskopische Systeme übertragbar, bei denen der Kreis in eine Gerade entartet. Bei Linsensystemen rücken die Punkte UV, sowie $U'V'$, ferner MN und $\overline{\mathsf{M}}\overline{\mathsf{N}}$ in je einen Punkt zusammen; das ist der von Möbius behandelte Fall. Dagegen rücken im Falle der Reflexion an einem sphärischen Spiegel die Punkte V und U', sowie U und V' zusammen.

Dresden. G. Helm.

VIII. Ein Widerspruch in Edlund's Theorie der Elektricität.

Die elektro-dynamische Lichttheorie Maxwell's, welche durch die Elektro-Optik, die kritische Geschwindigkeit (Rowland 1876), die Beziehungen zwischen Brechungscoefficient und die Dielektricitätsconstante, sowie durch die von Bezold (1870), Feddersen und besonders Hertz (1887—89) beobachteten elektrischen Schwingungen einen hohen Grad der Wahrscheinlichkeit erlangt hat, sieht in der Elektricität und im Lichte nur verschiedene Bewegungsformen desselben Mediums, welches wir Lichtäther nennen, während die Theorie Edlund's (Théorie des phénomènes électriques 1873—76) die Elektricität mit dem Aether als identisch annimmt, und die positive Elektricität als Aetherexcess, die negative als Aetherdeficit ansieht.

Der elektrische Strom ist nach Edlund ein Aetherfluss, verursacht durch den Ausgleich von Excess und Deficit.

Die Erklärung der Abstossung und Anziehung, der Influenz, des galvanischen Widerstands und besonders die des Nordlichts (1878) konnten in einfacher Weise mit dieser Theorie gegeben werden. Der erste Einwand, den aber Edlund durch den Uebergangswiderstand widerlegte, war der, dass durch einen luftleeren, also nichtätherfreien Raum von 2 mm Länge der stärkste Funkenstrom nicht durchgeht, der zweite von Föppel (1888) angegebene, dass die Glimmlichtströme im luftleeren Raum ausbleiben; Bude (1886) endlich hat die Unhaltbarkeit der Edlund'schen Nordlichttheorie dargethan, so dass diese Theorie heutzutage kaum mehr Anklang findet.

Im Folgenden theilen wir einen Versuch mit, welcher einen weiteren Beweis gegen die Edlund'sche Theorie der Elektricität abgeben dürfte.

Auf einer kleinen, vernickelten, ebenen Metallplatte wurde eine Planconvexlinse aufgelegt und beide von oben und unten durch grosse Glasplatten zusammengedrückt. Diese waren mit Schellack so weit überzogen, dass noch ein kleiner Raum zur Beobachtung der entstehenden Newton-schen Ringe* übrig blieb und in anderer Weise wurde noch für möglichste Isolation gesorgt.

Die Ringe wurden mit einem Mikroskop von etwa 130facher Linearvergrösserung beobachtet.

Mittelst einer Influenzmaschine wurde die Metallplatte so stark als möglich geladen und das Mikroskop (der Sicherheit halber) zur Erde abgeleitet.

Es handelte sich darum, ob der innerste Ring, bei dem sich eine Luftschicht von blos 0,0002 mm Dicke befindet, eine Formveränderung erleidet.

Wenn man die zugeführte Elektricität, welche sich in der Nähe des innersten Ringes auf der Metall- und Glasplatte befindet und welche wir bei der äusserst kleinen Entfernung von 0,0002 mm und der sehr grossen Ladung als gleichnamig annehmen müssen, eine Vermehrung des Aethers zur Folge hat, so müsste die Dichtigkeit desselben in der Nähe des innersten Ringes zunehmen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes also abnehmen und damit der Brechungscoefficient sich vergrössern.

Nun ergaben aber trotz der stärksten Ladungen (bei denen der Funke wiederholt zum Mikroskop übersprang) die Beobachtungen keine Veränderung der Ringe.

Um nun nachzuweisen, dass eine minimale Dichtigkeitsänderung bei mässiger Vergrösserung** noch wahrnehmbar sein müsste, gehen wir auf die Gleichungen des ersten Newton'schen Ringes ein. Die Dicke der Luftschicht am ersten Ringe ist:

$$e = \frac{\lambda}{4 \cos \alpha},$$

wo λ die Wellenlänge des homogenen Lichtes in der Luftschicht und α der Brechungswinkel in derselben ist, so dass

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{n^2}},$$

wo α_1 der entsprechende Einfallswinkel, n der Brechungscoefficient von Glas in Luft ist. Es ist daher:

$$e = \frac{\lambda}{4\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{n^2}}}.$$

* In Wirklichkeit wurde statt der Linse ein passendes Stück einer Fensterscheibe gewählt, so dass der erste Ring ungefähr 4 mm Durchmesser hatte.

** Versuche mit stärkeren Vergrösserungen dürften zum gleichen Resultat führen.

Ist nun R der Linsenradius, r der Radius des ersten Ringes und λ_1 die Wellenlänge im Glas, also $\lambda_1 = n.\lambda$, so ist

$$r^2 = 2R.e = \frac{R.\lambda_1}{2\sqrt{n^2 - sin^2\alpha_1}},$$

woraus:

$$dr = \frac{R.\lambda_1.n\,dn}{4r\sqrt[2]{n^2 - sin^2\alpha_1}} = \frac{r.n.dn}{2(n^2 - sin^2\alpha_1)}.$$

Nun war $r = 2$ mm, $n = \frac{3}{2}$, also für $\alpha_1 = 30^0$ und $\lambda = 0{,}0006$ mm (gelbes Licht):

$$e = 0{,}0002 \text{ mm},$$

wie schon oben angegeben wurde; ferner

$$dr = \frac{22}{7}\,dn.$$

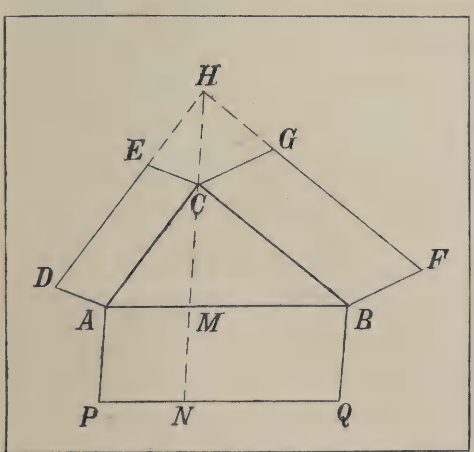
In der gewöhnlichen Sehweite von 25 *cm* kann man aber 2 Ringe noch gut als getrennt wahrnehmen bei einer Entfernung von $\frac{1}{10}$ mm, also von $dr = \frac{1}{1300}$ mm bei einer Vergrösserung von 130; demnach könnte eine Aenderung $dn = \frac{1}{4000}$ noch gut wahrgenommen werden.

Wir schliessen daher, dass n und damit die Aetherdichte sich nicht ändert, dass also die Elektricität nicht Aetherexcess oder Aetherdeficit sein kann.

Cannstatt. Dr. Ruoss, Gymnasiallehrer.

IX. Eine Verallgemeinerung des Pythagoräischen Satzes.

Ueber zwei Seiten AC und BC irgend eines Dreiecks ABC sind die beliebigen Parallelogramme $CADE$ und $CBFG$ construirt, von denen sich die verlängerten Seiten DE und FG in H schneiden, ferner bezeichne M den Durchschnitt von HC mit AB, auf der Verlängerung von CM sei $MN = HC$ genommen, endlich mögen aus MN und MA, sowie aus MN und MB die Parallelogramme $AMNP$ und $BMNQ$ gebildet sein; es ist dann



$$\text{Fl. } CADE = \text{Fl. } AMNP$$
und
$$\text{Fl. } CBFG = \text{Fl. } BMNQ$$

mithin die Summe von den über CA und CB construirten Parallelogrammflächen gleich der über AB stehenden Parallelogrammfläche $ABQP$.

In dem sehr speciellen Falle $AD = AC$, $BF = BC$, $\angle ACE = \angle BCG = \angle ACB = 90^0$ wird hieraus der Pythagoräische Satz.

Soest. Dr. Schönemann.

X. Kriterien der Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

Als eine praktisch rasch zum Ziele führende Regel zur Prüfung einer dekadischen Zahl auf ihre Theilbarkeit durch ein beliebiges n darf das folgende Verfahren angeführt werden. — Man stelle unter die Anfangs- und Endziffern des Dividendus passende, durch n theilbare Zahlen und setze unter die übrigen Ziffern des Dividendus beliebige, womöglich die höchsten Ziffern enthaltende Vielfache von n, subtrahire und wiederhole das Verfahren, bis eine Restzahl entsteht, an der man unzweifelhaft sehen kann, ob sie durch n theilbar ist oder nicht. Ist diese Restzahl durch n theilbar, so ist es auch die ganze Zahl Z.

Beispiele:

$$\begin{array}{r} Z = 41335882,\ n = 7. \\ 35777742 \\ \hline 555814 \\ 497714 \\ \hline 581. \end{array} \qquad \begin{array}{r} Z = 2747436796,\ n = 13. \\ 2691919126 \\ \hline 5551767 \\ 5291117 \\ \hline 26065. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} Z = 578702348,\ n = 14. \\ 568485428 \\ \hline 1021692 \\ 988442 \\ \hline 33250 \\ 28910 \\ \hline 434. \end{array} \qquad \begin{array}{r} Z = 1198740578,\ n = 29. \\ 1168789958 \\ \hline 2995062 \\ 2987232 \\ \hline 783 \\ 58 \\ \hline 203. \end{array}$$

Oldenburg, i. G. G. Speckmann.

X.

Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen.

Von

Prof. Dr. R. Müller
in Braunschweig.

Hierzu Taf. VI, Fig. 1–11.

Bei der Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene sind bekanntlich durch Angabe von vier unendlich benachbarten Systemlagen für jede Systemcurve die beiden Krümmungsmittelpunkte bestimmt, die zu den augenblicklich erzeugten Elementen ihrer Hüllbahncurve und der Evolute derselben gehören.* Durch Hinzufügung einer fünften Systemlage gelangen wir weiter zum Krümmungsmittelpunkt der Evolute jener Evolute — oder, wie wir uns kürzer ausdrücken, der zweiten Evolute der Hüllbahncurve. Zugleich ergiebt sich die Aufgabe, die Krümmungsradien der ersten Evoluten von Polbahn und Polcurve zu ermitteln, und es entsteht ferner die Frage nach denjenigen Systempunkten, die augenblicklich Bahnelemente mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreise durchlaufen.

Die hier angedeuteten Aufgaben bilden den Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Dabei werden wir mit Rücksicht auf den besseren Zusammenhang unserer Darlegungen gewisse Ergebnisse früherer Arbeiten in Kürze von Neuem ableiten, was um so zweckmässiger sein dürfte, als im Folgenden eine von der früheren abweichende Vorzeichenbestimmung angewendet wird.

§ 1. Formeln für den Krümmungsradius der ersten und der zweiten Evolute der von einer beliebigen Systemcurve erzeugten Hüllbahncurve.

Wir bezeichnen mit S, S', S'', S''', S'''' fünf unendlich benachbarte Lagen eines ebenen Systems, mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ beziehentlich die Pole zwischen je zwei auf einander folgenden Systemlagen. Dabei setzen wir im Folgenden stets voraus, dass $\mathfrak{P}$ ein endlicher Punkt ist, und dass $\mathfrak{Q}$ nicht mit $\mathfrak{P}$,

* Ueber die Krümmung der Bahnevoluten bei starren ebenen Systemen. Diese Zeitschrift, Bd. 36, S. 193. Construction der Krümmungsmittelpunkte der Hüllbahnevoluten bei starren ebenen Systemen. Ebendaselbst, S. 257.

sowie dass S' nicht mit S zusammenfällt.* Nehmen wir dann an, das System gelange aus der Anfangslage S in die Lagen S', S'', S''', S'''' durch auf einander folgende Drehungen um die Winkel $d\vartheta$, $d\vartheta + d^2\vartheta$, $d\vartheta + 2d^2\vartheta + d^3\vartheta$, $d\vartheta + 3d^2\vartheta + 3d^3\vartheta$, so dürfen wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mathfrak{S} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = du$ setzen, wo du und $d\vartheta$ von Null verschiedene positive Grössen sind.

Sei ferner $\mathfrak{t}$ die Tangente, $\mathfrak{n}$ die Normale der Polbahn im Punkte $\mathfrak{P}$, so soll unter positiver Polbahntagente von $\mathfrak{P}$ aus gerechnet der Theil von $\mathfrak{t}$ verstanden werden, auf welchem $\mathfrak{Q}$ liegt, und unter positiver Polbahnnormale der Theil von $\mathfrak{n}$, welcher nach einer Drehung um 90^0 im Sinne der Drehung des Systems mit der positiven Polbahntangente zusammenfällt. Wir bezeichnen weiter die Contingenzwinkel der Polbahn in den Punkten $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ bez. mit $d\tau$ und $d\tau + d^2\tau$ und rechnen $d\tau$ positiv, wenn das Element $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ um diesen Winkel im Sinne der Drehung des Systems gedreht werden muss, um mit $\mathfrak{t}$ zusammen zu fallen.

In Figur 1 bedeutet a eine beliebige Systemcurve in der Anfangslage S, a_1 bez. a_2 ihre erste und zweite Evolute, α die Hüllbahncurve von a mit den Evoluten α_1 und α_2, A den Krümmungsmittelpunkt desjenigen Punktes der Curve a, in welchem sie augenblicklich ihre Hüllbahn berührt, und A_1, A_2, A, A_1, A_2, die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte der Curven a_1, a_2, α, α_1, α_2. Gelangt das System in die unendlich benachbarte Lage S' (a', a'_1, a'_2), so giebt die aus $\mathfrak{Q}$ an a'_1 und α_1 gehende Tangente den Berührungspunkt von a' und α; wir bezeichnen die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte der Curven a', a'_1, a'_2, α, α_1, α_2 bez. mit B', B'_1, B'_2, B, B_1, B_2. Wir setzen nun $\mathfrak{P}A = r$, $AA_1 = s_1$, $A_1A_2 = s_2$, $\mathfrak{P}\mathsf{A} = \varrho$, $\mathsf{A}\mathsf{A}_1 = \sigma_1$, $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 = \sigma_2$, $\angle A\mathfrak{P}\mathfrak{t} = \varphi$, $\mathfrak{Q}B' = r + dr$, $B'B'_1 = s_1 + ds_1$, $\mathfrak{Q}\mathsf{B} = \varrho + d\varrho$, $\mathsf{B}\mathsf{B}_1 = \sigma_1 + d\sigma_1$, $\angle B'\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \varphi + d\varphi$; dabei bestimmen wir die Vorzeichen der einzelnen Grössen in folgender Weise: Wir betrachten r als wesentlich positiv und versehen s_2, ϱ, σ_2 mit dem positiven Vorzeichen, wenn die Strecken A_1A_2, $\mathfrak{P}\mathsf{A}$, $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$ mit $\mathfrak{P}A$ gleichgerichtet sind. Drehen wir $\mathfrak{P}A$ um $\mathfrak{P}$, bis A auf die positive Polbahnnormale fällt, so sollen s_1, σ_1 als positiv gerechnet werden, wenn AA_1 bez. $\mathsf{A}\mathsf{A}_1$ zur positiven Polbahntangente parallel sind. Endlich soll φ stets denjenigen zwischen 0^0 und 360^0 liegenden Winkel bedeuten, um welchen $\mathfrak{P}A$ im Sinne der Drehung des Systems gedreht werden muss, um mit der positiven Polbahntangente zusammen zu fallen.

Ziehen wir noch $\mathfrak{Q}\mathfrak{U} \perp \mathfrak{P}A$ und bezeichnen den Winkel der Geraden $\mathfrak{P}\mathsf{A}$ und $\mathfrak{Q}\mathsf{B}$ mit $d\psi$, so ist, von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung abgesehen,

$$1)\quad \sigma_1 = \frac{\mathsf{AB}}{d\psi} = \frac{\mathfrak{P}\mathsf{A} - \mathfrak{P}\mathfrak{U} - \mathfrak{Q}\mathsf{B}}{d\psi} = \frac{\varrho - du\cos\varphi - (\varrho + d\varrho)}{(\varphi + d\varphi + d\tau) - \varphi} = -\frac{d\varrho + du\cos\varphi}{d\varphi + d\tau}.$$

* Sonderfälle, die sich z. B. ergeben, wenn die Polbahn in $\mathfrak{P}$ eine Spitze hat, oder wenn Polbahn und Polcurve einander in $\mathfrak{P}$ osculiren, werden dadurch von der Betrachtung ausgeschlossen.

Nun ist bekanntlich

$$2)\qquad \varrho = \frac{r\,du\,sin\,\varphi}{du\,sin\,\varphi - r\,d\vartheta},$$

also

$$\varrho + d\varrho = \frac{(r+dr)\,du\,sin(\varphi + d\varphi)}{du\,sin(\varphi + d\varphi) - (r+dr)(d\vartheta + d^2\vartheta)}$$

$$= \frac{r\,du\,sin\,\varphi + (r\,d\varphi\,cos\,\varphi + dr\,sin\,\varphi)\,du}{du\,sin\,\varphi - r\,d\vartheta + du\,d\varphi\,cos\,\varphi - r\,d^2\vartheta - dr\,d\vartheta}$$

$$= \frac{r\,du\,sin\,\varphi}{du\,sin\,\varphi - r\,d\vartheta} + \frac{r^2(d^2\vartheta\,sin\,\varphi - d\vartheta\,d\varphi\,cos\,\varphi) + du\,dr\,sin^2\varphi}{(du\,sin\,\varphi - r\,d\vartheta)^2}\,du$$

und daher

$$3)\qquad d\varrho = \frac{r^2(d^2\vartheta\,sin\,\varphi - d\vartheta\,d\varphi\,cos\,\varphi) + du\,dr\,sin^2\varphi}{(du\,sin\,\varphi - r\,d\vartheta)^2}\,du.$$

Bezeichnet ferner $d\chi$ den Winkel der Geraden $\mathfrak{P}A'$ und $\mathfrak{Q}B'$, so folgt aus dem von $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}A'$ und $\mathfrak{Q}B'$ gebildeten Dreieck

$$4)\qquad sin\,d\chi = \frac{du\,sin(\varphi - d\vartheta)}{r+dr} = \frac{du\,sin\,\varphi}{r}.$$

Nun ist aber $\varphi + d\varphi + d\tau = \varphi - d\vartheta + d\chi$, also wird

$$5)\qquad d\varphi = -d\vartheta - d\tau + \frac{du\,sin\,\varphi}{r}.$$

Es ergiebt sich weiter, wenn $\mathfrak{U}'$ den Fusspunkt des von $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{P}A'$ gefällten Lothes bedeutet,

$$A'B' = \mathfrak{P}A' - \mathfrak{P}\mathfrak{U}' - \mathfrak{Q}B' = r - du\,cos\,\varphi - (r+dr) = -du\,cos\,\varphi - dr;$$

andererseits ist

$$A'B' = s_1\,d\chi,$$

oder nach 4)

$$A'B' = \frac{s_1}{r}\,du\,sin\,\varphi,$$

mithin erhalten wir

$$6)\qquad dr = -du\,cos\,\varphi - \frac{s_1}{r}\,du\,sin\,\varphi.$$

Durch Einsetzung der für $d\varphi$ und dr gefundenen Werthe verwandelt sich Gleichung 3) in

$$d\varrho = \frac{du}{(du\,sin\,\varphi - r\,d\vartheta)^2}\cdot$$

$$\left\{r^2d^2\vartheta\,sin\,\varphi + r^2d\vartheta(d\vartheta + d\tau)\,cos\,\varphi - r\,du\,d\vartheta\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi - du^2 sin^2\varphi\,cos\,\varphi - \frac{s_1}{r}du^2 sin^3\varphi\right\}$$

und dann folgt aus Gleichung 1) für den Krümmungsradius der ersten Evolute der Hüllbahncurve

$$7)\qquad \sigma_1 = -\frac{r^3\{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau)\,cos\,\varphi + d^2\vartheta\,sin\,\varphi\} - 3r^2du\,d\vartheta\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi - s_1du^2 sin^3\varphi}{(du\,sin\,\varphi - r\,d\vartheta)^3}\,du.$$

Aus Figur 1 ergiebt sich ferner:

$$\sigma_2 = \frac{A_1 B_1}{d\psi} = \frac{BB_1 - AA_1}{d\psi} = \frac{d\sigma_1}{d\varphi + d\tau},$$

oder nach 5)

$$8) \qquad \sigma_2 = \frac{r\, d\sigma_1}{du \sin\varphi - r\, d\vartheta}.$$

Nun ist nach 7)

$$\sigma_1 + d\sigma_1 = -\frac{du}{\{du \sin(\varphi + d\varphi) - (r + dr)(d\vartheta + d^2\vartheta)\}^3} \cdot [(r + dr)^3.$$
$$\{(d\vartheta + d^2\vartheta)(2d\vartheta + d\tau + 2d^2\vartheta + d^2\tau) \cos(\varphi + d\varphi) + (d^2\vartheta + d^3\vartheta) \sin(\varphi + d\varphi)\}$$
$$-3(r + dr)^2 du (d\vartheta + d^2\vartheta) \sin(\varphi + d\varphi) \cos(\varphi + d\varphi) - (s_1 + ds_1) du^2 \sin^3(\varphi + d\varphi)].$$

Setzen wir hier wieder für $d\varphi$ und dr die Werthe aus 5) und 6), und beachten wir, dass $ds_1 = A'_1 B'_1 = s_2 d\chi$, oder nach 4)

$$ds_1 = \frac{s_2}{r} du \sin\varphi$$

ist, so geht die rechte Seite nach einfacher Rechnung über in

$$\sigma_1 - \frac{3du}{r(du \sin\varphi - r\, d\vartheta)^4} \cdot [r^3\{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau) \cos\varphi + d^2\vartheta \sin\varphi\} - 3r^2 du\, d\vartheta \sin\varphi \cos\varphi$$
$$- s_1 du^2 \sin^3\varphi] . (r^2 d^2\vartheta + r\, du\, d\tau \cos\varphi - du^2 \sin\varphi \cos\varphi$$
$$- s_1 du\, d\vartheta \sin\varphi)$$
$$- \frac{du}{r(du \sin\varphi - r\, d\vartheta)^3} \cdot [r^4\{d\vartheta(3d^2\vartheta + d^2\tau) \cos\varphi + [d\vartheta(d\vartheta + d\tau)(2d\vartheta + d\tau)$$
$$+ d^3\vartheta] \sin\varphi\} - r^3 du\{3d\vartheta^2 \cos^2\varphi + 5d^2\vartheta \sin\varphi \cos\varphi$$
$$+ d\vartheta(5d\vartheta + 4d\tau) \sin^2\varphi\} + 3r^2 du^2 d\vartheta \sin\varphi$$
$$- 3r^2 s_1 du \sin\varphi\{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau) \cos\varphi + d^2\vartheta \sin\varphi\}$$
$$+ 3r s_1 du^2 (3d\vartheta + d\tau) \sin^2\varphi \cos\varphi - 3s_1 du^3 \sin^3\varphi \cos\varphi$$
$$- s_2 du^3 \sin^4\varphi],$$

und mit Rücksicht auf den so gefundenen Werth von $d\sigma_1$ erhalten wir aus 8) den Krümmungsradius der zweiten Evolute der Hüllbahncurve

$$\sigma_2 = -\frac{3du}{(du \sin\varphi - r\, d\vartheta)^5} \cdot [r^3\{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau) \cos\varphi + d^2\vartheta \sin\varphi\} - 3r^2 du\, d\vartheta \sin\varphi \cos\varphi$$
$$- s_1 du^2 \sin^3\varphi] . (r^2 d^2\vartheta + r\, du\, d\tau \cos\varphi - du^2 \sin\varphi \cos\varphi$$
$$- s_1 du\, d\vartheta \sin\varphi)$$
$$- \frac{du}{(du \sin\varphi - r\, d\vartheta)^4} \cdot [r^4\{d\vartheta(3d^2\vartheta + d^2\tau) \cos\varphi + [d\vartheta(d\vartheta + d\tau)(2d\vartheta + d\tau)$$
$$+ d^3\vartheta] \sin\varphi\} - r^3 du\{3d\vartheta^2 \cos^2\varphi + 5d^2\vartheta \sin\varphi \cos\varphi$$
$$+ d\vartheta(5d\vartheta + 4d\tau) \sin^2\varphi\} + 3r^2 du^2 d\vartheta \sin\varphi$$
$$- 3r^2 s_1 du \sin\varphi\{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau) \cos\varphi + d^2\vartheta \sin\varphi\}$$
$$+ 3r s_1 du^2 (3d\vartheta + d\tau) \sin^2\varphi \cos\varphi - 3s_1 du^3 \sin^3\varphi \cos\varphi$$
$$- s_2 du^3 \sin^4\varphi].$$

Bezeichnen wir noch mit σ_1^0, σ_2^0 die Krümmungsradien der ersten und zweiten Evolute der Bahncurve, die der Systempunkt A beschreibt, so folgt aus 7) und 9) für $s_1 = s_2 = 0$

$$10)\ \sigma_1^0 = -\frac{r^2\,du}{(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)^3}\cdot\left[r\,\{d\vartheta\,(2\,d\vartheta + d\tau)\cos\varphi + d^2\vartheta\sin\varphi\} - 3\,du\,d\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\right]$$

$$11)\ \sigma_2^0 = 3\,\sigma_1^0\cdot\frac{r^2 d^2\vartheta + r\,du\,d\tau\cos\varphi - du^2\sin\varphi\cos\varphi}{(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)^2} - \frac{r^2\,du}{(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)^4}\cdot\left[r^2\,\{d\vartheta\,(3\,d^2\vartheta + d^2\tau)\cos\varphi + [d\vartheta\,(d\vartheta + d\tau)\,(2\,d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta]\sin\varphi\} - r\,du\,\{3\,d\vartheta^2\cos^2\varphi + 5\,d^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + d\vartheta\,(5\,d\vartheta + 4\,d\tau)\sin^2\varphi\} + 3\,du^2\,d\vartheta\sin\varphi\right],$$

und dann wird

$$12)\ \sigma_1 = \sigma_1^0 + \frac{s_1\,du^3\sin^3\varphi}{(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)^3},$$

$$13)\ \sigma_2 = \sigma_2^0 - \frac{6\,s_1\,\sigma_1^0\,du^2\sin^2\varphi}{r\,(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)^2} + \frac{6\,r\,s_1\,du^3\,d\vartheta\sin^2\varphi\cos\varphi}{(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)^4} - \frac{3\,s_1^2\,du^4\,d\vartheta\sin^4\varphi}{(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)^5} + \frac{s_2\,du^4\sin^4\varphi}{(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)^4}.$$

Hierdurch ist die Construktion der einer beliebigen Systemcurve a entsprechenden Krümmungsradien σ_1, σ_2 zurückgeführt auf die Construction der Krümmungsradien σ_1^0, σ_2^0 für einen Systempunkt A. Machen wir nämlich in Fig. 2 auf der positiven Polbahnnormale $\mathfrak{P}W = \frac{du}{d\vartheta}$, so ist bekanntlich W der Wendepol der Systemlage S; verstehen wir dann unter A_* den Fusspunkt der von W auf $\mathfrak{P}A$ gefällten Senkrechten und errichten in $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}A$ ein Loth, welches WA in U schneidet, so wird

$$AA_* = \frac{du}{d\vartheta}\sin\varphi - r,$$

$$\mathfrak{P}U = WA_*\cdot\frac{r}{AA_*} = \frac{r\,du\cos\varphi}{du\sin\varphi - r\,d\vartheta},$$

und dann gehen die vorigen Gleichungen über in

$$14)\ \sigma_1 = \sigma_1^0 + s_1\cdot\left(\frac{\mathfrak{P}A_*}{AA_*}\right)^3,$$

$$15)\ \sigma_2 = \sigma_2^0 - 6\sigma_1^0.\frac{s_1}{r}\cdot\left(\frac{\mathfrak{P}A_*}{AA_*}\right)^2 + 6\,s_1\cdot\frac{\mathfrak{P}A_*^2.\mathfrak{P}U}{AA_*^3} - 3\,s_1^2\cdot\frac{\mathfrak{P}A_*^4}{AA_*^5} + s_2\cdot\left(\frac{\mathfrak{P}A_*}{AA_*}\right)^4.$$

Aus den Gleichungen 10) bis 13) können die entsprechenden Formeln für die umgekehrte Bewegung ohne Weiteres abgeleitet werden. Betrachten wir nämlich die bisher bewegte Ebene als fest, so erfolgt für diese die Drehung $d\vartheta$ im entgegengesetzten Sinne, also ist in den früheren Formeln φ zu vertauschen mit $360^0 - \varphi$ — denn um diesen Winkel muss $\mathfrak{P}A$ im Sinne der jetzt vorliegenden Bewegung gedreht werden, um mit

der positiven Polbahntangente zusammen zu fallen. Es verwandelt sich ferner r in ϱ, s_2 in σ_2, s_1 in $-\sigma_1$ — weil die Seiten der Polbahnnormale ihre Vorzeichen umkehren — und an Stelle von $d\tau$, $d\tau + d^2\tau$ treten die Contingenzwinkel der früheren Polcurve $d\vartheta + d\tau$, $d\vartheta + d\tau + d^2\vartheta + d^2\tau$, die aber mit negativem Vorzeichen einzuführen sind, weil die Drehung um $d\vartheta + d\tau$, die das zweite Element der Polcurve mit t zusammenfallen lässt, der gegenwärtigen Drehung des Systems entgegengesetzt ist. Es erzeugt demnach die Systemcurve α eine Hüllbahncurve a, deren Krümmungsmittelpunkte A, A_1, A_2 bestimmt sind durch die Gleichungen

$$16)\quad r = \frac{\varrho\, du \sin\varphi}{\varrho\, d\vartheta + du \sin\varphi},$$

$$17)\quad s_1 = s_1^0 + \frac{\sigma_1\, du^3 \sin^3\varphi}{(\varrho\, d\vartheta + du\sin\varphi)^3},$$

$$18)\quad s_2 = s_2^0 - \frac{6 s_1^0 \sigma_1\, du^2 \sin^2\varphi}{\varrho(\varrho d\vartheta + du \sin\varphi)^2} - \frac{6\varrho\,\sigma_1\, du^3\, d\vartheta \sin^2\varphi\cos\varphi}{(\varrho\, d\vartheta + du\sin\varphi)^4} + \frac{3\sigma_1^2\, du^4\, d\vartheta \sin^2\varphi}{(\varrho d\vartheta + du \sin\varphi)^5} + \frac{\sigma_2\, du^4 \sin^4\varphi}{(\varrho\, d\vartheta + du\sin\varphi)^4},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$19)\quad s_1^0 = \frac{\varrho^2 du}{(\varrho\, d\vartheta + du\sin\varphi)^3}\cdot\left[\varrho\,\{d\vartheta\,(d\tau - d\vartheta)\cos\varphi + d^2\vartheta\sin\varphi\} - 3\, du\, d\vartheta \sin\varphi\cos\varphi\right]$$

$$20)\quad s_2^0 = -3\, s_1^0 . \frac{\varrho^2 d^2\vartheta - \varrho\, du\,(d\vartheta + d\tau)\cos\varphi + du^2 \sin\varphi\cos\varphi}{(\varrho\, d\vartheta + du\sin\varphi)^2} + \frac{\varrho^2 du}{(\varrho d\vartheta + du\sin\varphi)^4}.$$
$$[\varrho^2\,\{d\vartheta\,(d^2\tau - 2\, d^2\vartheta)\cos\varphi + [d\vartheta\, d\tau\,(d\tau - d\vartheta) + d^3\vartheta]\sin\varphi\} + \varrho\, du.$$
$$\{3\, d\vartheta^2\cos^2\varphi - 5\, d^2\vartheta \sin\varphi\cos\varphi + d\vartheta\,(d\vartheta - 4\, d\tau)\sin^2\varphi\} + 3\, du^2 d\vartheta \sin\varphi].$$

§ 2. Anwendung auf die Evoluten der von den Systemgeraden erzeugten Hüllbahncurven.

Ist die Systemcurve α eine gerade Linie, so liegt in Fig. 1 der Punkt A unendlich fern, und dann folgt aus den Gleichungen 2), 7), 9), wenn $r = \infty$, $s_1 = s_2 = 0$ gesetzt wird,

$$21)\quad \varrho = -\frac{du}{d\vartheta}\sin\varphi,$$

$$22)\quad \sigma_1 = \frac{du\,(2\, d\vartheta + d\tau)}{d\vartheta^2}\cos\varphi + \frac{du\, d^2\vartheta}{d\vartheta^3}\sin\varphi,$$

$$23)\quad \sigma_2 = \frac{du}{d\vartheta^4}\{3\, d^2\vartheta\,(d\vartheta + d\tau) - d\vartheta\, d^2\tau\}\cos\varphi - \frac{du}{d\vartheta^5}.$$
$$\{d\vartheta^2\,(d\vartheta + d\tau)\,(2\, d\vartheta + d\tau) + d\vartheta\, d^3\vartheta - 3\, d^2\vartheta^2\}\sin\varphi.$$

Machen wir daher in Fig. 3 auf der Polbahnnormale n, bez. auf Parallelen zur Polbahntangente t

$$24)\begin{cases}\mathfrak{P}\mathsf{K} = -\dfrac{du}{d\vartheta}\\[4pt] \mathfrak{P}\mathfrak{T} = -\dfrac{du\,(2\,d\vartheta + d\tau)}{d\vartheta^2}\\[4pt] \mathfrak{T}\mathfrak{U} = \dfrac{du\,d^2\vartheta}{d\vartheta^3}\\[4pt] \mathsf{K}\mathfrak{Y} = -\dfrac{du}{d\vartheta^5}\{d\vartheta^2\,(d\vartheta + d\tau)\,(2\,d\vartheta + d\tau) + d\vartheta\,d^3\vartheta - 3\,d^2\vartheta^2\}\\[4pt] \mathfrak{Y}\mathfrak{Z} = \dfrac{du}{d\vartheta^4}\{3\,d^2\vartheta\,(d\vartheta + d\tau) - d\vartheta\,d^2\tau\},\end{cases}$$

wobei positive Strecken immer im Sinne der positiv gerichteten Geraden $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{t}$ aufgetragen werden, so erhalten wir die Krümmungsmittelpunkte A, A_1, A_2, indem wir $\mathsf{KA} \perp \mathfrak{P}A_\infty$, $\mathfrak{U}\mathsf{A}_1 \perp \mathsf{KA}$ und $\mathfrak{Z}\mathsf{A}_2 \perp \mathfrak{U}\mathsf{A}_1$ ziehen. Dann ist K der Rückkehrpol der Systemlage S, A ein Punkt des Rückkehrkreises $\varkappa$, und die Punkte A_1, A_2 liegen auf zwei Kreisen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, die bez. K, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{Z}$ zu Gegenpunkten haben. Daraus folgt der Satz: Die Krümmungsmittelpunkte der ersten bez. zweiten Evoluten aller Hüllbahncurven, die von den Systemgeraden erzeugt werden, befinden sich in jeder Systemlage auf je einem Kreise $\varkappa_1$ bez. $\varkappa_2$. Ganz dasselbe gilt offenbar auch von den Hüllbahnevoluten aller Systemcurven, deren augenblickliche Berührungspunkte mit den zugehörigen Hüllbahnen fünfpunktig berührende Tangenten besitzen.

Der vorstehende Satz ergiebt sich übrigens auch rein geometrisch in folgender Weise: Bezeichnen wir in Fig. 4 mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ die Pole der auf einander folgenden Systemlagen S, S', mit K, Λ die zugehörigen Rückkehrpole und mit a, a' die entsprechenden Lagen einer Systemgeraden, und ziehen wir $\mathfrak{P}A_\infty \perp a$, $\mathfrak{Q}B'_\infty \perp a'$, sowie $\mathsf{KA} \perp \mathfrak{P}A_\infty$, $\Lambda\mathsf{B} \perp \mathfrak{Q}B'_\infty$, so ist der Schnittpunkt A_1 von KA und $\Lambda\mathsf{B}$ der Krümmungsmittelpunkt der Hüllbahnevolute α_1. Dann ist $\angle \mathsf{K}\mathsf{A}_1\Lambda = \angle aa' = d\vartheta$, folglich liegt A_1 auf dem Kreise, der $\mathsf{K}\Lambda$ zur Sehne und $d\vartheta$ zum zugehörigen Peripheriewinkel hat. — Es ist klar, dass dieselbe Schlussweise auf die Krümmungsmittelpunkte A_2, $\mathsf{A}_3 \ldots$ aller folgenden Evoluten angewendet werden kann, d. h. es befinden sich überhaupt die Krümmungsmittelpunkte der Evoluten irgend einer Ordnung der Hüllbahnen aller Systemgeraden in jeder Systemlage auf einem Kreise.

Nehmen wir umgekehrt an, es sei in Fig. 1 $\varrho = \infty$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, so hat die Hüllbahncurve α in ihrem Berührungspunkte mit a eine fünfpunktig berührende Tangente, und die Gleichungen 16), 19), 20) gehen über in

$$r = \frac{du}{d\vartheta}\sin\varphi,$$

$$s_1 = \frac{du\,(d\tau - d\vartheta)}{d\vartheta^2}\cos\varphi + \frac{du\,d^2\vartheta}{d\vartheta^3}\sin\varphi,$$

$$s_2 = \frac{du}{d\vartheta^4}\,(d\vartheta\,d^2\vartheta + d\vartheta\,d^2\tau - 3\,d\tau\,d^2\vartheta)\cos\varphi + \frac{du}{d\vartheta^5}\cdot \{d\vartheta^2\,d\tau\,(d\tau - d\vartheta) - 3\,d^2\vartheta^2 + d\vartheta\,d^3\vartheta\}\sin\varphi.$$

Bestimmen wir daher in Fig. 3 auf $\mathfrak{u}$ die Punkte W, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{R}$ und auf Parallelen zu $\mathfrak{t}$ die Punkte $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{S}$ entsprechend den Gleichungen

$$25)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}W = \dfrac{du}{d\vartheta} \\ \mathfrak{P}\mathfrak{V} = \dfrac{du\,(d\vartheta - d\tau)}{d\vartheta^2} \\ \mathfrak{V}\mathfrak{W} = \dfrac{du\,d^2\vartheta}{d\vartheta^3} \\ W\mathfrak{R} = \dfrac{du}{d\vartheta^5}\{d\vartheta^2\,d\tau\,(d\tau - d\vartheta) - 3\,d^2\vartheta^2 + d\vartheta\,d^3\vartheta\} \\ \mathfrak{R}\mathfrak{S} = \dfrac{du}{d\vartheta^4}(d\vartheta\,d^2\vartheta + d\vartheta\,d^2\tau - 3\,d\tau\,d^2\vartheta), \end{cases}$$

so liegen die Krümmungsmittelpunkte A, A_1, A_2 bez. auf den Kreisen w, w_1 w_2, welche $\mathfrak{P}W$, $W\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}\mathfrak{S}$ zu Durchmessern haben; dabei bedeutet W den Wendepol, w den Wendekreis der Systemlage S.

Was soeben von den Punkten A_1, A_2 bewiesen wurde, gilt auch von den Krümmungsmittelpunkten aller folgenden Evoluten der Curve a, wenn α eine gerade Linie ist, d. h. die Krümmungsmittelpunkte der auf einander folgenden Evoluten aller Systemcurven, die gerade Linien umhüllen, befinden sich in jeder Systemlage auf einer Reihe von Kreisen w_1, $w_2 \ldots$

Die Kreise w und w_1 als Träger der Punktreihen $A \ldots$ und $A_1 \ldots$ sind aus W perspectiv auf einander bezogen; ihr zweiter Schnittpunkt Q ist folglich der selbstentsprechende Punkt dieser Reihen. Derselbe befindet sich, als Systempunkt betrachtet, in einem Bahnelement, für welches $\varrho = \infty$, $\sigma_1 = 0$ ist, d. h. in einem Undulationspunkte seiner Bahn; wir bezeichnen ihn mit Herrn Mehmke als den Ball'schen Punkt der Systemlage S und erhalten ihn als Fusspunkt des von W auf $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ gefällten Lothes.

Der zweite Schnittpunkt der Kreise w_1 und w_2 ist der Fusspunkt der Senkrechten von $\mathfrak{W}$ auf $W\mathfrak{S}$; er fällt also mit Q zusammen, wenn $W\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ senkrecht steht, und dann bleibt Q in fünf unendlich benachbarten Lagen auf einer Geraden. Diese specielle Bewegung des Ball'schen Punktes tritt demnach immer ein, wenn $\mathfrak{R}\mathfrak{S} = - W\mathfrak{R}\,.\,\dfrac{\mathfrak{P}\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}$ ist, und hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen 25) die Bedingung

$$26)\quad d^2\vartheta\,d^2\tau = d\vartheta\,d\tau\,(d\vartheta - d\tau)^2 + 2\,d^2\vartheta^2 - d^3\vartheta\,(d\vartheta - d\tau).$$

Der zweite Schnittpunkt Ω der Kreise $\varkappa$, $\varkappa_1$ ist der Ball'sche Punkt für die umgekehrte Bewegung; wir finden ihn, indem wir von K auf $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ ein Loth fällen.

Durch Angabe der Kreise $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, oder der Kreise w, w_1, w_2 sind fünf unendlich benachbarte Systemlagen vollständig definirt. Sind $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ bekannt, so bestimmen wir nach 24) und 25) die Kreise w_1, w_2 mit Hilfe der Gleichungen

$$\mathfrak{T}\mathfrak{V} = 3\,.\,\mathfrak{P}W$$
$$\mathfrak{V}\mathfrak{R} = \mathfrak{P}\mathfrak{V} + \mathfrak{P}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}\mathfrak{Y}$$
$$\mathfrak{R}\mathfrak{S} = 4\,.\,\mathfrak{T}\mathfrak{U} - \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}.$$

§ 3. Construction der Kreise $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und der Krümmungsradien σ_1, σ_2, wenn fünf unendlich benachbarte Systemlagen in allgemeinster Weise gegeben sind.

Kennen wir von zwei beliebigen Systemcurven die augenblicklichen Lagen a und b, die Berührungspunkte mit ihren Hüllbahncurven α und β, die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte von α und β, sowie die Krümmungsmittelpunkte der ersten und zweiten Evoluten dieser Curven, so sind hierdurch fünf unendlich benachbarte Systemlagen in allgemeinster Weise definirt, und dann entsteht die Aufgabe, für die Hüllbahn irgend einer dritten Systemcurve und für deren Evoluten die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte zu construiren. Die vorliegende Aufgabe lässt sich zunächst auf eine einfachere zurückführen. Auf Grund der Gleichungen 14) und 15) in § 1 erhalten wir nämlich aus den genannten Bestimmungsstücken sofort auch die Krümmungsradien der ersten und zweiten Evoluten derjenigen Bahncurven, welche die Krümmungsmittelpunkte A, B von a, b beschreiben; mithin ist es ausreichend, die folgende Aufgabe zu behandeln: Es sind gegeben die augenblicklichen Lagen A, B zweier beliebigen Systempunkte, die Krümmungsmittelpunkte A, B ihrer Bahncurven und die Krümmungsmittelpunkte A_1, A_2, B_1, B_2 der ersten und zweiten Evoluten dieser Curven; für irgend einen dritten Systempunkt C sollen die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte Γ, Γ_1, Γ_2 construirt werden.

Wir bezeichnen mit A^* den Krümmungsmittelpunkt der Hüllbahncurve einer Geraden, die in der betrachteten Systemlage zu $A\mathsf{A}$ normal ist, mit A_1^*, A_2^* die Krümmungsmittelpunkte der ersten und zweiten Evolute dieser Curve, mit B^*, B_1^*, B_2^* die entsprechenden Punkte für eine Systemgerade, die auf $B\mathsf{B}$ senkrecht steht, mit $\mathfrak{P}$ den Pol, mit t die Polbahntangente und setzen $\mathfrak{P}A = r$, $\mathfrak{P}\mathsf{A} = \varrho$, $\mathsf{A}\mathsf{A}_1 = \sigma_1$, $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 = \sigma_2$, $\angle A\mathfrak{P}\mathsf{t} = \varphi$, $\mathfrak{P}\mathsf{A}^* = \varrho^*$, $\mathsf{A}^*\mathsf{A}_1^* = \sigma_1^*$, $\mathsf{A}_1^*\mathsf{A}_2^* = \sigma_2^*$. Dann ist nach 21)

$$\varrho^* = -\frac{du}{d\vartheta}\sin\varphi,$$

also nach 2)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho^*}.$$

Verlängern wir daher in Fig. 5 $\mathfrak{P}\mathsf{A}$ um sich selbst bis $\mathfrak{A}$, so erhalten wir A^* als den vierten harmonischen Punkt zu $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}$ und A. In derselben Weise finden wir B^* und somit den Rückkehrpol K.

Es ist ferner nach 22)

$$\sigma_1^* = \frac{du}{d\vartheta^3}\{d\vartheta\,(2\,d\vartheta + d\tau)\cos\varphi + d^2\vartheta\sin\varphi\}.$$

Nun folgt aus 10)

$$27)\quad du\,\{d\vartheta\,(2\,d\vartheta + d\tau)\cos\varphi + d^2\vartheta\sin\varphi\} = \frac{3\,du^2\,d\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}{r} - \sigma_1\left(\frac{du\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r}\right)^3$$

und aus 2)
$$\frac{du \sin\varphi - r\,d\vartheta}{r\,d\vartheta} = -\frac{\varrho^*}{\varrho},$$

also wird

28)
$$\sigma_1^* = -3.\mathsf{A}^*\mathsf{K}.\frac{\varrho^*}{r} - \sigma_1\left(\frac{\varrho^*}{\varrho}\right)^3.$$

Hiernach sind die Punkte A^*_1, B^*_1 in einfacher Weise zu construiren, und damit kennen wir auch $\mathfrak{U}$, den Gegenpunkt von K im Kreise $\varkappa_1$.

Wir erhalten weiter aus 23)

$$\sigma_2^* = 3\frac{du\,d^2\vartheta}{d\vartheta^5}\{d\vartheta\,(2\,d\vartheta + d\tau)\cos\varphi + d^2\vartheta\sin\varphi\} - \frac{du}{d\vartheta^4}.$$
$$\{d\vartheta\,(3\,d^2\vartheta + d^2\tau)\cos\varphi + [d\vartheta\,(d\vartheta + d\tau)\,(2\,d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta]\sin\varphi\}.$$

Es ist aber nach 11)

$$du\,\{d\vartheta\,(3\,d^2\vartheta + d^2\tau)\cos\varphi + [d\vartheta\,(d\vartheta + d\tau)\,(2\,d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta]\sin\varphi\}$$
$$= 3\frac{\sigma_1}{r^4}(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)^2\,(r^2 d^2\vartheta + r\,du\,d\tau - du^2\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$+ \frac{du^2}{r}\sin\varphi\{5\,d^2\vartheta\cos\varphi + 2\,d\vartheta\,(d\vartheta + 2\,d\tau)\sin\varphi\} - 3\frac{du^2\,d\vartheta}{r^2}(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)$$
$$- \sigma_2\left(\frac{du\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r}\right)^4;$$

setzen wir also zugleich für $du\ \{d\vartheta\,(2\,d\vartheta + d\tau)\cos\varphi + d^2\varphi\sin\varphi\}$ den Werth aus 27), so geht die Gleichung für σ_2^* über in

$$\sigma_2^* = \frac{9\,du^2 d^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}{r\,d\vartheta^4} - 3\,\sigma_1\frac{d^2\vartheta}{d\vartheta^2}\left(\frac{du\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r\,d\vartheta}\right)^3$$
$$- 3\,\sigma_1\cdot\left(\frac{du\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r\,d\vartheta}\right)^2\cdot\frac{r^2 d^2\vartheta + r\,du\,d\tau\cos\varphi - du^2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2 d\vartheta^2}$$
$$- \frac{du^2}{r\,d\vartheta^4}\sin\varphi\{5\,d^2\vartheta\cos\varphi + 2\,d\vartheta\,(d\vartheta + 2\,d\tau)\sin\varphi\}$$
$$+ 3\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\cdot\frac{du\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r^2 d\vartheta} + \sigma_2\left(\frac{du\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r\,d\vartheta}\right)^4$$
$$= 2\frac{du^2\sin^2\varphi}{r\,d\vartheta^2} + 4\frac{du\sin\varphi}{r\,d\vartheta}\left\{\frac{du\,d^2\vartheta}{d\vartheta^3}\cos\varphi - \frac{du\,(d\vartheta + d\tau)}{d\vartheta^2}\sin\varphi\right\}$$
$$+ 3\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\cdot\frac{du\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r^2 d\vartheta}$$
$$- 3\frac{\sigma_1}{r}\left(\frac{du\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r\,d\vartheta}\right)^2\left\{\frac{du\,d\tau}{d\vartheta^2}\cos\varphi + \frac{du\,d^2\vartheta}{d\vartheta^3}\sin\varphi - \frac{du^2\sin\varphi\cos\varphi}{r\,d\vartheta^2}\right\}$$
$$+ \sigma_2\left(\frac{du\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r\,d\vartheta}\right)^4.$$

Bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{T}$ den Fusspunkt des von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{n}$ gefällten Lothes, so ist nach 24)

$$\frac{du\,d^2\vartheta}{d\vartheta^3}\cos\varphi - \frac{du(d\vartheta+d\tau)}{d\vartheta^2}\sin\varphi = \mathfrak{T}\mathfrak{U}\cos\varphi - \mathfrak{T}\mathsf{K}\sin\varphi = -\mathfrak{U}\mathsf{A}^*_1$$

und

$$\frac{du\,d\tau}{d\vartheta^2}\cos\varphi + \frac{du\,d^2\vartheta}{d\vartheta^3}\sin\varphi = \frac{du(d\vartheta+d\tau)}{d\vartheta^2}\cos\varphi + \frac{du\,d^2\vartheta}{d\vartheta^3}\sin\varphi - \frac{du}{d\vartheta}\cos\varphi$$
$$= \mathsf{K}\mathsf{A}_1^* - \mathsf{A}^*\mathsf{K},$$

und es wird schliesslich

$$\sigma_2^* = \frac{\varrho^*}{r}\left(2\varrho^* + 4\mathfrak{U}\mathsf{A}_1^* - 3\frac{\mathfrak{P}\mathsf{K}^2}{\varrho}\right) - 3\frac{\sigma_1}{r}\cdot\left(\frac{\varrho^*}{\varrho}\right)^2\cdot\left(\mathsf{K}\mathsf{A}_1^* - \mathsf{A}^*\mathsf{K} + \mathsf{A}^*\mathsf{K}.\frac{\sigma^*}{r}\right) + \sigma_2\left(\frac{\varrho^*}{\varrho}\right)^4.$$

Die eben erhaltene Gleichung vermittelt die Construction der Punkte A_2^*, B_2^*, und aus diesen finden wir $\mathfrak{Z}$, den Gegenpunkt von $\mathfrak{U}$ im Kreise $\varkappa_2$.

Um nun für die Bahncurve des Systempunktes C und für die Evoluten derselben die Krümmungsmittelpunkte Γ, Γ_1, Γ_2 zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die Punkte Γ^*, Γ_1^*, Γ_2^*, indem wir $\mathsf{K}\Gamma^* \perp \mathfrak{P}C$, $\mathfrak{U}\Gamma_1^* \perp \mathsf{K}\Gamma^*$ und $\mathfrak{Z}\Gamma_2^* \perp \mathfrak{U}\Gamma_1^*$ ziehen. Construiren wir dann in bekannter Weise den Punkt Γ und bilden darauf die Gleichungen 28) und 29) in Bezug auf den Punkt C, so folgen aus denselben construirbare Ausdrücke für $\Gamma\Gamma_1$ und $\Gamma_1\Gamma_2$.

Die Construction der Punkte $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Z}$ gestaltet sich wesentlich einfacher, wenn die Punkte A und B sich auf Kreisen bewegen. Dann ist die Figur $AB\mathsf{B}\mathsf{A}$ ein Gelenkviereck, und in den Gleichungen 28) und 29) wird $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

§ 4. Polbahn und Polcurve.

Wir bezeichnen mit π den Krümmungsradius der Polbahn im Punkte $\mathfrak{P}$, mit π_1, π_2 bez. die zugehörigen Krümmungsradien ihrer ersten und zweiten Evolute, mit p, p_1, p_2 bez. der Krümmungsradien der Polcurve und ihrer Evoluten, und rechnen π, π_2, p, p_2 als positiv im Sinne der positiven Polbahnnormale, π_1, p_1 im Sinne der positiven Polbahntangente. Sind dann in Figur 6 Π, Π_1, Π_2 die Krümmungsmittelpunkte der Polbahn und ihrer Evoluten im Punkte $\mathfrak{P}$, Ψ, Ψ_1, Ψ_2 die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte für den unendlich benachbarten Punkt $\mathfrak{Q}$, so ergiebt sich

$$30)\quad \begin{cases} \pi = \mathfrak{P}\Pi = \dfrac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}{d\tau} = \dfrac{du}{d\tau}, \\[2ex] \pi_1 = \Pi\Pi_1 = \dfrac{\Psi\Pi}{du} = \dfrac{\mathfrak{P}\Pi - \mathfrak{Q}\Psi}{du} = \dfrac{\dfrac{du}{d\tau} - \dfrac{du}{d\tau + d^2\tau}}{du} = \dfrac{du\,d^2\tau}{d\tau^3}, \\[2ex] \pi_2 = \Pi_1\Pi_2 = \dfrac{\Pi_1\Psi_1}{du} = \dfrac{\Psi\Psi_1 - \Pi\Pi_1}{du} = \dfrac{\dfrac{du(d^2\tau + d^3\tau)}{(d\tau + d^2\tau)^3} - \dfrac{du\,d^2\tau}{d\tau^3}}{d\tau} \\[2ex] \qquad = \dfrac{d\tau\,d^3\tau - 3\,d^2\tau^2}{d\tau^5}\,du, \end{cases}$$

und wenn wir $d\tau$, $d^2\tau$, $d^3\tau$ bez. mit $d\vartheta + d\tau$, $d^2\vartheta + d^2\tau$, $d^3\vartheta + d^3\tau$ vertauschen,

$$31)\quad \begin{cases} p = \dfrac{du}{d\vartheta + d\tau} \\ p_1 = \dfrac{d^2\vartheta + d^2\tau}{(d\vartheta + d\tau)^3}\, du \\ p_2 = \dfrac{(d\vartheta + d\tau)(d^3\vartheta + d^3\tau) - 3(d^2\vartheta + d^2\tau)^2}{(d\vartheta + d\tau)^5}\, du. \end{cases}$$

Hieraus folgt eine einfache Construction der Krümmungsradien π, π_1, p, p_1 für den vorhin betrachteten Fall, dass fünf unendlich benachbarte Systemlagen durch Angabe zweier Systempunkte A, B und der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte A A_1 A_2 B B_1 B_2 definirt sind. Bestimmen wir nämlich wie in § 3 zunächst die Punkte K $\mathfrak{T}$ $\mathfrak{U}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$ und aus diesen die Punkte W $\mathfrak{V}$ $\mathfrak{W}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{S}$ (Fig. 3), so ist

$$32)\quad \begin{cases} \pi = -\dfrac{\mathfrak{P}W^2}{W\mathfrak{V}}, \\ p = -\dfrac{\mathfrak{P}\mathsf{K}^2}{\mathsf{K}\mathfrak{T}}, \\ \pi_1 = -(\mathfrak{R}\mathfrak{S} - \mathfrak{V}\mathfrak{W})\left(\dfrac{\mathfrak{P}W}{W\mathfrak{V}}\right)^3 + 3.\mathfrak{V}\mathfrak{W}.\left(\dfrac{\mathfrak{P}W}{W\mathfrak{V}}\right)^2, \\ p_1 = -(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} - \mathfrak{T}\mathfrak{U})\left(\dfrac{\mathfrak{P}\mathsf{K}}{\mathsf{K}\mathfrak{T}}\right)^3 + 3.\mathfrak{T}\mathfrak{U}.\left(\dfrac{\mathfrak{P}\mathsf{K}}{\mathsf{K}\mathfrak{T}}\right)^2. \end{cases}$$

In der That erhalten wir aus diesen Gleichungen die unter 30) und 31) stehenden Ausdrücke für π, p, π_1, p_1, wenn wir an Stelle von $\mathfrak{P}W$, $\mathfrak{P}\mathsf{K}$ u. s. w. die Werthe aus 24) und 25) setzen.

Wir können aber auch umgekehrt die Kreise $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ construiren, wenn die Krümmungsradien π, π_1, π_2, p, p_1, p_2 gegeben sind. Es folgt nämlich aus den Gleichungen 30) und 31)

$$33)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{d\vartheta} = \dfrac{\pi p}{\pi - p}, \qquad \dfrac{d\tau}{d\vartheta} = \dfrac{p}{\pi - p}, \qquad \dfrac{d^2\tau}{d\vartheta^2} = \dfrac{\pi_1 p^2}{\pi(\pi - p)^2}, \\ \dfrac{d^2\vartheta}{d\vartheta^2} = \dfrac{p_1\pi^3 - \pi_1 p^3}{\pi p(\pi - p)^2}, \qquad \dfrac{d^3\vartheta}{d\vartheta^3} = \dfrac{\pi^5(3p_1^2 + pp_2) - p^5(3\pi_1^2 + \pi\pi_2)}{\pi^2 p^2(\pi - p)^3}, \end{cases}$$

mithin ergeben sich aus den Formeln 24) die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Punkte K $\mathfrak{T}$ $\mathfrak{U}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$

$$34)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}\mathsf{K} = -\dfrac{\pi p}{\pi - p}, \\ \mathsf{K}\mathfrak{T} = -\dfrac{\pi^2 p}{(\pi - p)^2}, \\ \mathfrak{T}\mathfrak{U} = \dfrac{p_1\pi^3 - \pi_1 p^3}{(\pi - p)^3}, \\ \mathfrak{T}\mathfrak{Y} = 3\cdot\dfrac{(p_1\pi^2 - \pi_1 p^2)^2}{(\pi - p)^5} - \dfrac{p_2\pi^4 - \pi_2 p^4}{(\pi - p)^4} - \dfrac{\pi^3 p}{(\pi - p)^3}, \\ \mathfrak{Y}\mathfrak{Z} = \mathfrak{T}\mathfrak{U} + 3.\mathfrak{T}\mathfrak{U}\cdot\dfrac{\mathsf{K}\mathfrak{T}}{\mathfrak{P}\mathsf{K}} - p_1.\left(\dfrac{\mathsf{K}\mathfrak{T}}{\mathfrak{P}\mathsf{K}}\right)^3. \end{cases}$$

Specielle Fälle. I. Ist die Polcurve eine gerade Linie, also $p=\infty$, $p_1=p_2=0$ und $d\vartheta=-d\tau$, $d^2\vartheta=-d^2\tau$, $d^3\vartheta=-d^3\tau$, so folgt aus den vorigen Gleichungen $\mathfrak{P}\mathsf{K}=\pi$, $\mathsf{K}\mathfrak{T}=0$, $\mathfrak{T}\mathfrak{U}=\pi_1$, $\mathfrak{T}\mathfrak{Y}=\pi_2$, $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}=\pi_1$, d. h. es fällt K mit Π zusammen, $\mathfrak{U}$ mit Π_1, $\mathfrak{Z}$ mit Π_2. Wird also die Bewegung des Systems erzeugt durch Abrollung einer Geraden auf irgend einer Curve, so haben in jeder Systemlage die Kreise $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ bez. die Strecken π, π_1, π_2 zu Durchmessern.

II. Ersetzen wir in Fig. 7 Polbahn und Polcurve durch zwei Kreise mit den Mittelpunkten Π und P, so ist $d^2\vartheta=d^3\vartheta=d^2\tau=d^3\tau=0$ und $\pi_1=\pi_2=p_1=p_2=0$. Dann wird $\mathfrak{T}\mathfrak{U}=\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}=0$ und $\mathsf{K}\mathfrak{T}=\mathfrak{P}\mathsf{K}.\frac{\pi}{\pi-p}$, $\mathfrak{T}\mathfrak{Y}=\mathfrak{P}\mathsf{K}.\left(\frac{\pi}{\pi-p}\right)^2$, d. h. $\mathsf{K}\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}\mathfrak{Y}$ sind die Durchmesser der Kreise $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, und diese haben mit $\varkappa$ einen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt, dessen Abstände von K und $\mathfrak{P}$ sich verhalten wie $\pi:\pi-p$. Nun ist aber $\mathsf{K}\Pi=\mathsf{K}\mathfrak{P}+\mathfrak{P}\Pi=\frac{\pi p}{\pi-p}+\pi=\frac{\pi^2}{\pi-p}$, also $\frac{\mathsf{K}\Pi}{\mathfrak{P}\Pi}=\frac{\pi}{\pi-p}$, folglich ist Π jener gemeinsame Aehnlichkeitspunkt von $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Ganz dasselbe gilt im vorliegenden Falle offenbar auch von allen folgenden Kreisen $\varkappa_3$, $\varkappa_4\ldots$, wir erhalten daher den Satz: Bei der cyklischen Rollung haben die Kreise $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2\ldots$ den Mittelpunkt Π des festen Kreises zum gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt, und es berührt jeder Kreis den vorhergehenden und den folgenden in den beiden Endpunkten seines auf der Polbahnnormale liegenden Durchmessers. — In analoger Weise ist der Mittelpunkt P des rollenden Kreises der gemeinsame Aehnlichkeitspunkt der Kreise w w_1 $w_2\ldots$; dabei berühren sich w und w_1 im Wendepol W, w_1 und w_2 in $\mathfrak{V}$ u. s. w. — Die Punkte Π und W sind bekanntlich durch den rollenden Kreis harmonisch getrennt, ebenso P und K durch den festen Kreis.

Ist $p=2\pi$, also $d\tau=-2d\vartheta$ (cardioidische Bewegung), so fallen die Kreise $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2\ldots$ mit dem festen Kreise zusammen; umgekehrt decken sich also w, w_1, $w_2\ldots$ mit dem rollenden Kreise, wenn $\pi=2p$ wird (elliptische Bewegung, $d\vartheta=d\tau$).

§ 5. Construction der Krümmungsradien σ_1, σ_2 im Falle der cyklischen Rollung.

In Figur 8 bezeichnet wieder Π den Mittelpunkt des festen, P den des rollenden Kreises, A einen beliebigen Systempunkt; für die Evoluten α_1, α_2 der zu A gehörigen Bahncurve α sollen die Krümmungsmittelpunkte A_1, A_2 construirt werden. — Wir bestimmen zunächst in bekannter Weise den Wendepol W und darauf den Krümmungsmittelpunkt A von α, indem wir in $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}A$ ein Loth errichten, welches WA in U schneidet, und $U\mathsf{A}\parallel\pi$ ziehen. Setzen wir in den Gleichungen 10) und 11) (§ 1) $d^2\vartheta=d^2\tau=d^3\vartheta=0$

und schreiben statt σ_1^0, σ_2^0 kurz σ_1, σ_2, so ergiebt sich zunächst für σ_1, wenn r und φ dieselbe Bedeutung haben wie früher,

$$\sigma_1 = \frac{r^2 du\, d\vartheta \cos\varphi \{3 du \sin\varphi - r(2 d\vartheta + d\tau)\}}{(du \sin\varphi - r d\vartheta)^3}.$$

Sei nun O der vierte harmonische Punkt zu $\mathfrak{P}$, P, Π und auf n die Strecke $\mathfrak{P}N = 3 . \mathfrak{P}O$, dann ist

$$\frac{2}{\mathfrak{P}P} = \frac{1}{\mathfrak{P}\Pi} + \frac{1}{\mathfrak{P}O},$$

also nach 30) und 31)

$$\frac{1}{\mathfrak{P}O} = \frac{2(d\vartheta + d\tau)}{du} - \frac{d\tau}{du}$$

und

$$\mathfrak{P}N = \frac{3 du}{2 d\vartheta + d\tau}.^*$$

Bezeichnen wir ferner mit T den Schnittpunkt von $\mathfrak{P}U$ und NA, mit Z den Schnittpunkt von WA und einer Parallelen durch A zu $\mathfrak{P}U$ und mit A_* den Fusspunkt des von W auf $\mathfrak{P}A$ gefällten Lothes, so wird

$$\mathfrak{P}U = A_* W \cdot \frac{A\mathfrak{P}}{AA_*} = \mathfrak{P}W . \cos\varphi \cdot \frac{r}{\mathfrak{P}W \sin\varphi - r} = \frac{r\, du \cos\varphi}{du \sin\varphi - r d\vartheta},$$

$$\mathsf{A}Z = \mathfrak{P}U \cdot \frac{A\mathsf{A}}{A\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}U \cdot \frac{A\mathfrak{P}}{AA_*} = -\mathfrak{P}U \cdot \frac{r}{du \sin\varphi - r d\vartheta} = -\frac{r^2 du\, d\vartheta \cos\varphi}{(du \sin\varphi - r d\vartheta)^2},$$

und für $\mathfrak{P}T$ ergiebt sich aus der vorletzten Gleichung, wenn wir $\mathfrak{P}W$ mit $\mathfrak{P}N$ vertauschen,

$$\mathfrak{P}T = \frac{3 r\, du\, d\vartheta \cos\varphi}{3 du \sin\varphi - r(2 d\vartheta + d\tau)}.$$

Hieraus folgt aber

$$\sigma_1 = -3 \cdot \mathsf{A}Z \cdot \frac{\mathfrak{P}U}{\mathfrak{P}T};$$

ziehen wir daher von U nach dem Schnittpunkte von $\mathfrak{P}A$ und TZ eine Gerade, die $\mathsf{A}Z$ in V trifft, so erhalten wir A_1, indem wir $\mathsf{A}\mathsf{A}_1 = -3 . \mathsf{A}V$ machen.

Es ist ferner nach 11)

$$\sigma_2 = 3\sigma_1 \cdot \frac{du \cos\varphi (r d\tau - du \sin\varphi)}{(du \sin\varphi - r d\vartheta)^2} - \frac{r^2 du\, d\vartheta}{(du \sin\varphi - r d\vartheta)^4} \{ r^2 (d\vartheta + d\tau)(2 d\vartheta + d\tau) \sin\varphi$$
$$- r\, du [3 d\vartheta + 2(d\vartheta + 2 d\tau) \sin^2\varphi] + 3 du^2 \sin\varphi \}$$
$$= -3\sigma_1 \cdot \frac{du \cos\varphi (du \sin\varphi - r d\tau)}{(du \sin\varphi - r d\vartheta)^2} - \frac{r^2 du\, d\vartheta \cos\varphi \{3 du \sin\varphi - r(2 d\vartheta + d\tau)\}}{(du \sin\varphi - r d\vartheta)^3}$$
$$\cdot \frac{du \sin\varphi - r(d\vartheta + d\tau)}{du \sin\varphi - r d\vartheta} \tan\varphi - 3 \cdot \frac{r^2 du\, d\vartheta \cos\varphi}{(du \sin\varphi - r d\vartheta)^2} \cdot \frac{du \cos\varphi}{du \sin\varphi - r d\vartheta}.$$

---

* N ist der einzige Systempunkt, der augenblicklich ein Bahnelement mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreise durchschreitet. Vergl. § 8, II.

Sind nun U', U'' die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}U$ bez. mit $A\Pi$, AP, und rechnen wir die Strecken $\mathfrak{P}U'$, $\mathfrak{P}U''$ in demselben Sinne positiv, wie σ_1, so folgt aus der Gleichung für $\mathfrak{P}U$, wenn wir $\mathfrak{P}W$ bez. durch $\mathfrak{P}\Pi$, $\mathfrak{P}P$, d. h. $d\vartheta$ durch $d\tau$, $d\vartheta + d\tau$ ersetzen,

$$\mathfrak{P}U' = \frac{r\,du\,\cos\varphi}{du\,\sin\varphi - r\,d\tau},$$

$$\mathfrak{P}U'' = \frac{r\,du\,\cos\varphi}{du\,\sin\varphi - r\,(d\vartheta + d\tau)};$$

mithin wird

$$\sigma_2 = -3\sigma_1 \cdot \frac{\mathfrak{P}U^2}{r.\mathfrak{P}U'} - \sigma_1 \cdot \frac{\mathfrak{P}U}{\mathfrak{P}U''}\tan\varphi + 3.\mathsf{A}Z \cdot \frac{\mathfrak{P}U}{r}$$

$$= 3 \cdot \frac{\mathfrak{P}U}{r}\left(-\sigma_1 \cdot \frac{\mathfrak{P}U}{\mathfrak{P}U'} + \mathsf{A}V \cdot \frac{r}{\mathfrak{P}U''}\tan\varphi + \mathsf{A}Z\right).$$

Um hiernach σ_2 zu construiren, ziehen wir $\mathsf{A}_1\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{P}A$, $\mathsf{A}\mathfrak{A} \parallel A\Pi$ und durch den Schnittpunkt $\mathfrak{A}$ beider Geraden eine Parallele zu AW, die $\mathsf{A}\mathsf{A}_1$ in $\mathfrak{A}'$ trifft; dann ist $\mathsf{A}_1\mathfrak{A}' = -\sigma_1 \cdot \frac{\mathfrak{P}U}{\mathfrak{P}U'}$. Ziehen wir ferner $VV' \parallel AP$ bis $\mathfrak{P}A$ und $V'V'' \parallel t$ bis $\mathsf{A}V$, so wird $V''\mathsf{A} = \mathsf{A}V \cdot \frac{r}{\mathfrak{P}U''}\tan\varphi$, also $V''Z = \mathsf{A}V \cdot \frac{r}{\mathfrak{P}U''}\tan\varphi + \mathsf{A}Z$. Tragen wir daher auf der Geraden $\mathsf{A}\mathsf{A}_1$ von $\mathfrak{A}'$ aus die Strecke $V''Z$ ab und fällen von dem so erhaltenen Punkte $\mathfrak{A}''$ auf AW ein Loth, welches $\mathsf{A}_1\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'''$ schneidet, so ist $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 = -3\,.\,\mathsf{A}_1\mathfrak{A}'''$.

Eine Vereinfachung der eben beschriebenen Construction ergiebt sich unter der speciellen Voraussetzung, dass $d\tau = d\vartheta$, also $\mathfrak{P}\Pi = 2.\mathfrak{P}P$ ist. In diesem Falle beschreibt der Punkt A bekanntlich eine Ellipse mit dem Mittelpunkte Π; schneidet AP den rollenden Kreis in B und C, so sind AB und AC die Halbachsen, ΠC und ΠB die Achsenrichtungen dieser Ellipse (Fig. 9). Alsdann fallen die Punkte W und N mit Π zusammen, also auch T und U' mit U, sowie V mit Z, und es wird $\sigma_1 = -3.\mathsf{A}Z$, $\sigma_2 = 3 \cdot \frac{\mathfrak{P}U}{r}\left(-\sigma_1 + \mathsf{A}Z \cdot \frac{r}{\mathfrak{P}U''}\tan\varphi + \mathsf{A}Z\right)$. Ziehen wir daher $ZZ' \parallel \mathfrak{P}A$, $\mathsf{A}Z' \parallel AP$, $Z'Z'' \parallel t$ bis $\mathsf{A}Z$, $Z''Z''' \perp A\Pi$ und $\mathsf{A}_1Z''' \parallel \mathfrak{P}A$, so ist $\mathsf{A}_1Z'' = -\sigma_1 + \mathsf{A}Z \cdot \frac{r}{\mathfrak{P}U''}\tan\varphi + \mathsf{A}Z$, folglich $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 = -3.\ \mathsf{A}_1Z'''$.*

---

* Eine andere Construction für den Krümmungsmittelpunkt der zweiten Evolute einer Ellipse giebt Herr Mannheim (cours de géométrie descriptive, deuxième édition, p. 208). Bei derselben wird der Punkt Z wie oben ermittelt, dann in Π zu $A\Pi$ ein Loth errichtet, das $\mathfrak{P}A$ in L trifft, $\mathsf{A}K \parallel A\Pi$ und durch den Schnittpunkt K von $\mathsf{A}K$ und ZL die Gerade $KZ''' \perp A\Pi$ gezogen. Man erkennt leicht, dass KZ''' identisch ist mit der oben in anderer Weise bestimmten Geraden $Z''Z'''$.

§ 6. Die Kreispunktcurve.

Kehren wir von der soeben betrachteten speciellen Bewegung zum allgemeinen Falle zurück und setzen in Gleichung 10) $\sigma_1^0 = 0$, so ergiebt sich

$$35)\qquad r\{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau)\cos\varphi + d^2\vartheta\sin\varphi\} - 3du\,d\vartheta\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

als Gleichung der Kreispunktcurve m der Systemlage S, d. h. des Ortes aller Systempunkte, die augenblicklich Bahnelemente mit stationärem Krümmungskreise durchlaufen. Die Curve m hat bekanntlich im Pole $\mathfrak{P}$ einen Doppelpunkt mit den Tangenten $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$; sie enthält den Ball'schen Punkt Q der Systemlage S und ist das Erzeugniss eines Kreisbüschels mit in $\mathfrak{P}$ vereinigten Grundpunkten und eines ihm projectiven Strahlenbüschels, dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der zugeordneten Kreise gehen. Bezeichnen wir das Centrum dieses Strahlenbüschels — das Focalcentrum der Curve m — mit F, so liegen die Mittelpunkte jener Kreise auf der Geraden, die zu $\mathfrak{P}F$ in Bezug auf $\mathfrak{t}$ symmetrisch ist — der Focalachse von m. Dieselbe ist parallel zur Asymptote von m und bildet daher mit $\mathfrak{t}$ einen Winkel φ, der nach 35) bestimmt ist durch die Gleichung

$$\tan\varphi = -\frac{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau)}{d^2\vartheta},$$

d. h. sie ist nach 24) identisch mit der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ in Fig. 3 und geht demnach durch den Ball'schen Punkt Ω für die umgekehrte Bewegung.* Sind φ_F, φ_Q die Winkel, die $\mathfrak{P}F$, $\mathfrak{P}Q$ mit $\mathfrak{t}$ einschliessen, so ist

$$36)\qquad \tan\varphi_F = \frac{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau)}{d^2\vartheta}$$

und nach 25)

$$37)\qquad \tan\varphi_Q = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{V}}{\mathfrak{P}\mathfrak{W}} = \frac{d\vartheta(d\vartheta - d\tau)}{d^2\vartheta}.$$

Die Krümmungsmittelpunkte der Bahncurven, welche die Punkte von m beschreiben, liegen auf der Kreispunktcurve μ für die umgekehrte Bewegung; als Gleichung derselben erhalten wir aus 19), wenn wir $s_1^0 = 0$ setzen,

$$\varrho\{d\vartheta(d\vartheta - d\tau)\cos\varphi - d^2\vartheta\sin\varphi\} + 3du\,d\vartheta\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Ihre Focalachse geht durch den Ball'schen Punkt Q; bezeichnen wir also ihr Focalcentrum mit E und $\angle \mathsf{E}\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ mit φ_{E}, so ist nach 37)

$$38)\qquad \tan\varphi_{\mathsf{E}} = -\frac{d\vartheta(d\vartheta - d\tau)}{d^2\vartheta}.$$

Denken wir uns fünf unendlich benachbarte Systemlagen wieder festgelegt durch Angabe der Punkte $A\mathsf{A}\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$, $B\mathsf{B}\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2$, so finden wir die

* Vergl. Rodenberg, die Bestimmung der Kreispunktcurven eines ebenen Gelenkvierecks, diese Zeitschrift, Bd. 36, S. 270.

Kreispunktcurve m in folgender Weise. (Fig. 10). Wir bestimmen zunächst die Punkte K, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$ nach § 3 und erhalten aus diesen die Punkte W, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, Q der Fig. 3, indem wir $\mathfrak{P}W = \mathsf{K}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}\mathfrak{V} = 3.\mathsf{K}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{V}\mathfrak{W} = \mathfrak{T}\mathfrak{U}$, $WQ \perp \mathfrak{P}\mathfrak{W}$ machen. Ziehen wir dann $\mathfrak{P}F$ symmetrisch zu $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ in Bezug auf $\mathfrak{t}$ und QF so, dass $\angle FQ\mathfrak{W} = \angle \mathfrak{U}\mathfrak{P}Q$ ist, so schneiden sich die beiden letzten Geraden im Focalcentrum F, denn es ist in der That der Schnittpunkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ und FQ der Mittelpunkt eines durch $\mathfrak{P}$ und Q gehenden Kreises.

Gehören aber die Punkte A, B selbst der Kreispunktcurve an — ist also $\mathsf{A}\mathsf{A}_1 = \mathsf{B}\mathsf{B}_1 = 0$, ein Fall, der z. B. vorliegt, wenn A, B, A, B ein Gelenkviereck bilden, — so liefert die folgende Construction sofort das Focalcentrum F ohne vorhergehende Bestimmung der Punkte K, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$.* (Fig. 11). Wir verbinden $\mathfrak{P}$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{K}$ von AB und AB, ermitteln dann die Geraden $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$, indem wir $\angle B\mathfrak{P}\mathfrak{t} = \angle \mathfrak{K}\mathfrak{P}A$ machen, ziehen hierauf $\mathfrak{P}\mathfrak{J} \perp \mathfrak{P}\mathfrak{K}$ bis AB, $\mathfrak{J}\mathfrak{G} \parallel \mathfrak{P}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}\mathfrak{H} \perp \mathfrak{P}\mathfrak{K}$ und errichten in den Schnittpunkten von $\mathfrak{P}A$ mit den beiden letzten Geraden Lothe zu $\mathfrak{P}A$, von denen das erste $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{C}$, das zweite $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{D}$ trifft. Alsdann sind $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ die auf $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$ liegenden Durchmesser der Krümmungskreise der Curve m in ihrem Doppelpunkte $\mathfrak{P}$; fällen wir noch von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ein Loth, welches diese Gerade in $\mathfrak{E}$ schneidet, so ist das Focalcentrum F der Mittelpunkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{E}$.

§ 7. Die Burmester'schen Punkte.

Bleibt der Systempunkt M in den fünf unendlich benachbarten Systemlagen $SS'S''S'''S''''$ auf einem Kreise, so genügen seine Coordinaten r, φ der Gleichung 35) der Kreispunktcurve m, es verschwindet aber überdies der Krümmungsradius σ_2^0 der zweiten Bahnevolute, und hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf 11) die weitere Bedingung

$$39)\quad r^2\{d\vartheta\,(3d^2\vartheta + d^2\tau)\cos\varphi + [d\vartheta\,(d\vartheta + d\tau)\,(2d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta]\sin\varphi\} \\ - r\,du\,\{3d\vartheta^2\cos^2\varphi + 5d^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + d\vartheta\,(5d\vartheta + 4d\tau)\sin^2\varphi\} \\ + 3du^2\,d\vartheta\sin\varphi = 0.$$

Aus 35) und 39) folgt durch Elimination von r für $\tan\varphi$ die Gleichung vierten Grades

$$40)\quad d^2\vartheta^2\tan^4\varphi - d\vartheta\,d^2\vartheta\,(d\vartheta + 2d\tau)\tan^3\varphi + (3d\vartheta\,d^3\vartheta - 4d^2\vartheta^2)\tan^2\varphi \\ + 3d\vartheta\,(d\vartheta\,d^2\tau - d\tau\,d^2\vartheta)\tan\varphi - d\vartheta^2\,(d\vartheta - d\tau)\,(2d\vartheta + d\tau) = 0.$$

Es giebt also in jeder Systemlage S im Allgemeinen vier Punkte, welche augenblicklich Bahnelemente mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreise durchlaufen; wir wollen dieselben

* Construction der Krümmungsmittelpunkte u. s. w. S. 266. — Eine andere Lösung derselben Aufgabe giebt Herr Rodenberg a. a. O. S. 269.

im Folgenden kurz als die Burmester'schen Punkte der betreffenden Systemlage bezeichnen.*

Setzen wir in 35) und 39) $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$, so erhalten wir zur Bestimmung der Burmester'schen Punkte die Gleichungen

$$41)\qquad (x^2+y^2)\{x\,d\vartheta\,(2d\vartheta+d\tau)+y\,d^2\vartheta\}-3xy\,du\,d\vartheta=0,$$

$$42)\qquad \begin{aligned}&(x^2+y^2)\{x\,d\vartheta\,(3d^2\vartheta+d^2\tau)+y\,[d\vartheta\,(d\vartheta+d\tau)(2d\vartheta+d\tau)+d^3\vartheta]\\&-3du\,d\vartheta^2\}-y\,du\{5x\,d^2\vartheta+2y\,d\vartheta\,(d\vartheta+2d\tau)-3du\,d\vartheta\}=0\end{aligned}$$

und aus diesen durch Elimination von x^2+y^2

$$43)\qquad \begin{aligned}&3x\,d\vartheta\{x\,d\vartheta\,(3d^2\vartheta+d^2\tau)+y\,[d\vartheta\,(d\vartheta+d\tau)\,(2d\vartheta+d\tau)+d^3\vartheta]\\&-3du\,d\vartheta^2\}-\{x\,d\vartheta\,(2d\vartheta+d\tau)+y\,d^2\vartheta\}\,\{5x\,d^2\vartheta+2y\,d\vartheta\,(d\vartheta+2d\tau)\\&-3du\,d\vartheta\}=0\end{aligned}$$

oder

$$44)\qquad \begin{aligned}&x^2d\vartheta\,(3d\vartheta\,d^2\tau-d\vartheta\,d^2\vartheta-5d\tau\,d^2\vartheta)+xy\{d\vartheta^2\,(d\vartheta-d\tau)\,(2d\vartheta+d\tau)\\&-5d^2\vartheta^2+3d\vartheta\,d^3\vartheta\}-2y^2d\vartheta\,d^2\vartheta\,(d\vartheta+2d\tau)-3du\,d\vartheta\{x\,d\vartheta\,(d\vartheta-d\tau)\\&-y\,d^2\vartheta\}=0.\end{aligned}$$

Der durch die letzten Gleichungen dargestellte Kegelschnitt, den wir mit $\mathfrak{k}$ bezeichnen wollen, schneidet die Kreispunktcurve m in ihrem Doppelpunkte $\mathfrak{P}$ und in den vier Burmester'schen Punkten $M_{I}\,M_{II}\,M_{III}\,M_{IV}$.

Da die entsprechenden Formeln für die umgekehrte Bewegung sich ergeben, wenn wir in den vorhergehenden Gleichungen $d\tau$, $d^2\tau$, y bez. mit $-(d\vartheta+d\tau)$, $-(d^2\vartheta+d^2\tau)$, $-y$ vertauschen, so finden wir als Ort für die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte $\mathsf{M}_{I}\,\mathsf{M}_{II}\,\mathsf{M}_{III}\,\mathsf{M}_{IV}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{k}'$ mit der Gleichung

$$45)\qquad \begin{cases}x^2d\vartheta\,(3d\vartheta\,d^2\tau-d\vartheta\,d^2\vartheta-5d\tau\,d^2\vartheta)+xy\{d\vartheta^2(d\vartheta-d\tau)\,(2d\vartheta+d\tau)\\-5d^2\vartheta^2+3d\vartheta\,d^3\vartheta\}-2y^2d\vartheta\,d^2\vartheta\,(d\vartheta+2d\tau)+3du\,d\vartheta\{x\,d\vartheta\,(2d\vartheta+d\tau)\\+y\,d^2\vartheta\}=0.\end{cases}$$

Die Kegelschnitte $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$ sind homothetisch ähnlich; sie berühren im Punkte $\mathfrak{P}$ bez. die Geraden $\mathfrak{P}Q$, $\mathfrak{P}\Omega$ (Fig. 10) und gehen beide durch den auf der Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ liegenden Punkt $\mathfrak{N}$ mit der Ordinate $y=\dfrac{3du}{2(d\vartheta+2d\tau)}$.

Um die geometrische Bedeutung des Punktes $\mathfrak{N}$ zu erkennen, betrachten wir vorläufig einen speciellen Fall der allgemeinen Bewegung; wir denken uns nämlich die Grössen $d^2\tau$, $d^3\vartheta$ so bestimmt, dass die Gleichungen bestehen

$$46)\qquad \begin{cases}3d\vartheta\,d^2\tau+d^2\vartheta\,(d\vartheta-d\tau)=0\\3d\vartheta\,d^3\vartheta-5d^2\vartheta^2+d\vartheta^2\,(d\vartheta-d\tau)\,(2d\vartheta+d\tau)=0.\end{cases}$$

Dann verwandeln sich die Kegelschnitte $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$ in zwei Kreise $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}'$; es fallen also zwei der Burmester'schen Punkte, etwa M_{I}, M_{II} mit den imagi-

---

* Burmester, über die Geradführung durch das Kurbelgetriebe, Civilingenieur Bd. 23, S. 319. Daselbst wird bewiesen, dass bei fünf diskreten Lagen eines starren ebenen Systems vier Gruppen von je fünf homologen Punkten existiren, die auf je einem Kreise liegen. Vergl. auch Burmester, Kinematik I, S. 622.

nären Kreispunkten der Ebene zusammen. In der That können wir jetzt die linke Seite der Gleichung 40) durch $tan^2 \varphi + 1$ dividiren; dann bleibt zur Bestimmung von M_{III}, M_{IV} die Gleichung

$$d^2\vartheta^2 \tan^2\varphi - d\vartheta\, d^2\vartheta\,(d\vartheta + 2\,d\tau)\tan\varphi - d\vartheta^2\,(d\vartheta - d\tau)\,(2\,d\vartheta + d\tau) = 0$$

mit den Wurzeln

$$\tan\varphi_{III} = \frac{d\vartheta\,(2\,d\vartheta + d\tau)}{d^2\vartheta}, \quad \tan\varphi_{IV} = -\frac{d\vartheta\,(d\vartheta - d\tau)}{d^2\vartheta};$$

wir schliessen hieraus mit Rücksicht auf die Gleichungen 36), 38), dass im vorliegenden Falle M_{III} identisch ist mit F und M_{IV} mit demjenigen Punkte E, in welchem m die Gerade $\mathfrak{P}$E schneidet. Es ergiebt sich also beiläufig der Satz: Wenn zwei der Burmester'schen Punkte mit den imaginären Kreispunkten der Ebene zusammenfallen, so sind die beiden anderen das Focalcentrum F der Kreispunktcurve m und derjenige Punkt E, der sich augenblicklich auf einem Kreise um E bewegt, wo E das Focalcentrum der Kreispunktcurve μ für die umgekehrte Bewegung bezeichnet.*

Die speciellen Voraussetzungen, die wir soeben hinsichtlich der Grössen $d^2\tau$, $d^3\vartheta$ gemacht haben, enthalten nun keine Beschränkung der vier ersten Systemlagen $S\,S'\,S''\,S'''$ und sind daher ohne Einfluss auf die Punkte F, Q, E, Ω, $\mathfrak{R}$. Es befinden sich also auch im allgemeinen Falle, zu dem wir jetzt zurückkehren, die Punkte F und E bez. auf zwei Kreisen $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}'$, die durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ gehen und in $\mathfrak{P}$ bez. die Geraden $\mathfrak{P}Q$, $\mathfrak{P}\Omega$ berühren. Dann ist aber $\angle \mathfrak{P}\mathfrak{R}F = \angle Q\mathfrak{P}F$ und $\angle \mathfrak{P}\mathfrak{R}\mathrm{E} = \angle \Omega\mathfrak{P}\mathrm{E}$, und da ferner die Winkel $Q\mathfrak{P}F$ und $\Omega\mathfrak{P}\mathrm{E}$ einander gleich sind, so ist auch $\angle \mathfrak{P}\mathfrak{R}F = \angle \mathfrak{P}\mathfrak{R}\mathrm{E}$, d. h. die Punkte $\mathfrak{R}$, F, E liegen auf einer Geraden.

Fassen wir die Ergebnisse unserer letzten Darlegungen zusammen, so erhalten wir die folgenden Sätze: Die vier Burmester'schen Punkte $M_I M_{II} M_{III} M_{IV}$ liegen mit dem Pole $\mathfrak{P}$ auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{k}$, der in $\mathfrak{P}$ die Verbindungslinie des Pols mit dem Ball'schen Punkte Q zur Tangente hat; derselbe geht überdies durch den Schnittpunkt $\mathfrak{R}$ der Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ mit derjenigen Geraden, welche die Focalcentren F und E der Kreispunkt-

---

* Drücken wir mit Hilfe von 33) (§ 4) die linken Seiten der Gleichungen 46) durch die Krümmungsradien der Polbahn und Polcurve, sowie durch diejenigen ihrer Evoluten aus, so erhalten wir als Bedingung dafür, dass zwei der Burmester'schen Punkte mit den imaginären Kreispunkten zusammenfallen,

$$\begin{cases} p_1\,\pi^3\,(\pi - 2p) + \pi_1\,p^3\,(2\pi - p) = 0, \\ 3.\dfrac{p_2\,\pi^4 - \pi_2\,p^4}{\pi p\,(\pi - p)^3} + \dfrac{9\,\pi_1\,p_1}{(\pi - 2p)\,(2\pi - p)} + \dfrac{(\pi - 2p)\,(2\pi - p)}{(\pi - p)^2} = 0. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen wird durch beliebige Werthe von π, π_1, π_2 genügt, wenn z. B. $p = -\pi$, $p_1 = \pi_1$ und $p_2 = 6\,\pi + \dfrac{8\,\pi_1^2}{3\,\pi} + \pi_2$ ist.

curven m und μ verbindet. Die vier zugehörigen Krümmungsmittelpunkte $M_I\, M_{II}\, M_{III}\, M_{IV}$ — die Burmester'schen Punkte für die umgekehrte Bewegung — befinden sich mit den Punkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$ auf einem zweiten Kegelschnitte $\mathfrak{k}'$; derselbe berührt in $\mathfrak{P}$ die Verbindungslinie des Pols mit Ω, dem Ball-schen Punkte für die umgekehrte Bewegung. Die Kegelschnitte $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ sind homothetisch ähnlich.

Nach Gleichung 43) enthält der Kegelschnitt $\mathfrak{k}$ den Schnittpunkt $\mathfrak{M}$ der beiden Geraden

$$x\, d\vartheta\, (2\, d\vartheta + d\tau) + y\, d^2\vartheta = 0,$$

d. h. $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$, und

$$x\, d\vartheta\, (3\, d^2\vartheta + d^2\tau) + y\, [d\vartheta\, (d\vartheta + d\tau)\, (2\, d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta] - 3\, du\, d\vartheta^2 = 0.$$

Durch denselben Punkt geht aber auch die Gerade

$$x\, d\vartheta\, \{3\, d^2\vartheta\, (d\vartheta + d\tau) - d\vartheta\, d^2\tau\} + y\, \{3\, d^2\vartheta^2 - d\vartheta^2\, (d\vartheta + d\tau)\, (2\, d\vartheta + d\tau) - d\vartheta\, d^3\vartheta\} + 3\, du\, d\vartheta^3 = 0.$$

Bezeichnen wir dieselbe mit $\mathfrak{g}$, ihre Abschnitte von den positiven Geraden $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ bez. mit t und n, und verstehen wir unter $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ wieder dieselben Punkte wie in Fig. 3, so ist mit Rücksicht auf 24)

$$n = -3 \cdot \frac{\mathfrak{P}\mathsf{K}^2}{\mathsf{K}\mathfrak{Y}}, \quad t = -3 \cdot \frac{\mathfrak{P}\mathsf{K}^2}{\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}.$$

Wir können daher die Gerade $\mathfrak{g}$ und folglich auch den Punkt $\mathfrak{M}$ construiren, sobald der auf dem Kreise $\varkappa_2$ liegende Punkt $\mathfrak{Z}$ bekannt ist.

Sei endlich $\mathfrak{L}$ der zweite Schnittpunkt von $\mathfrak{k}$ mit $\mathfrak{t}$, so folgt aus 44)

$$\mathfrak{P}\mathfrak{L} = \frac{3\, du\, d\vartheta\, (d\vartheta - d\tau)}{3 d\vartheta d^2\tau - d\vartheta d^2\vartheta - 5 d\tau d^2\vartheta} = \frac{3\, \frac{du^2}{d\vartheta^3}\, (d\vartheta - d\tau)}{3\, \frac{du}{d\vartheta^4}\, (d\vartheta\, d^2\vartheta + d\vartheta\, d^2\tau - 3 d\tau\, d^2\vartheta) - 4\, \frac{du\, d^2\vartheta}{d\vartheta^4}\, (d\vartheta - d\tau)}$$

und hieraus ergiebt sich nach 25) für $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ der construirbare Ausdruck

$$\mathfrak{P}\mathfrak{L} = \frac{3 . \mathfrak{P}W . \mathfrak{P}\mathfrak{V}}{3 . \mathfrak{N}\mathfrak{S} - 4 \cdot \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{V} . \mathfrak{V}\mathfrak{W}}{\mathfrak{P}W}}.$$

Sind demnach fünf unendlich benachbarte Systemlagen wie in § 3 bestimmt durch Angabe der Punkte $A\, \mathsf{A}\, \mathsf{A}_1\, \mathsf{A}_2\, B\, \mathsf{B}\, \mathsf{B}_1\, \mathsf{B}_2$, so erhalten wir die Burmester'schen Punkte durch folgende Construction. Wir ermitteln zunächst in bekannter Weise die Punkte K, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{Z}$, W, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{S}$ der Fig. 3 und aus diesen den Punkt $\mathfrak{L}$, die Gerade $\mathfrak{g}$ und den Punkt $\mathfrak{M}$ als Schnittpunkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{g}$. Darauf finden wir nach § 6 das Focalcentrum F und damit die Kreispunktcurve m; eine durch F gezogene Gerade, die mit $\mathfrak{n}$ den Winkel $F\mathfrak{P}Q$ einschliesst, trifft $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{N}$. Construiren wir schliesslich den Kegelschnitt $\mathfrak{k}$ aus den vier Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ und der Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$, so schneidet derselbe die Curve m in $M_I\, M_{II}\, M_{III}\, M_{IV}$.

Bilden die Punkte A, A, B, B ein Gelenkviereck, so gestaltet sich die Construction des Kegelschnitts $\mathfrak{k}$ wesentlich einfacher. In diesem Falle sind nämlich A und B selbst zwei Burmester'sche Punkte, und dann können wir die Punkte $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ entbehren, da $\mathfrak{k}$ bereits bestimmt ist durch $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$, A, B und $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$.

§ 8. Bestimmung der Burmester'schen Punkte in speciellen Fällen.

I. Genügen $d\vartheta$, $d\tau$, $d^2\vartheta$ u. s. w. der Gleichung 26) (§ 2), so bleibt der Ball'sche Punkt Q in fünf unendlich benachbarten Systemlagen auf einer Geraden. Dann gehört Q zu den Burmester'schen Punkten und liegt folglich auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{k}$, der $\mathfrak{P}Q$ zur Tangente hat, d. h. $\mathfrak{k}$ zerfällt in die Gerade $\mathfrak{P}Q$ und in eine zweite Gerade. Befindet sich also unter den vier Burmester'schen Punkten der Ball'sche Punkt, so liegen die drei übrigen auf einer Geraden.

Dieser Fall tritt z. B. für jede Systemlage ein, wenn die Bewegung des Systems erzeugt wird durch das Abrollen einer logarithmischen Spirale auf einer Geraden. Ist nämlich die Polbahn eine Gerade, also $d\tau = d^2\tau = d^3\tau = 0$, so wird die Bedingung 26) erfüllt, wenn $d\vartheta\, d^3\vartheta = 2d^2\vartheta^2$ ist. Dann erhalten wir aber aus 31) für die Krümmungsradien der Polcurve und ihrer Evoluten die Werthe $p = \frac{du}{d\vartheta}$, $p_1 = \frac{du\, d^2\vartheta}{d\vartheta^3} = \frac{d^2\vartheta}{d\vartheta^2} \cdot p$, $p_2 = -\frac{du\, d^2\vartheta^2}{d\vartheta^5} = -\frac{p^2}{p_1}$, und diese Beziehung besteht in der That zwischen p, p_1, p_2, wenn die Polcurve eine logarithmische Spirale ist.

II. Nehmen wir an, es sei $d^2\vartheta = 0$, was nach 33) identisch ist mit der Bedingung

$$\frac{\pi_1}{p_1} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^3,$$

so wird in Figur 3 $\mathfrak{T}\mathfrak{U} = \mathfrak{V}\mathfrak{W} = 0$, die Ball'schen Punkte Q, Ω fallen daher bez. mit den Wendepolen W, K zusammen, und die Kreispunktcurve m zerfällt in die Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ und in einen Kreis f mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)(2d\vartheta + d\tau) - 3y\, du = 0.$$

Dann liegen zwei der Burmester'schen Punkte, etwa M_{I}, M_{II}, auf $\mathfrak{n}$; für die Entfernungen derselben von $\mathfrak{P}$ folgt aus 42), wenn wir $x = 0$ setzen,

$$47)\quad y^2[d\vartheta(d\vartheta + d\tau)(2d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta] - y\, du\, d\vartheta(5d\vartheta + 4d\tau) + 3du^2 d\vartheta = 0.$$

Die beiden anderen Punkte M_{III}, M_{IV} liegen auf dem Kreise f und sind nach 40) bestimmt durch

$$48)\quad 3d^3\vartheta \tan^2\varphi + 3d\vartheta\, d^2\tau \tan\varphi - d\vartheta(d\vartheta - d\tau)(2d\vartheta + d\tau) = 0.$$

Ist nun überdies $d^3\vartheta = 0$, d. h. ist die Drehung des Systems proportional der fortschreitenden Bewegung des Pols auf der Polbahn, so ergiebt sich aus 47)

$$y_{\rm I}=\frac{du}{d\vartheta+d\tau},\quad y_{\rm II}=\frac{3\,du}{2\,d\vartheta+d\tau}$$

und aus 48)

$$\tan\varphi_{\rm III}=\infty,\quad \tan\varphi_{\rm IV}=\frac{(d\vartheta-d\tau)(2\,d\vartheta+d\tau)}{3\,d^2\tau}.$$

Dann ist also $\mathfrak{M}_{\rm I}$ identisch mit dem Krümmungsmittelpunkt der Polcurve, während $\mathfrak{M}_{\rm II}$ und $\mathfrak{M}_{\rm III}$ mit demjenigen Punkte zusammenfallen, in welchem der Kreis f die Polbahnnormale zum zweiten Male schneidet.

Den Bedingungen $d^2\vartheta=0$, $d^3\vartheta=0$ wird durch beliebige Werthe von π, π_1, π_2, p genügt, wenn $p_1=\pi_1\left(\frac{p}{\pi}\right)^3$ und $p_2=\left(\frac{p}{\pi}\right)^4\left\{\pi_2+3(\pi-p)\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)^2\right\}$ ist. Setzen wir noch $d^2\tau=0$, so haben wir den in § 5 betrachteten Fall der cyklischen Rollung, und dann vereinigen sich $\mathfrak{M}_{\rm II}$, $\mathfrak{M}_{\rm III}$ und $\mathfrak{M}_{\rm IV}$ in dem Punkte N der Figur 8.

III. Wir betrachten schliesslich den Fall, dass Polbahn und Polcurve symmetrisch sind in Bezug auf t*, setzen also $d\tau=-\frac{d\vartheta}{2}$, $d^2\tau=-\frac{d^2\vartheta}{2}$, $d^3\tau=-\frac{d^3\vartheta}{2}$, $\pi=-p$, $\pi_1=p_1$, $\pi_2=-p_2$. Dann wird in Figur 3 $\mathfrak{P}W=\frac{p}{2}$, $W\mathfrak{B}=\frac{p}{4}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}=\frac{p_1}{4}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{R}=\frac{p_1+p_2}{8}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{S}=\frac{p_1}{2}$, und die Gleichungen 36) und 37) in § 6 liefern gleiche Werthe für $\tan\varphi_F$ und $\tan\varphi_Q$, d. h. das Focalcentrum F fällt mit dem Ball'schen Punkte Q zusammen. Für die Burmester'schen Punkte folgt aus 40)

$$d^2\vartheta^2\tan^4\varphi+(3\,d\vartheta\,d^3\vartheta-4\,d^2\vartheta^2)\tan^2\varphi-\frac{9}{4}\,d\vartheta^4=0,$$

oder nach Einführung der Krümmungsradien p, p_1, p_2

$$\tan^2\varphi=-\frac{3pp_2+5p_1^2}{2p_1^2}\pm\sqrt{\left(\frac{3pp_2+5p_1^2}{2p_1^2}\right)^2+\left(\frac{3p}{p_1}\right)^2}.$$

Es sind daher im vorliegenden Falle zwei der Burmester'schen Punkte stets reell, die beiden andern imaginär. Bezeichnen wir die beiden reellen Punkte mit $\mathfrak{M}_{\rm I}$, $\mathfrak{M}_{\rm II}$, so halbirt n den Winkel $\mathfrak{M}_{\rm I}\mathfrak{P}\mathfrak{M}_{\rm II}$, und da gegenwärtig die Kreispunktcurven m und μ zu einander symmetrisch sind in Bezug auf t, so liegen auch $\mathfrak{M}_{\rm I}$ und $M_{\rm II}$, $\mathfrak{M}_{\rm II}$ und $M_{\rm I}$ symmetrisch in Bezug auf diese Gerade.

---

* Vergl. Burmester, Kinematik I, S. 45.

XI.

Zum Fundamentalsatz über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen.

Von

Dr. Gustav Mie.

Erster Abschnitt.

Ueber unendliche Differentialgleichungssysteme.

1. Vorbemerkungen.

1. Eine Potenzreihe von unendlich vielen Variabeln $z_1, z_2, \ldots$ d. h. ein Ausdruck von der Form:

$$a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_{11} \cdot z_1^2 + a_{12} \cdot z_1 z_2 + \cdots$$

hat nur dann einen Sinn, wenn positive, von Null verschiedene Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ existiren, derart, dass die Modulnreihe:

$$|a_0| + |a_1| \cdot r_1 + |a_2| \cdot r_2 + \cdots + |a_{11}| \cdot r_1^2 + |a_{12}| \cdot r_1 r_2 + \cdots$$

convergirt. Ein Unterschied gegen die Potenzreihen mit einer endlichen Zahl von Variabeln zeigt sich darin, dass sehr wohl eine solche Reihe von Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ existiren kann, aber keine von Null verschiedene Zahl r vorhanden zu sein braucht, welche kleiner ist, als alle diese Zahlen, welche also, für alle z eingesetzt, eine convergente Reihe:

$$|a_0| + (|a_1| + |a_2| + \cdots) \cdot r + (|a_{11}| + |a_{12}| + \cdots) r^2 + \cdots$$

liefert.

Anmerkung. Hierdurch schliessen wir von der Untersuchung solche Reihen aus, welche für gewisse Bereiche von z-Werthen bedingt convergent sind, obwohl auch manche von diesen in gewissem Sinne eindeutige Functionen der z darstellen können. Sie könnten nämlich so beschaffen sein, dass bei irgend einer Umstellung der Glieder sich stets nur für gewisse Werthecombinationen der z der Werth der Reihe ändert, während er für alle anderen Combinationen derselbe bleibt. Ist die Anzahl der z endlich, so kann dies natürlich nicht eintreten.

2. Eine Potenzreihe mit einer endlichen Anzahl Variabeln wird nach einer Grösse, von welcher diese Variabeln abhängen, so differenzirt, dass man Glied für Glied differenzirt. Ist die Anzahl unendlich gross, so gilt dies bekanntlich nicht mehr allgemein (auch wenn die Reihe unbedingt convergirt). Wir schliessen die Reihen, bei denen man dies Verfahren

nicht anwenden kann, aus, durch die Forderung: Es soll der Differentialquotient von

$$F(x) = a_0 + \alpha_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_{11} z_1{}^2 + \cdots$$

sein:

$$F'(x) = a_1 z'_1 + a_2 z'_2 + \cdots + 2 a_{11} z_1 z'_1 + \cdots$$

falls derselbe überhaupt existirt. Ebenso die zweite Ableitung:

$$F''(x) = a_1 z''_1 + a_2 z''_2 + \cdots + 2 a_{11} z'^2_1 + 2 a_{11} z_1 z''_1 + \cdots \text{ u. s. f.}$$

3. Die Bedeutung der Coefficienten der Reihe: $V = a_0 + a_1 z_1 + \cdots$ ist natürlich:

$$a_0 = (V)_{\substack{z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ \cdots}} \quad a_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)_{\substack{z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ \cdots}} \text{ etc.}$$

Man kann die Potenzreihe fortsetzen und um einen Punkt $z_1 = \alpha_1$, $z_2 = \alpha_2 \ldots$ entwickeln, ob die Anzahl der z endlich oder unendlich ist.

4. Sei nun ein unendliches Differentialgleichungssystem vorgelegt:

$$\frac{dz_1}{dx} = f_1(x, z_1, z_2 \ldots)$$
$$\frac{dz_2}{dx} = f_2(x, z_1, z_2 \ldots)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

(die f Potenzreihen), so frage ich: Lassen sich Potenzreihen von x finden:

$$z_1 = \alpha_1 + C_1^{(1)} x + C_2^{(1)} x^2 + \cdots$$
$$z_2 = \alpha_2 + C_1^{(2)} x + C_2^{(2)} x^2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

welche für $x = 0$ die völlig willkürlich gegebenen Werthe $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ annehmen, und aus denen ich innerhalb eines gewissen Bereiches für jedes $x = \xi$ Werthe $(z_1)_\xi, (z_2)_\xi \ldots$ berechnen kann, die, in $f_1, f_2 \ldots$ eingesetzt, diesen Reihen Werthe $(f_1)_\xi, (f_2)_\xi \ldots$ ertheilen, die gleich den Grössen:

$$\left(\frac{dz_1}{dx}\right)_\xi = C_1^{(1)} + 2 C_2^{(1)} \xi + \cdots$$

beziehungsweise:

$$\left(\frac{dz_2}{dx}\right)_\xi = C_1^{(2)} + 2 C_2^{(2)} \xi + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

sind? Solche Potenzreihen nennt man Integrale des Systems.

Giebt es solche Integrale, so müssen sie sich auf demselben Wege finden lassen, ob endlich oder unendlich viele z vorhanden sind; denn immer ist:

$$C_0^{(1)} = (z_1)_0 = \alpha_1; \quad C_1^{(1)} = \left(\frac{dz_1}{dx}\right)_0 = f_1(0, \alpha_1, \ldots);$$
$$C_2^{(1)} = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{d^2 z_1}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{2!} \cdot f_1{}'(0, \alpha_1, \ldots)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Wenn nicht für alle z Anfangswerthe α gegeben wären, so würden offenbar in diesen Coefficienten noch Grössen stehen, über welche willkürlich zu verfügen ist. Die Data $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ sind also nothwendig zur vollständigen Bestimmung der Integrale.

Ich nehme nun an, die Anfangsdaten $\alpha_1 \dots$ wären so bestimmt, dass sich $f_1, f_2 \dots$ um den Punkt $x = 0$, $z_1 = \alpha_1, \dots$ entwickeln lassen. Indem ich nun für $z_1 - \alpha_1, \dots$ wieder $z_1, \dots$ schreibe, erhalte ich das System:

$$\frac{dz_1}{dx} = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} z_1 + a_2^{(1)} z_2 + \cdots$$

$$\frac{dz_2}{dx} = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} z_1 + a_2^{(2)} z_2 + \cdots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

(wo die a Potenzreihen in x sind) und die Frage ist nun: hat dies System Integrale mit den Anfangswerthen Null.

Existiren welche, so sind diese eindeutig bestimmt, d. h. die Daten $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ reichen aus zur völligen Bestimmung der Integrale, falls es nicht überhaupt gar keine in Potenzreihen entwickelbaren Integrale für diese Anfangsdaten giebt. Ich erhalte nämlich nach der bekannten Methode für die Coefficienten der Integrale:

$$C_1^{(1)} = (a_0^{(1)})_0; \quad 2!\, C_2^{(1)} = (a_0^{(1)\prime})_0 + (a_1^{(1)} . a_0^{(1)} + \cdots)_0;$$

$$3!\, C_3^{(1)} = (a_0^{(1)\prime\prime})_0 + (a_1^{(1)\prime} a_0^{(1)} + \cdots)_0 + (a_1^{(1)} [a_1^{(1)} a_0^{(1)} + \cdots] + \cdots)_0$$

$$\cdot \quad \cdot$$

Wenn sich auf diese Weise nicht endliche eindeutig bestimmte Werthe der C ergeben (wie es bei einer unendlichen Zahl der z in den einzelnen Gleichungen eintreten könnte), so hätten nach der oben gemachten Einschränkung die Differentialquotienten von $z_1 \dots$ im Punkte $x = 0$ überhaupt keinen bestimmten, endlichen Werth, wäre also die Potenzreihenentwickelung unmöglich.

Aber auch, wenn sich für die C endliche Werthe eindeutig ergeben, was immer der Fall wäre, wenn in einer jeden Gleichung nur eine endliche Anzahl der z vorkommt, so könnte noch die Reihe $C_1^{(1)} x + C_2^{(1)} x^2 + \cdots$ divergent sein. Im Folgenden soll eine Methode angegeben werden, die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von in Potenzreihen entwickelbaren Integralen zu finden, falls alle Coefficienten auf den rechten Seiten des Systems positiv sind.

Anmerkung. Damit wäre für den allgemeinen Fall auch eine hinreichende Bedingung gefunden. Denn setzte man für jeden Coefficienten seinen absoluten Betrag, und hätte alsdann das System Integrale, so hat das ursprüngliche System erst recht welche. Nothwendig aber wird die Bedingung nicht sein.

2. Ueber die Integrirbarkeit unendlicher Systeme mit lauter positiven Coefficienten.

5. Ich nehme an, das System:

$$\frac{dz_1}{dx} = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} \cdot z_1 + a_2^{(1)} \cdot z_2 + \cdots$$
$$\frac{dz_2}{dx} = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} \cdot z_1 + a_2^{(2)} \cdot z_2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

in welchem alle Coefficienten positiv sind, habe Integrale:

$$z_1 = C_1^{(1)} x + C_2^{(1)} x^2 + \cdots \qquad Cvgzrad \;\; r_1$$
$$z_2 = C_1^{(2)} x + C_2^{(2)} x^2 + \cdots \qquad \text{,,} \;\; r_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus der Berechnungsmethode folgt, dass alle Coefficienten C positiv sind. Setze ich also in die Reihe für z_1 einen Werth $r \geqq r_1$ ein, so muss sie positiv unendlich werden. Mögen nun auf der rechten Seite der ersten Gleichung etwa die Functionen $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \ldots$ wirklich vorkommen, so will ich einen Werth r wählen, der grösser ist, als irgend welche von den Zahlen $r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \ldots$ und in der ersten rechten Seite $(z_{\alpha_1})_r, (z_{\alpha_2})_r, \ldots$ einsetzen, so muss ihr Werth unendlich werden, weil sie aus lauter positiven Summanden zusammengesetzt wird, von denen einige positiv unendlich sind. Also reicht der Convergenzbereich der Reihe für $\frac{dz_1}{dx}$ nicht bis zum Punkte $x = r$, kann also nur einen Radius haben, der kleiner, höchstens ebenso gross ist, als jeder der $r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \ldots$ Nun hat aber $\frac{dz_1}{dx}$ denselben Convergenzradius wie z_1, nämlich r_1, also ist:

$$r_1 \leqq r_{\alpha_1}, \; r_{\alpha_2}, \ldots$$

Ich schreibe mir nun die erste Gleichung hin, dazu α_1^{te}, die $\alpha_2^{\text{te}}, \ldots$, so weiss ich, dass, wenn auf den rechten Seiten der letzteren ausser $z_1, z_{\alpha_1}, \ldots$ noch Functionen $z_{\beta_1}, z_{\beta_2}, \ldots$ hinzutreten, die Convergenzradien der für diese giltigen Reihen $r_{\beta_1}, r_{\beta_2}, \ldots$ nicht kleiner sind als einer der r_α, also gewiss auch:

$$r_1 \leqq r_{\beta_1}, \; r_{\beta_2}, \ldots$$

Ich füge nun noch die β_1^{te}, die β_2^{te} Gleichung hinzu, so treten rechts vielleicht wieder andere z-Functionen auf, aber die entsprechenden Potenzreihen haben immer wieder Convergenzradien $\geqq r_1$. Durch fortgesetztes Hinzufügen von Gleichungen, eventuell unendlich oftmaliges kann man das System:

$$\frac{dz_1}{dx} = a_0^{(1)} + a_{\alpha_1}^{(1)} z_{\alpha_1} + a_{\alpha_2}^{(1)} z_{\alpha_2} + \cdots$$
$$\frac{dz_{\alpha_1}}{dx} = a_0^{(1)} + a_{\beta_1}^{(1)} . z_{\beta_1} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zu einem vollständigen machen, dessen sämmtliche Integrale Entwickelungen haben mit Convergenzradien $\geqq r_1$.

Eine nothwendige Bedingung dafür, dass sich z_1 als Potenzreihe von x entwickeln lässt, ist also, dass das kleinstmögliche vollständige Theilsystem, in welchem z_1 vorkommt, ausserdem nur solche z-Functionen enthält, für die Potenzreihen giltig sind mit Convergenzradien $\geqq r_1$.

Anmerkung I. Ist das kleinstmögliche System für z_2 mit dem für z_1 identisch, so muss $r_1 \leqq r_2$ und $r_2 \leqq r_1$, also $r_1 = r_2$ sein. Beispielsweise in dem endlichen System:

$$\frac{dz_1}{dx} = f_1(x, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$$
$$\frac{dz_2}{dx} = f_2(x, z_2, z_3, z_4, z_5)$$
$$\frac{dz_3}{dx} = f_3(x, z_2, z_3, z_4, z_5)$$
$$\frac{dz_4}{dx} = f_4(x, z_4, z_5)$$
$$\frac{dz_5}{dx} = f_5(x, z_4, z_5)$$

mit lauter positiven Coefficienten ist

$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_4; \quad r_2 = r_3; \quad r_4 = r_5.$$

Anmerkung II. Sobald negative Coefficienten vorkommen, kann man natürlich keinen derartigen Satz mehr beweisen. So könnten sehr wohl Functionen, wie: $z_1 = x\sqrt{1 - \frac{x}{r_1}}$, $z_2 = x \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{r_2}}, \cdots$, wo die r mit wachsendem Index unter alle Grenzen sinken, Integrale eines für z_1 gefundenen kleinstmöglichen vollständigen Systems sein. Es müssen dann auf den rechten Seiten diejenigen z, deren r kleiner sind als der Convergenzradius des Differentialquotienten links, stets nur in geraden Potenzen vorkommen. In diesem Falle könnte ich für die $r_1, r_2 \ldots$, obwohl alle von Null verschieden sind, keine untere Grenze angeben.

6. Um nun zu untersuchen, ob unendliche Systeme mit lauter positiven Coefficienten Integrale haben, scheide ich nach dem angegebenen Verfahren kleinstmögliche vollständige Systeme aus und untersuche diese.

Allgemeine Methode der Untersuchung.

Anstatt zu fragen: Giebt es ein Integral? darf man auch fragen: Giebt es überhaupt Potenzreihen $C_1^{(1)}x + C_2^{(1)}x^2 + \ldots, \ldots$ welche, an Stelle der z auf den rechten Seiten eingesetzt, diese zu Potenzreihen in x machen:

$$A_0^{(1)} + A_1^{(1)}x + A_2^{(1)}x^2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

wo

$$A_0^{(1)} \leqq C_1^{(1)}; \quad A_1^{(1)} \leqq 2\,C_2^{(1)}; \quad A_2^{(1)} \leqq 3\,C_3^{(1)}; \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots ?$$

Es muss solche geben, denn das Integral selber genügt diesen Bedingungen; andererseits, wenn es überhaupt irgend solche Reihen giebt, so existiren auch Integrale; denn aus der Berechnungsmethode der Coefficienten folgt, wenn etwa das eine Integral ist:

$$c_1^{(1)}\, x + c_2^{(1)}\, x^2 + \cdots, \text{ dass: } c_1^{(1)} \leqq C_1^{(1)},\ c_2^{(1)} \leqq C_2^{(1)}, \ldots$$

also, wenn $C_1^{(1)}\, x + C_2^{(1)}\, x^2 + \cdots$ convergirt, so müssen es gewiss auch die nach der Methode als Integrale gefundenen Reihen.

Nach dem oben Bewiesenen muss es einen Kreis (mit Radius ϱ) geben, in welchem alle Integralentwickelungen convergiren, also müssen sich jene Reihen $C_1^{(1)}\, x + \ldots$ so bestimmen lassen, dass, wenn $r = \frac{1}{\varrho}$:

$$C_1^{(1)} \leqq A^{(1)}.\, r;\quad C_2^{(1)} \leqq A^{(1)}.\, r^2; \ldots C_m^{(1)} \leqq A^{(1)}.\, r^m; \ldots$$
$$C_1^{(2)} \leqq A^{(2)}.\, r;\quad C_2^{(2)} \leqq A^{(2)}.\, r^2; \ldots C_m^{(2)} \leqq A^{(2)}.\, r^m; \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(natürlich dürfen die Grössen $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ mit wachsendem Index unendlich werden).

7. Können wir nun finden, in welchen Fällen sich solche Reihen für Systeme

$$\frac{dz_1}{dx} = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}.\, z_1 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

mit lauter constanten Coefficienten bestimmen lassen, d. h. also, wenn diese Systeme mit Potenzreihen integrirbar sind, so ist ohne Weiteres das Problem auch für den Fall gelöst, wo die Coefficienten noch von x abhängen. Seien nämlich die a-Potenzreihen: $a_\nu^{(\mu)} = \alpha_{\nu 0}^{(\mu)} + \alpha_{\nu 1}^{(\mu)} x + \alpha_{\nu 2}^{(\mu)} x^2 + \cdots$, wo jedes $\alpha_{\nu m}^{(\mu)} \leqq b_\nu^{(\mu)} \cdot R^m$. Dieses R muss ich für alle Coefficienten aller Gleichungen als dasselbe und zwar $\leqq r$ bestimmen können, da die für $\frac{dz_\mu}{dx}$ sich ergebenden Potenzreihen einen Convergenzradius $\varrho \geqq \frac{1}{r}$ haben müssen. Ferner muss sich R so angeben lassen, dass das System:

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} \zeta_1 + b_2^{(1)} \cdot \zeta_2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Integrale hat. Sei nämlich $\xi = \frac{1}{R}$ ein Punkt innerhalb des allen Entwickelungen gemeinsamen Convergenzbereiches, so giebt es für alle z Taylor'sche Reihen:

$$z_1 = d_0^{(1)} + d_1^{(1)}(x - \xi) + d_2^{(1)}(x - \xi)^2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

mit lauter positiven Coefficienten. Bezeichne ich ferner mit $(a_\nu^{(\mu)})_\xi$ die Grösse: $\alpha_{\nu 0}^{(\mu)} + \alpha_{\nu 1}^{(\mu)} \cdot \xi + \alpha_{\nu 2}^{(\mu)} \cdot \xi^2 + \cdots$, so kann ich den grössten Summand dieser Reihe $\alpha_{\nu n}^{(\mu)} \cdot \xi^n = b_\nu^{(\mu)}$ setzen, denn es gelten gewiss die Ungleichungen:

$$\alpha_{\nu m}^{(\mu)} \leqq b_\nu^{(\mu)} \cdot R^m$$

Ausserdem: $b_\nu^{(\mu)} \leqq (a_\nu^{(\mu)})_\xi$. Bezeichne ich nun $x - \xi$ mit x', so hat das System mit lauter positiven Coefficienten:

$$\frac{dz_1}{dx'} = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} \cdot z_1 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

für die positiven Anfangswerthe:

$$(z_1)_0 = d_0^{(1)}, \quad (z_2)_0 = d_0^{(2)}, \cdots$$

Integrale:

$$z_1 = d_0^{(1)} + d_1^{(1)} x' + d_2^{(1)} x'^2 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

also erst recht das System mit lauter kleineren Coefficienten (in denen die Coefficienten der x'-Potenzen überhaupt fehlen):

$$\frac{d\zeta_1}{dx^1} = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} \cdot \zeta_1 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

für die Anfangswerthe: $(\zeta_1)_0 = 0$, $(\zeta_2)_0 = 0 \cdots$

Damit ist also gezeigt: Nothwendig dafür, dass sich das System:

$$\frac{dz_1}{dx} = (\alpha_{00}^{(1)} + \alpha_{01}^{(1)} x + \cdots) + (\alpha_{10}^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)} x + \cdots) z_1 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

mit Hilfe von Potenzreihen integriren lasse, ist: dass alle Coefficienten α kleiner sind als die entsprechenden Coefficienten eines Systems:

$$\frac{dz_1}{dx} = (b_0^{(1)} + b_1^{(1)} z_1 + \cdots) \cdot (1 + Rx + R^2 x^2 + \cdots)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

R bedeutet hier in allen Gleichungen dieselbe positive Zahl, und die b sind positive constante Grössen von der Beschaffenheit, dass das System:

$$\frac{dz_1}{dx} = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} \cdot z_1 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

in Potenzreihen entwickelbare Integrale hat.

Aber diese Bedingung ist auch hinreichend. Dies zeige ich dadurch, dass ich nachweise, dass unter ihrer Voraussetzung das System:

$$\frac{dz_1}{dx} = (b_0^{(1)} + b_1^{(1)} z_1 + \cdots)(1 + Rx + \cdots)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

mit Potenzreihen integrirbar ist. Multiplicire ich nämlich alle Gleichungen mit $(1 - Rx)$, so werden sie:

$$\frac{dz_1}{dx} \cdot (1 - Rx) = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} z_1 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Setze ich nun $\frac{1}{R} lg(1 - Rx) = -y$, so ist: für $x = 0 : y = 0$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - Rx}$,

also:
$$\frac{dz_1}{dx} \cdot (1 - Rx) = \frac{dz_1}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dz_1}{dy}.$$

Unsere Gleichungen lauten also:

$$\frac{dz_1}{dy} = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} \cdot z_1 + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass sich die z als Potenzreihen in y berechnen lassen. Die z sind also in der Umgebung des Punktes $y = 0$ endliche eindeutige Functionen der complexen Variablen y. Nun ist aber y in der Umgebung von $y = 0$, d. h. von $x = 0$ eine endliche eindeutige Function der complexen Variablen x, also auch die z. Folglich lassen sich die z auch als Potenzreihen in x berechnen.

8. Ist für ein bestimmtes System nachgewiesen, dass es Potenzreihen als Integrale hat, so ist damit natürlich dasselbe für sämmtliche Systeme mit kleineren Coefficienten gezeigt, aber zugleich auch für gewisse Systeme mit grösseren Coefficienten. Sei nämlich a eine beliebig grosse Zahl, so hat das System:

$$\frac{dz_1}{dx} = a \cdot a_0^{(1)} + a \cdot a_1^{(1)} z_1 + a \cdot a_2^{(1)} z_2 + \cdots$$
$$\frac{dz_2}{dx} = a \cdot a_0^{(2)} + a \cdot a_1^{(2)} z_1 + a \cdot a_2^{(2)} z_2 + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

zugleich mit dem System

$$\frac{dz_1}{dx} = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} z_1 + a_2^{(1)} z_2 + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

in Potenzreihen entwickelbare Integrale. Dies sieht man unmittelbar, indem man alle Gleichungen des ersten Systems durch a dividirt und $a \,.\, x$ als Unabhängige betrachtet. Hieraus leuchtet von vornherein schon ein, dass lediglich das Verhalten der Coefficienten in der Unendlichkeit über unsere Frage entscheiden wird, ausser wenn von gewissen Coefficienten gezeigt werden sollte, dass sie überhaupt fehlen müssen.

9. Mit Hilfe der entwickelten Methode kann man schon die Frage nach der Integrirbarkeit aller partiellen Differentialgleichungen mit positiven Coefficienten lösen. Indess könnte es vielleicht manchmal von Nutzen sein, dieselbe noch etwas zu modificiren.

Anhang.

Modification der Methode.

Angenommen, das System habe Integrale, so müssen Reihen $C_1^{(1)}x + C_2^{(1)}x^2 + \cdots$ von der oben angegebenen Beschaffenheit existiren, welche einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen. Sei ϱ eine positive Zahl in diesem Bereich, so setze ich $\frac{1}{\varrho} = r$. Dann muss es sicher in jeder Reihe Stellen geben, z. B. das n_1^{te}, n_2^{te} ... Glied, von wo an die Ungleichungen gelten:

$$(n_1+1)\cdot C^{(1)}_{n_1+1} \leqq n_1 \cdot C^{(1)}_{n_1}\cdot r;\quad (n_1+2)C^{(1)}_{n_1+2} \leqq n_1\cdot C^{(1)}_{n_1}\cdot r^2;\ \ldots$$
$$(n_1+m)\cdot C^{(1)}_{n_1+m} \leqq n_1\cdot C^{(1)}_{n_1} r^m,\ \ldots$$
$$(n_2+1)\cdot C^{(2)}_{n_2+1} \leqq n_2\cdot C^{(2)}_{n_2}\cdot r;\quad (n_2+2)\cdot C^{(2)}_{n_2+2} \leqq n_2\cdot C^{(2)}_{n_2} r^2;\ \ldots$$
$$(n_2+m)\cdot C^{(2)}_{n_2+m} \leqq n_2\cdot C^{(2)}_{n_2}\cdot r^m,\ \ldots$$

Also müssen die nach dem Einsetzen der Reihen $C_1^{(1)}x + C_2^{(1)}x^2 + \cdots$ rechts erhaltenen x-Coefficienten $A_0^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, ... $A_0^{(2)}$, ... folgende Ungleichungen befriedigen (vgl. S. 155):

$$A_0^{(1)} \leqq C_1^{(1)},\ \ldots A^{(1)}_{n_1-1} \leqq n_1\,.\,C^{(1)}_{n_1},\ A^{(1)}_{n_1} \leqq n_1\,.\,C^{(1)}_{n_1}\,.\,r,\ \ldots A^{(1)}_{n_1+m} < n_1\, C^{(1)}_{n_1}\,.\,r^{m+1},\ \ldots$$
$$A_0^{(2)} < C_1^{(2)},\ \ldots A^{(2)}_{n_2-1} \leqq n_2\,.\,C^{(2)}_{n_2},\ A^{(2)}_{n_2} < n_2\,.\,C^{(2)}_{n_2}\,.\,r,\ \ldots A^{(2)}_{n_2+m} \leqq n_2\,.\,C^{(2)}_{n_2}\,.\,r^{m+1},\ \ldots$$

. . . .

Würde ich nun rechts nicht die unendlichen Reihen einsetzen, sondern nur Theile derselben, so würden A-Grössen resultiren, welche kleiner sind, als die oben erhaltenen. Also würden für diese A-Grössen die obigen Ungleichungen erst recht gelten. Ich setze nun folgende Theile der Reihen ein:

$$\text{für } z_1:\ C_1^{(1)}x + C_2^{(1)}x^2 + \cdots + C^{(1)}_{n_1}\cdot x^{n_1}$$
$$\text{,,}\ \ z_2:\ C_1^{(2)}x + C_2^{(2)}x^2 + \cdots + C^{(2)}_{n_2}\cdot x^{n_2}$$

. . . .

so ist ersichtlich, dass folgende Bedingung nothwendig ist:

Es muss sich eine Zahl r und eine Reihe von Zahlen $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)} \cdots C^{(1)}_{n_1}$, $C_1^{(2)}, \cdots C^{(2)}_{n_2}, \cdots$ angeben lassen, dass nach dem Ersetzen von

z_1 durch $C_1^{(1)}x + C_2^{(1)}x^2 + \cdots + C^{(1)}_{n_1}x^{n_1}$

z_2 ,, $C_1^{(2)}x + C_2^{(2)}x^2 + \cdots + C^{(2)}_{n_2}x^{n_2}$ (n_1, n_2 ... endlich)

. . . .

auf den rechten Seiten der Gleichungen Potenzreihen entstehen:

$$A_0^{(1)} + A_1^{(1)}x + A_2^{(1)}x^2 + \cdots$$
$$A_0^{(2)} + A_1^{(2)}x + A_2^{(2)}x^2 + \cdots$$

. . . .

deren Coefficienten A folgenden Ungleichungen genügen:

$$A_0^{(1)} \leqq C_1^{(1)},\ A_1^{(1)} \leqq 2C_2^{(1)},\ \ldots A^{(1)}_{n_1-1} < n_1\, C^{(1)}_{n_1},\ \ldots A^{(1)}_{n_1+m} \leqq n_1\,.\,C^{(1)}_{n_1}\,.\,r^{m+1},\ \ldots$$
$$A_0^{(2)} \leqq C_1^{(2)},\ A_1^{(2)} < 2C_2^{(2)},\ \ldots A^{(1)}_{n_2-1} \leqq n_2\, C^{(2)}_{n_2},\ \ldots A^{(2)}_{n_2+m} \leqq n_2\ C^{(1)}_{n_2}\,.\,r^{m+1},\ \ldots$$

. . . .

Dabei ist zu bemerken, dass ich für die Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ mir beliebig grosse untere Grenzen festsetzen kann $n_1 > \mu_1$, $n_2 > \mu_2, \ldots$ Obere Grenzen braucht man nicht angeben zu können.

Aber die Bedingung ist auch schon mehr als hinreichend. Lassen sich nämlich die Zahlen C nur so angeben, dass (unter Beibehaltung der Zeichen):

$$A_0^{(1)} \leqq C_1^{(1)}$$
$$A_1^{(1)} \leqq C_1^{(1)} \cdot r + 2\, C_2^{(1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A^{(1)}_{n_1-1} \leqq C_1^{(1)} \cdot r^{n_1-1} + 2\, C_2^{(1)} \cdot r^{n_1-2} + \cdots + n_1 \cdot C^{(1)}_{n_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A^{(1)}_{n_1+m} \leqq C_1^{(1)} \cdot r^{n_1+m} + 2\, C_2^{(1)} \cdot r^{n_1+m-1} + \cdots + n_1 \cdot C^{(1)}_{n_1} \cdot r^{m+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

so hat das System in Potenzreihen entwickelbare Integrale, deren Convergenzradien nicht unter der Grösse $\frac{1}{2r}$ liegen.

Ich beweise dies zunächst für den Fall, dass in den Coefficienten a x nicht vorkommt. Ich setze: $x \cdot r = \xi$, $r \cdot a_0^{(1)} = \alpha_0^{(1)}, \cdots r \cdot a^{(1)}_{\mu} = \alpha^{(1)}_{\mu}, \cdots C_1^{(1)} \cdot r = \Gamma_1^{(1)}$, $C_2^{(1)} \cdot r^2 = \Gamma_2^{(1)}, \cdots$, so werden die rechten Seiten des Systems

$$2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{d\xi} = \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \cdot z_1 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

nach der Substitution $z_1 = \Gamma_1^{(1)} x + \cdots + \Gamma^{(1)}_{n_1} \cdot x^{n_1}, \cdots$ Potenzreihen liefern: $\mathsf{A}_0^{(1)} + \mathsf{A}_1^{(1)} x + \mathsf{A}_2^{(1)} x^2 + \cdots$, wo $\mathsf{A}_0^{(1)} = A_0^{(1)} \cdot r$, $\mathsf{A}_1^{(1)} = A_1^{(1)} \cdot r^2, \cdots$ Es bestehen also die Ungleichungen:

$$\mathsf{A}_0^{(1)} \leqq \Gamma_1^{(1)}, \ \cdots \ \mathsf{A}^{(1)}_{n_1-1} \leqq \Gamma_1^{(1)} + 2\, \Gamma_2^{(1)} + \cdots + n_1 \cdot \Gamma^{(1)}_{n_1}, \cdots$$
$$\mathsf{A}^{(1)}_{n_1+m} \leqq \Gamma_1^{(1)} + \cdots + n_1\, \Gamma^{(1)}_{n_1}, \cdots$$

Nun bilde ich mir ein neues System folgendermassen. Ich substituire:

$$z_1 = \Gamma_1^{(1)} \cdot z_{11} + \Gamma_2^{(1)} \cdot z_{12} + \cdots + \Gamma^{(1)}_{n_1} \cdot z_{1n_1}$$
$$z_2 = \Gamma_1^{(2)} \cdot z_{21} + \Gamma_2^{(2)}\, z_{22} + \cdots + \Gamma^{(2)}_{n_2}\, z_{2n_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

und erhalte:

$$2') \begin{cases} \dfrac{dz_1}{d\xi} = \alpha_0^{(1)} + \sum \alpha_\mu^{(1)} \cdot \Gamma_1^{(\mu)} \cdot z_{\mu 1} + \sum \alpha_\mu^{(1)}\, \Gamma_2^{(\mu)} \cdot z_{\mu 2} + \cdots \\ \qquad + \sum \alpha^{(1)}_{\mu\nu} \cdot \Gamma_1^{(\mu)} \cdot \Gamma_1^{(\nu)}\, z_{\mu 1} \cdot z_{\nu 1} + \sum \alpha^{(1)}_{\mu\nu} \cdot \Gamma_1^{(\mu)} \cdot \Gamma_2^{(\nu)} \cdot z_{\mu 1} \cdot z_{\nu 2} + \cdots \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ich will dafür schreiben:

$$2') \begin{cases} \dfrac{dz_1}{d\xi} = \beta_0^{(1)} + \sum \beta^{(1)}_{\mu 1} \cdot z_{\mu 1} + \sum \beta^{(1)}_{\mu 2} \cdot z_{\mu 2} + \cdots \\ \qquad + \sum \beta^{(1)}_{\mu 1,\, \nu 1} \cdot z_{\mu 1} \cdot z_{\nu 1} + \sum \beta^{(1)}_{\mu 1,\, \nu 2} \cdot z_{\mu 1} \cdot z_{\nu 2} + \cdots \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dann setzen sich die A offenbar folgendermassen aus den β zusammen:

$$\mathsf{A}_0^{(1)} = \beta_0^{(1)}$$
$$\mathsf{A}_1^{(1)} = \sum \beta^{(1)}_{\mu 1}$$
$$\mathsf{A}_2^{(1)} = \sum \beta^{(1)}_{\mu 2} + \sum \beta^{(1)}_{\mu 1,\, \nu 1}$$
$$\mathsf{A}_3^{(1)} = \sum \beta^{(1)}_{\mu 3} + \sum \beta^{(1)}_{\mu 1,\, \nu 2} + \sum \beta^{(1)}_{\lambda 1,\, \mu 1,\, \nu 1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Nun zerlege ich alle β in mehrere Summanden, so dass auch die A in mehrere Posten zerfallen:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}_0^{(1)} &= A_0^{(11)} = \beta_0^{(1)}\\
\mathsf{A}_1^{(1)} &= A_1^{(11)} + A_1^{(12)} = \sum \beta_{\mu_1}^{(11)} + \sum \beta_{\mu_1}^{(12)}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\mathsf{A}_m^{(1)} &= A_m^{(11)} + \cdots + A_m^{(1n_1)} = \left(\sum \beta_{\mu m}^{(11)} \;.\; + \cdots + \sum \beta_{\mu m}^{(1n_1)}\right)\\
&\quad + \left(\sum \beta_{\mu, m-\lambda; \nu, \lambda}^{(11)} + \cdots + \sum \beta_{\mu, m-\lambda; \nu, \lambda}^{(1n_1)}\right)\\
m &\geqq n_1 - 1 \qquad + \cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

wobei jedes $\beta^{(1)} = \beta^{(11)} + \cdots + \beta^{(1n_1)}$ gesetzt ist, bezw. gleich einer geringeren Zahl von Summanden, wie z. B. $\beta_{\mu_1}^{(1)} = \beta_{\mu_1}^{(11)} + \beta_{\mu_1}^{(12)}$.

Diese Zerlegung sei so vorgenommen, dass

$$
\begin{aligned}
&A_0^{(11)} \leqq \Gamma_1^{(1)}, \text{ was gewiss möglich ist, da } \mathsf{A}_0^{(1)} = A_0^{(11)} \leqq \Gamma_1^{(1)}\\
&A_1^{(11)} \leqq \Gamma_1^{(1)};\; A_1^{(12)} \leqq 2\,\Gamma_2^{(1)} \qquad \mathsf{A}_1^{(1)} = A_1^{(11)} + A_1^{(12)} \leqq \Gamma_1^{(1)} + 2\Gamma_2^{(1)}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&A_m^{(11)} \leqq \Gamma_1^{(1)};\; A_m^{(12)} \leqq 2\,\Gamma_2^{(1)}; \cdots A_m^{(1n_1)} \leqq n_1 \Gamma_{n_1}^{(1)} \quad \mathsf{A}_m^{(1)} = A_m^{(11)} + \cdots + A_m^{(1n_1)}\\
&\qquad \leqq \Gamma_1^{(1)} + 2\,\Gamma_2^{(1)} + \cdots + n_1\, \Gamma_{n_1}^{(1)}\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Könnte ich nun das folgende System integriren:

$$
3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\Gamma_1^{(1)} \cdot \frac{dz_{11}}{d\xi} &= \beta_0^{(11)} + \beta_{11}^{(11)} \cdot z_{11} + \cdots\\
\Gamma_2^{(1)} \cdot \frac{dz_{12}}{d\xi} &= \qquad\quad \beta_{11}^{(12)} \cdot z_{11} + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\Gamma_{n_1}^{(1)} \cdot \frac{dz_{1n_1}}{d\xi} &= \qquad\quad \beta_{1n_1-1}^{(1n_1)} \cdot z_{1n_1-1} + \cdots\\
\Gamma_1^{(2)} \cdot \frac{dz_{21}}{d\xi} &= \beta_0^{(21)} + \beta_{11}^{(21)} \cdot z_{11} + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

so wären auch Integrale für 2) vorhanden. In der That, man braucht nur zu setzen:

$$z_1 = \Gamma_1^{(1)} z_{11} + \Gamma_2^{(1)} z_{12} + \cdots + \Gamma_{n_1}^{(1)} \cdot z_{1n_1},$$

so wären dies die gewünschten Integrale. Befriedigen nämlich die für $z_{11}, \ldots$ efundenen convergenten Potenzreihen das System 3) identisch, so befriedigen sie auch 2′), welches ich aus 3) erhalte, indem ich die n_1 ersten Gleichungen summire, ebenso die folgenden n_2 u. s. f. 2′) aber wurde aus 2) durch jene Substitution erhalten, welche die $z_1, z_2 \ldots$ durch die $z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{21}, z_{22} \ldots$ ersetzte. Wird also 2′) befriedigt, so auch das durch Rückwärtssubstitution erhaltene System 2).

Aber 3) lässt sich gewiss integriren, wenn sich ein ganz ähnliches System:

$$
4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\Gamma_1^{(1)} \cdot \frac{d\zeta_{11}}{dx} &= b_0^{(11)} + b_{11}^{(11)} \cdot \zeta_{11} + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

integriren lässt, in welchem jeder Coefficient b grösser oder gleich dem entsprechenden β in 3) ist. Ich construire mir nun solch ein System in der Weise, dass die Summen:

$$B_0^{(11)} = b_0^{(11)} \qquad = \Gamma_1^{(1)} \geqq A_0^{(11)} = \beta_0^{(11)}$$
$$B_1^{(11)} = \sum b_{\mu_1}^{(11)} \qquad = \Gamma_1^{(1)} \geqq A_1^{(11)} = \sum \beta_{\mu 1}^{(11)}$$
$$B_2^{(11)} = \sum b_{\mu_2}^{(11)} + \sum b_{\mu_1, \nu_1}^{(11)} = \Gamma_1^{(1)} \geqq A_2^{(11)} = \sum \beta_{\mu_2}^{(11)} + \sum \beta_{\mu 1, \nu_1}^{(11)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_1^{(12)} = \sum b_{\mu 1}^{(12)} \qquad = 2\,\Gamma_2^{(1)} \geqq A_1^{(12)} = \sum \beta_{\mu 1}^{(12)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{n_1-1}^{(1 n_1)} = \sum b_{\mu, n_1-1}^{(1 n_1)} + \cdots = n_1 \cdot \Gamma_{n_1}^{(1)} \geqq A_{n_1-1}^{(1 n_1)} = \sum \beta_{\mu, n_1-1}^{(1 n_1)} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dann hat System 4) die folgenden Reihen als Integrale:

$$\zeta_{11} = \zeta_{21} = \cdots \zeta$$
$$\zeta_{12} = \zeta_{22} = \cdots \zeta^2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\zeta_{1k} = \zeta_{2k} = \cdots \zeta^k$$
$$\cdots\cdots$$

wo ζ definirt ist durch die Gleichung:

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{1-\zeta}; \text{ also } \zeta = 1-\sqrt{1-x}.$$

Würde ich nämlich in 2′) für $z_{11}, \ldots$ die ζ-Potenzen substituiren, denen die entsprechenden $\zeta_{11}, \ldots$ gleichgesetzt sind, so erhielte ich (nach der Definition der Grössen A) als Coefficienten in jener Potenzreihe von ζ, die auf der rechten Seite entstehen würde, die A: z. B. Gleichung 1):

$$\mathsf{A}_0^{(1)} + \mathsf{A}_1^{(1)} \cdot \zeta + \mathsf{A}_2^{(1)} \cdot \zeta^2 + \cdots$$

also in System 3) bei derselben Substitution die $A_0^{(11)}, A_1^{(11)}, \ldots$; die ersten rechten Seiten würden beispielsweise

$$A_0^{(11)} + A_1^{(11)} \cdot \zeta + A_2^{(11)} \cdot \zeta^2 + \cdots$$
$$A_1^{(12)} \cdot \zeta + A_2^{(12)} \cdot \zeta^2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{n_1-1}^{(1 n_1)} \cdot \zeta^{n_1-1} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Bei der analogen Substitution in 4) erhielte ich ebenso die $B_0^{(11)}, B_1^{(11)}, \ldots$ Setzte ich z. B. in der ersten Gleichung die Potenzreihen für $\zeta_{11}, \ldots$ ein, so erhielte ich:

$$\Gamma_1^{(1)} \cdot \frac{d\zeta}{dx} = B_0^{(11)} + B_1^{(11)} \cdot \zeta + B_2^{(11)} \cdot \zeta^2 + \cdots$$

(ζ ist eine Potenzreihe in x); da aber:

$$B_0^{(11)} = B_1^{(11)} = \cdots = \Gamma_1^{(1)}, \frac{d\zeta}{dx} = 1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots = \frac{1}{1-\zeta},$$

also eine Identität.

Genau so giebt die zweite Gleichung:

$$\Gamma_2^{(1)} \cdot \frac{d(\zeta^2)}{dx} = B_1^{(12)} \cdot \zeta + B_2^{(12)} \cdot \zeta^2 + \cdots$$

da $B^{(12)} = B_2^{(12)} = \cdots = 2\,\Gamma_2^{(1)}$, wieder die Identität:

$$\frac{d\zeta}{dx} = 1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots = \frac{1}{1-\zeta},$$

ebenso die k^{te} Gleichung: $k \leqq n_1$

$$\Gamma_k^{(1)} \cdot \frac{d(\zeta^k)}{dx} = B_{k-1}^{(1k)} \cdot \zeta^{k-1} + \cdots$$

$$k \cdot \Gamma_k^{(1)} \cdot \zeta^{k-1} \cdot \frac{d\zeta}{dx} = B_{k-1}^{(1k)} \cdot \zeta^{k-1} + \cdots$$

$$\text{weil } B_{k-1}^{(1k)} = \cdots = k \cdot \Gamma_k^{(1)}, \frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{1-\zeta};$$

ebenso alle übrigen Gleichungen.

System 4) hat also Integrale, die in dem Bereiche $|x| < \frac{1}{2}$ alle convergente Potenzreihen sind, also auch 3), also auch 2). Letzteres entstand aus dem ursprünglichen · durch die Substitution: $\xi = xr$, also hat auch dieses als Integrale Potenzreihen, die für $|x| = \frac{1}{2r}$ noch convergiren.

Wenn nun die Coefficienten a von x abhängen, so füge ich zum System die Gleichung $\frac{dz_0}{dx} = 1$ hinzu, die das Integral $z_0 = x$ hat. Ersetze ich nun in allen Gleichungen x durch z_0, so erhalte ich ein System mit constanten Coefficienten, für welches der Satz bewiesen wurde. Ich nehme nun an, dass sich für alle z ganze Functionen substituiren lassen, welche der im Satze angegebenen Bedingung genügen, und zwar sei die für z_0 einfach x (also $C_1^{(0)} = 1$, $C_2^{(0)} = \cdots = C_{n_0}^{(0)} = 0$); dann hat das System gewiss Integrale. Hätte ich also von vornherein für z_0 x stehen lassen und das Kriterium angewandt, so wäre die Existenz der Grössen r, $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, ... ebenfalls hinreichend gewesen.

Zusatz. Mit Hilfe dieser modificirten Methode lässt sich auch der S. 157 aufgestellte Satz beweisen, dass das System

$$1) \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = \left(b_0^{(1)} + b_1^{(1)} z_1 + \cdots\right) \cdot \left(1 + Rx + R^2 x^2 + \cdots\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

zugleich mit dem System:

$$2) \quad \begin{cases} \frac{d\zeta_1}{dx} = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} \cdot \zeta_1 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Integrale hat. Nach dem eben bewiesenen Satze müssen sich nämlich Ausdrücke:

$$C_1^{(1)} x + \ldots + C_{n_1}^{(1)} x^{n_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

finden lassen, welche, für ζ_1 bezw. ζ_2, ... eingesetzt, die rechten Seiten von 2) zu Potenzreihen in x machen: $A_0^{(1)} + A_1^{(1)} x + A_2^{(1)} x^2 + \cdots$ so dass: $A_0^{(1)} \leq C_1^{(1)}, \cdots$ $A_k^{(1)} \leq n_1 \cdot C_{n_1} \cdot r^{k - n_1 + 1}, \cdots (k \geq n_1 - 1.)$ Setze ich dieselben Ausdrücke für bezw. z_1, ... in 1) ein, so bekomme ich auf den rechten Seiten Potenzreihen:

$$B_0^{(1)} + B_1^{(1)} x + B_2^{(1)} x^2 + \cdots = \left(A_0^{(1)} + A_1^{(1)} x + A_2^{(1)} x^2 + \cdots\right) \cdot \left(1 + Rx + R^2 x^2 + \cdots\right)$$

Also:

$$B_0^{(1)} = A_0^{(1)}, B_1^{(1)} = A_0^{(1)} \cdot R + A_1^{(1)}, \ldots B_{n_1+m-1}^{(1)} = A_0^{(1)} \cdot R^{n_1+m-1} + \cdots + A_{n_1+m-1}^{(1)}$$

$$B_0^{(1)} \leq C_1^{(1)}, B_1^{(1)} \leq C_1^{(1)} \cdot R + 2\, C_2^{(1)}, \ldots$$

$$B_{n_1+m-1}^{(1)} \leq C_1^{(1)} \cdot R^{n_1+m-1} + \cdots + n_1\, C_{n_1}^{(1)} \left(r^m + r^{m-1} \cdot R + \cdots R^m\right).$$

Offenbar muss sich eine Zahl $r_1 > r$, R bestimmen lassen, so dass für jedes m: $r_1^m \geq r^m + r^{m-1} \cdot R + \cdots + R^m$; dann ist aber:

$$B_0^{(1)} \leq C_1^{(1)}, B_1^{(1)} \leq C_1^{(1)} \cdot r_1 + 2\, C_2^{(1)}, \cdots B_{n_1+m-1}^{(1)} \leq C_1^{(1)} \cdot r_1^{n_1+m-1} + \cdots + n_1 \cdot C_{n_1}^{(1)} \cdot r_1^m, \cdots$$

Somit erfüllen für System 1) die Zahlen: r_1, $C_1^{(1)}$, $\cdots$ $C_{n_1}^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $\cdots$ die hinreichende Bedingung, das System hat also Integrale.

Zweiter Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungssysteme, aufgefasst als totale Systeme unendlich hoher Classe.

1. Vorbemerkungen.

10. Jede partielle Differentialgleichung kann man ersetzen durch ein unendliches System totaler. Sei z. B. vorgelegt:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Ich denke mir die Variable x bevorzugt, das heisst: ich betrachte das Integral z als eine Function von x, deren Coefficienten noch von einem Parameter y abhängen. Fixire ich den Werth dieses Parameters als y_0, so sei jene Function von $x : z_0$. Lasse ich y variiren, indem ich längs einer Geraden um die Strecken Δy, $2\Delta y, \ldots n\Delta y, \ldots$ fortgehe, so seien die entsprechenden z-Functionen mit z_1, $z_2, \ldots z_n, \ldots$ bezeichnet. Offenbar ist

y_0 1 2 3 n

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y_0} = \lim_{\Delta y = 0} \left(\frac{z_1 - z_0}{\Delta y}\right)$. Somit kann ich im Punkte $y = y_0$ unsere partielle Differentialgleichung durch die totale

$$F\left(x, y_0, z_0, \frac{dz_0}{dx}, \frac{z_1 - z_0}{\Delta y}\right) = 0$$

ersetzen, wenn ich nur Δy unendlich klein setze. Aber offenbar genügt diese Gleichung nicht zur Bestimmung von z_0; denn sie enthält noch die Function z_1, die unbekannt ist. Aber für diese existirt ebenfalls eine Differentialgleichung:

$$F\left(x, y_0 + \Delta y, \frac{dz_1}{dx}, \frac{z_2 - z_1}{\Delta y}\right) = 0,$$

in welche freilich wieder eine neue Unbekannte z_2 eintritt. Auch für diese giebt es eine ähnliche Gleichung, die noch z_3 enthält. Wir gelangen auf die Art zu einem unendlichen Differentialgleichungssystem, welches mit der partiellen Differentialgleichung äquivalent ist, wenn man Δy unendlich klein nimmt.

Ich denke mir in $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ $\frac{\partial z}{\partial x}$ ausgerechnet:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Dann ist dies unendliche System:

$$\frac{dz_0}{dx} = f\left(x, y_0, z_0, \frac{z_1 - z_0}{\Delta y}\right) = \varphi_0(x, z_0, z_1),$$
$$\frac{dz_1}{dx} = f\left(x, y_0 + \Delta y, z_1, \frac{z_2 - z_1}{\Delta y}\right) = \varphi_1(x, z_1, z_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

11. Lasse ich Δy unendlich klein werden, so kommen alle Functionen $z_0, z_1, \ldots$ einander unendlich nahe. Es empfiehlt sich daher anstatt dieser z neue, wirklich von einander verschiedene Functionen als Unbekannte zu nehmen. Das Einfachste ist, die durch Subtraction unendlich benachbarter Functionen und Division mit Δy erhaltenen „partiellen Differentialquotienten nach y" zu wählen; man hat zu diesem Zweck das unendliche System in der Weise umzuformen, dass man je zwei benachbarte Gleichungen subtrahirt und durch Δy dividirt, d. h. man erhält das gesuchte System durch fortgesetztes Differenziren der ursprünglichen Gleichung nach y. Setze ich:

$$(z)_{y_0} = z_0, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y_0} = z_1, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{y_0} = z_2, \cdots$$

so ist dies System:

$$\frac{dz_0}{dx} = \left[f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]_{y_0} = f_0(x, z_0, z_1)$$
$$\frac{dz_1}{dx} = \left[\frac{\partial}{\partial y} f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]_{y_0} = f_1(x, z_0, z_1, z_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

12. Die Frage nach dem Integral z der partiellen Differentialgleichung kann ich ersetzen durch die Frage nach den Integralen $z_0, z_1, \ldots$ dieses Systems. Für z wird dann gelten:

$$z = z_0 + z_1(y - y_0) + z_2 \cdot \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \cdots$$

Zur völligen Bestimmung dieser Integrale nothwendig und hinreichend sind, wie oben gezeigt, die Daten: $(z_0)_{x_0} = \alpha_0$, $(z_1)_{x_0} = \alpha_1, \ldots$ oder, was dasselbe ist: die willkürliche Function $(z)_{x_0} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot (y - y_0) + \cdots$

Die Frage, ob sich nach einer bestimmten Wahl dieser Daten das Integral in Form einer Potenzreihe finden lässt, zerfällt in zwei unabhängige Fragen:

1. Hat das unendliche System in Potenzreihen entwickelbare Integrale $z_0, z_1, \ldots$?

2. Hat die Reihe $z = z_0 + z_1(y - y_0) + \cdots$ einen Sinn?

13. Es braucht hier nur darauf hingewiesen zu werden, dass auch jedes System von der Form:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = f_1\left(x, y, z_1, z_2, \ldots z_n, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \ldots \frac{\partial z_n}{\partial y}, \ldots \frac{\partial^k z_\lambda}{\partial y^k}, \ldots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial z_n}{\partial x} = f_n\left(x, y, z_1, z_2, \ldots z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \ldots \ldots\ldots\right)$$

sich ebenso als unendliches System auffassen lässt, und dass als Anfangsdaten nothwendig und hinreichend sind $(z_1)_{x_0}, \dots (z_n)_{x_0}$ als Functionen von y.

Ebenso, wenn nicht nur ein Parameter y vorkommt, sondern beliebig viele $y_1, \dots y_m$. Nur bekäme man hier nicht eine einfach unendliche Reihe von Gleichungen und Unbekannten, sondern eine m-fach unendliche Menge.

Endlich, wenn die Gleichungen nicht nur in den y, sondern auch in x von höherer Ordnung als der ersten sind, muss man zwei Fälle unterscheiden:

1. Die höchste Ableitung nach x ist immer rein, es kommen nur Ableitungen $\frac{\partial^\nu z}{\partial x^\nu}$ vor (ν die höchste Ordnung in x).

2. Die höchsten Ableitungen nach x sind (alle oder zum Theil) noch nach irgend welchen y differenzirt, es kommen also Ausdrücke: $\frac{\partial^{\nu+\mu} z}{\partial x^\nu \partial y^\mu}$ vor.

Den ersten Fall kann man bekanntlich immer auf ein System wie das eben betrachtete zurückführen. So z. B. die Gleichung:

$$\frac{\partial^\nu z}{\partial x^\nu} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots \frac{\partial^{\nu-1} z}{\partial x^{\nu-1}}, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots \frac{\partial^{\nu+\mu-1} z}{\partial x^{\nu-1} \partial y^\mu}\right)$$

auf das System:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z', \frac{\partial z'}{\partial x} = z'' \dots \frac{\partial z^{(\nu-1)}}{\partial x} = f\left(x, y, z, z', \dots z^{(\nu-1)}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots \frac{\partial^\mu z^{(\nu-1)}}{\partial y^\mu}\right).$$

Als Anfangsdaten erfordert sind: $(z)_{x_0}, (z')_{x_0}, \dots (z^{(\nu-1)})_{x_0}$ als Functionen von y.

Im zweiten Falle geht dies nicht. Ich nehme z. B. die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Nenne ich $\frac{\partial z}{\partial y} = z_1, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_2, \dots$, so erhalte ich als Aequivalent folgendes unendliche System:

$$\frac{dz}{dx} = z', \frac{dz_1}{dx} = f(x, y, z, z', z_1, z_2) = \frac{\partial z'}{\partial y},$$

$$\frac{dz_2}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} = \varphi\left(x, y, z, z', z_1, z_2, \frac{\partial z'}{\partial y}, z_3\right) = f_1(x, y, z, z', z_1, z_2, z_3),$$

$$\frac{dz_3}{dx} = f_2(x, y, z, z', z_1, z_2, z_3, z_4),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Dieses ist aber unvollständig; denn es kommt überall noch die Function z' vor, für welche keine eigene Gleichung vorhanden ist. Um also die Integrale des Systems völlig bestimmt zu erhalten, muss mir zunächst $(z')_{y_0}$ als Function von x bekannt sein. Ich setze diese ein, so ist das System vollständig und ich kann für die gegebene Anfangsfunction $(z)_{x_0} = \alpha_0 + \alpha_1(y - y_0) + \cdots$

die Integrale berechnen und untersuchen, ob sie einen Sinn haben. Wenn nun: $(z')_{y_0} = \beta_1 + \beta_2 x + \cdots$, so ist offenbar: $(z)_{y_0} = \alpha_0 + \beta_1 x + \frac{\beta_2}{2} x^2 + \cdots$ Demnach kann ich sagen:

Um das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, dy} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

zu bestimmen, müssen als Anfangsdaten gegeben sein: $(z)_{y_0}$ als Function von x; $(z)_{x_0}$ als Function von y. Beide müssen im ersten Coefficienten übereinstimmen.

Genau so lässt sich eine Gleichung behandeln, in welcher die höchste ν^{te} Ableitung nach x noch nach y differenzirt vorkommt und zwar im höchsten Falle μ-mal. Ich rechne dann aus:

$$\frac{\partial^{\nu+\mu} z}{\partial x^\nu \partial y^\mu} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots\right)$$

und bilde mir, gerade wie im behandelten einfachen Fall, das unendliche System. Dasselbe wird wieder unvollständig sein, und zwar enthält es überschüssig die Abhängigen:

$$\frac{\partial^\nu z}{\partial x^\nu} = z^{(\nu)}, \frac{\partial^{\nu+1} z}{\partial x^\nu \partial y} = z^\nu, \ldots \frac{\partial^{\nu+\mu-1} z}{\partial x^\nu \partial y^{\mu-1}} = z^{(\nu)}_{\mu-1}.$$

Gerade wie oben wird geschlossen, dass zur Bestimmung der Integrale erforderlich sind die Daten:

$$(z)_{y_0}, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y_0}, \cdots \left(\frac{\partial^{\mu-1} z}{\partial y^{\mu-1}}\right)_{y_0}$$

als Functionen von x,

$$(z)_{x_0}, \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x_0}, \cdots \left(\frac{\partial^{\nu-1} z}{\partial x^{\nu-1}}\right)_{x_0}$$

als Functionen von y, wobei wieder eine gewisse Anzahl von Coefficienten übereinstimmen muss.

14. Schliesslich sei noch bemerkt, dass unter Umständen das so erhaltene unendliche System in lauter Systeme endlicher Classe zerfallen kann. Dies tritt beispielsweise bei der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ein; denn von den Gleichungen:

$$\frac{dz}{dx} = z',$$

$$\frac{dz_1}{dx} = f(x, y, z, z', z_1),$$

$$\frac{dz_2}{dx} = f_1(x, y, z, z', z_1, z_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

bildet, nachdem man für z' die gegebene Function eingesetzt hat, eine jede Gleichung schon mit den vorhergehenden immer ein vollständiges System. In solchen Fällen reducirt sich die Frage nach der Integrirbarkeit der Gleichung immer auf die zweite Frage (s. S. 165): Ist die Reihe $z_0 + z_1(y - y_0) + \cdots$ convergent? Denn die $z_0, z_1, \ldots$ sind als Integrale endlicher Systeme immer zu bestimmen.

2. Methode der Untersuchung, ob partielle Differentialgleichungssysteme mit lauter positiven Coefficienten in Potenzreihen entwickelbare Integrale haben.

15. Wenn nach Ausrechnung der höchsten Differentialquotienten nach x sich auf den rechten Seiten Potenzreihen in den vorkommenden Variabeln (abhängigen und unabhängigen) ergeben, deren Coefficienten sämmtlich positive Zahlen sind, so hat auch das dem partiellen System äquivalente unendliche System lauter positive Coefficienten und man kann die oben angegebene Methode anwenden. Um zu zeigen, wie man im gegebenen Falle zu verfahren hat, unterscheide ich wieder, ob der höchste Differentialquotient nach x nur rein vorkommt oder noch nach einem y differenzirt ist.

Fall 1. Das System ist zu ersetzen durch ein System von einer grösseren Anzahl Gleichungen, in welchem nur erste Differentialquotienten nach x vorkommen. Der Einfachheit halber werde im Folgenden eine einzelne Gleichung betrachtet, die in x von der ersten Ordnung ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots \frac{\partial^\mu z}{\partial y^\mu}\right).$$

Zunächst entwickele ich f um die Anfangswerthe

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = (z)_{x_0},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x_0}, \cdots$$

in eine Taylor'sche Reihe. Der Einfachheit halber schreibe ich dann wieder für $x - x_0 : x$, $y - y_0 : y$, $z - (z)_{x_0} : z, \ldots$ Ich nehme an, die Gleichung habe ein Integral, so berechne ich aus dem im Punkte $y = 0$ äquivalenten unendlichen System die Functionen $z_0, z_1, \ldots$ so ist ja

$$z = z_0 + z_1 y + z_2 \cdot \frac{y^2}{2!} + \cdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_1 + z_2 y + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Setze ich diese Reihen in f ein, so kommt nunmehr rechts y nur noch explicite vor, denn $z_0, z_1, \ldots$ hängen nur von x ab. Ordne ich nun nach Potenzen von y:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots \frac{\partial^\mu z}{\partial y^\mu}\right) = f_0(x, z_0, z_1, \cdots z_\mu) +$$
$$+ f_1(x, z_0, z_1, \cdots z_{\mu+1}) \cdot y + \cdots + f_m(x, z_0, z_1, \cdots z_{\mu+m}) \cdot \frac{y^m}{m!} + \cdots$$

so stellen die Coefficienten $f_0, f_1, \ldots$ die rechten Seiten des unendlichen Systems dar; denn offenbar ist allgemein:

$$\frac{dz_m}{dx} = f_m(x, z_0, z_1, \ldots z_{\mu+m}).$$

Ich führe nun die Beschränkung ein, dass die Coefficienten von f (und somit auch von allen f_m) positiv sind, so wende ich die Methode an:

Ich setze für z_0: $C_{01}x + C_{02}x^2 + \cdots = \zeta_0$
z_1: $C_{11}x + C_{12}x^2 + \cdots = \zeta_1$
. . . .

d. h. für z: $\zeta_0 + \zeta_1 y + \zeta_2 \frac{y^2}{2!} + \cdots = \zeta$

für $\frac{\partial z}{\partial y}$: $\zeta_1 + \zeta_2 y + \cdots = \frac{\partial \zeta}{\partial y}$
. . . .

so bekomme ich für f eine Potenzreihe in x und y:

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) \cdot y + \cdots + \varphi_m(x) \cdot \frac{y^m}{m!} + \cdots$$

und es muss nun, wenn $\varphi_m(x) = A_0^{(m)} + A_1^{(m)}x + \cdots + A_\nu^{(m)}x^\nu + \cdots$ sein: $A_0^{(m)} \leqq C_{m1}$, $A_1^{(m)} \leqq 2C_{m2}, \cdots A_\nu^{(m)} \leqq \nu \cdot C_{m\nu}, \cdots$ ferner allgemein $\nu \cdot C_{m\nu} \leqq A^{(m)} \cdot R^\nu$; $A^{(m)}$ für jedes m eine bestimmte endliche Zahl, R für alle m dasselbe.

Fall 2. Auch hier werde die Methode an einem einfachen Beispiel gezeigt:

$$\frac{\partial^{\mu+1} z}{\partial x \partial y^\mu} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \cdots \frac{\partial^\mu z}{\partial x \partial y^{\mu-1}}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots \frac{\partial^\nu z}{\partial y^\nu}\right);$$

ausser $(z)_{x=0}$ als Function von y müssen auch $z_0, z_1, \ldots z_{\mu-1}$ (Functionen von x) gegeben sein. Ich denke mir wieder anstatt $z : z - (z)_{x=0}$ als die gesuchte Function und schreibe hierfür z, so sind $z_0, z_1, \ldots$ sämmtlich im Punkte $x = 0$ Null. Setze ich nun:

$$z = z_0 + z_1 y + \cdots + z_{\mu-1} \cdot \frac{y^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + z_\mu \cdot \frac{y^\mu}{\mu!} + z_{\mu+1} \cdot \frac{y^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \cdots$$

$$z' = z'_0 + z'_1 y + \cdots + z'_{\mu-1} \cdot \frac{y^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \frac{y^\mu}{\mu!} f_0 + \frac{y^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \cdot f_1 + \cdots$$

$$f_0 = f(x, 0, z_0, z'_0, \ldots z'_{\mu-1}, z_1, \ldots z_\nu)$$

$$f_1 = \left(\frac{df}{dy}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial z'_{\mu+1}}\right)_0 \cdot f_0 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\right)_0 \cdot z_{\nu+1}$$

$$f_2 = \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right)_0 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

. . . .

Dies in f eingesetzt, ergiebt eine Potenzreihe in y ($z_0, z'_0, z_1, \ldots$ hängen nur von x ab):

$$f_0(x, z_0, z'_0, \ldots z'_{\mu-1}, z_1 \ldots z_\nu) + y \cdot f_1(x, z_0, z'_0, \ldots z'_{\mu-1}, z_1, \ldots z_{\nu+1}) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{y^m}{m!} \cdot f_m(x, z_0, z'_0, \ldots z'_{\mu-1}, z_1, \ldots z_{\nu+m}) + \cdots$$

Das unendliche System lautet:

$$\frac{dz_\mu}{dx} = f_0, \frac{dz_{\mu+0}}{dx} = f_1, \ldots$$

(ist vollständig, da $z_0, z_1, \ldots z_{\mu-1}$ bekannt sind). Von hier an ist der Weg der Untersuchung derselbe, wie im Falle 1.

16. Haben wir nun die S. 165 gestellte Frage 1. entschieden, so müssen wir noch 2. untersuchen, ob nämlich $z_0 + z_1 \cdot y + z_2 \dfrac{y^2}{2!} + \ldots$ in x und y einen Sinn hat. Aber diese Frage ist, im Falle alle Coefficienten positiv sind, ohne Weiteres erledigt. Hat nämlich obige Reihe in dem Bereiche $|y| \leqq \varrho$ einen Sinn, so muss sich die Function auch um $y_0 < \varrho$ ($y_0 > 0$) entwickeln lassen: $\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1(y - y_0) + \mathfrak{z}_2 \dfrac{(y-y_0)^2}{2!} + \cdots$ wo $\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \cdots$ wieder Potenzreihen in x mit lauter positiven Coefficienten sind, die Integrale eines unendlichen Systems, welches mit der partiellen Differentialgleichung im Punkte $y = y_0$ zusammenfällt und wiederum lauter positive Coefficienten hat.

Dieses System muss sich also ebenfalls mit Hilfe von Potenzreihen integriren lassen. Aber umgekehrt, ist dies der Fall, so hat auch die Entwickelung um $y = 0$ einen Sinn.

Ich betrachte nämlich y_0 als unbestimmten Parameter, so sind die Coefficienten des unendlichen Systems für $y = y_0$ Potenzreihen in y_0 und zwar mit lauter positiven Gliedern. Offenbar erhalte ich nun beim Integriren:

$$\mathfrak{z}_0 = f_0(y_0) + x \cdot f_1(y_0) + x^2 \cdot \frac{f_2(y_0)}{2!} + \cdots$$

$f_0, f_1, \ldots$ sind wiederum Potenzreihen in y_0 mit lauter positiven Gliedern. Hat diese Reihe $\mathfrak{z}_0$ für einen bestimmten positiven Werth y_0 einen Sinn, so hat sie es gewiss auch für jedes kleinere y_0. Beachtet man nun, dass $\mathfrak{z}_0 = (z)_{y_0}$, so folgt, dass die Reihe mit zwei Variabeln, x und y:

$$z = z_0 + z_1 \cdot y + \cdots$$

mit lauter positiven Coefficienten für alle positiven Werthe $y < y_0$ einen Sinn hat, d. h. die Reihe hat einen von Null verschiedenen Convergenzbereich.

Anmerkung. Hieraus erhellt, dass Gleichungen, wie die S. 167 angeführte, stets Integrale haben. Denn das entsprechende unendliche System zerfällt für jedes y in eine Reihe endlicher Systeme, also giebt es für jedes y Potenzreihen als Integrale. Damit ist auch die zweite Frage bejahend beantwortet.

17. Ich werde nun also nicht die unendlichen Systeme im Punkte $y = 0$, sondern in $y = y_0$, $y_0 > 0$ untersuchen, so bekomme ich sofort die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen für die Existenz einer Potenzreihe $z(x, y)$. Der Einfachheit halber schreibe ich wieder für $y - y_0 : y$. Es ist wichtig, zu bemerken, dass, sobald eine Potenz y^m in einem Coefficienten vorkommt, auch alle niedrigeren sich finden müssen. Man erkennt dies, indem man y^m um den positiven Werth $y = y_0$ entwickelt. Da wir es hier fortwährend nur mit positiven Grössen zu thun haben, kann sich nichts fortheben.

18. Als Anwendung dieser Methode werde ich nun die Bedingungen untersuchen, unter denen die Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

ein Integral hat. Um aber die Art und Weise, wie man die Methode zu benutzen hat, klar zu machen, nehme ich zunächst den einfacheren Fall

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y) + f_0(x, y) \cdot z + f_1(x, y) \frac{\partial z}{\partial y}.$$

(Hier existirt bekanntlich immer ein Integral; vergl. Frau S. v. Kowalewsky, zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Crelles Journal Bd. 80, 1875, p. 1 ff., besonders auch p. 22 ff.).

(Schluss folgt.)

XII.

Erweiterung der „Guldin'schen Regel".

Von

P. B. Richter

in Quedlinburg

Den Rauminhalt eines Rotationskörpers erhält man nach der Guldin'schen Regel, wenn man den Inhalt der erzeugenden Fläche mit der Kreislinie multiplicirt, welche der Schwerpunkt, bei einmaliger Umdrehung der Fläche um eine Achse, in ihrer Ebene beschreibt.

Ich werde nun zeigen, dass sich zu jedem dieser Rotationskörper unzählig viele andere angeben lassen, welche durch Bewegungen derselben Fläche um dieselbe Achse durch weniger einfache, nämlich durch schraubenförmige Bewegungen entstehen und doch denselben Rauminhalt wie jener einfache Körper haben.

A) Denken wir uns den Raum des letzteren Körpers nach und nach durch Rotation der erzeugenden Fläche um denselben unendlich kleinen Winkel $\delta\alpha$ erzeugt, so werden alle diese Raumelemente gleich sein, also wenn $n.\delta\alpha = 360^0$ ist und V das Volumen des Ringes, so wird jedes Element $= \frac{1}{n} V$ sein. Denken wir uns jetzt die Flächentheile auf irgend eine Art so verschoben, dass der Schwerpunkt der Fläche derselbe bleibt und Flächentheile nicht über einander gerathen, und lassen wir sie dann wieder um 360^0 rotiren, so wird dieser Rotationskörper genau so gross sein, wie der vorige, auch hier wird also ein jeder einem $\delta\alpha$ entsprechender Körper genau $= \frac{1}{n} V$ sein. Wir erhalten drittens einen dem ersten Körper gleich grossen, wenn wir von der Fläche in ihrer ursprünglichen Lage zunächst ein Raumelement erzeugen lassen, dann ihre Flächentheile ein wenig verschieben, ohne dabei den Schwerpunkt zu ändern, hiernach wieder ein Raumelement erzeugen lassen und so fortfahren bis zum letzten $\delta\alpha$. Je kleiner wir nun das letztere nehmen, um so weniger wird sich dann dieser Raum von einem vierten unterscheiden, bei welchem Rotation

und Verschiebung gleichzeitig erfolgen. Unter Rotation wollen wir hier immer eine solche der Achse verstehen, unter Drehung aber die der erzeugenden Fläche oder Flächenelemente in ihrer Ebene.

Im einfachsten Falle darf sich also die erzeugende Fläche um ihren Schwerpunkt drehen und so Ringe mit schraubenförmigem Gewinde erzeugen, oder es dürfen sich die Theile einer zusammengesetzten Fläche um ihre Schwerpunkte und ausserdem um den gemeinsamen Schwerpunkt drehen, sich pendelnd ihm nähern oder sich von ihm entfernen, zwei gleiche Theile sich in krummliniger Bahn mit ihren Schwerpunkten auf den Endpunkten des Durchmessers einer beliebigen Mittelpunktscurve (und dem gemeinsamen Schwerpunkt als Mittelpunkt) bewegen u. s. w. — Auch jede Gruppe von isolirten Theilflächen darf daneben dieselben oder andere willkürliche Verschiebungen (in ihrer rotirenden Ebene) in Bezug auf ihren Theilschwerpunkt vornehmen, ohne dass der Rauminhalt des erzeugten Körpers aufhört dem einfachen Rotationskörper gleich zu sein. Uebrigens dürfen z. B. zwei die erzeugende Fläche bildende gleiche Flächen sich nicht etwa beliebig weit in jeder Richtung von ihrem Schwerpunkte entfernen, beide müssen vielmehr bei ihrer Bewegung, z. B. bei einer Drehung, stets auf derselben Seite der Achse bleiben.

B) Der Schwerpunkt war bisher in seiner Lage in der Ebene unveränderlich, aber auch er darf Bewegungen mit beliebig veränderlicher Beschleunigung vornehmen, ohne dass der erzeugte Raum aufhört, dem des einfachen Rotationskörpers gleich zu sein. Der Beweis ist ganz so wie vorhin.

Lässt man z. B. ein unendlich schmales Rechteck, dessen eine endliche Seite der Achse parallel ist, durch Rotation um 360^0 ein Raumelement nach dem anderen erzeugen, so dass ein jedes der Elemente durch $\frac{1}{n}$ der vollen Rotation erzeugt wird, so wird man zunächst einen gleich grossen Körper erhalten, wenn das erste Raumelement, wie soeben erzeugt wird, das folgende aber, nachdem zuvor das Rechteck ein wenig der Achse parallel verschoben wurde (es bleibt dabei dem vorigen zweiten durchaus congruent) und so bis zum n^{ten} Elemente fortfährt. Man erhält so schliesslich einen Körper, der genau so gross ist, wie der erste und sich von einem, bei welchem die unendlich kleinen Rotationen und Verschiebungen gleichzeitig erfolgen, um beliebig wenig unterscheidet. Da sich jede Fläche in solche Rechtecke zerlegen lässt, so gilt das Gesagte allgemein.

Berührt z. B. ein Rechteck (oder ein Dreieck) bei seiner Rotation mit einer seiner Seiten beständig einen Kreiscylinder, so giebt der Inhalt der von ihm erzeugten Spirale vermehrt um den des zugehörigen Cylinders den Inhalt einer Schraube, vorausgesetzt, dass bei constanter Rotationsgeschwindigkeit nach jeder vollen Umdrehung sich das Rechteck parallel der Achse um sich selbst mit constanter Geschwindigkeit verschoben hat.

Ebenso macht sich der Beweis, wenn zu dieser Verschiebung des Schwerpunktes die in A erwähnten Verschiebungen der Flächenelemente gegen einander hinzutreten. Dies ist z. B. der Fall, wenn sich auf der rotirenden Ebene eine Fläche irgendwie bewegt und zugleich mit ihr als zweite ihre Spiegelbildfläche, vorausgesetzt, dass der Spiegel parallel der Achse senkrecht auf der rotirenden Ebene steht und der Fläche bei ihrer Bewegung höchstens bis zur Berührung nahe kommt. Da der Schwerpunkt dieses Flächenpaares eine unveränderliche Entfernung von der Achse hat, so ist die Summe der von beiden Flächen erzeugten Körper einem leicht angebbaren Rotationskörper gleich, aber freilich wird auch nur die Summe gefunden.

Die Verschiebungen nach B allein liefern uns im einfachsten Falle eine die Achse umgebende Spirale, oder wellige Ringe, bei denen die Wellenlinie eines einzelnen erzeugenden Punktes auf einer Cylinderfläche liegt. Auch nach A konnten wir solche Körper erhalten, wenn sich Flächentheile gegen einander parallel der Achse verschieben. So erhielten wir aber immer zugleich zwei oder mehrere, und als Inhalt wurde deshalb immer nur ihr Gesammtinhalt gefunden, so dass also durch B bereits eine wesentliche Erweiterung gegen A erreicht ist.

C) Jetzt wollen wir solche Körper berechnen, welche dadurch entstehen, dass sich der Schwerpunkt der erzeugenden Flächen in beliebiger Richtung in der rotirenden Ebene bewegt. Dazu behandeln wir zunächst die folgende Aufgabe.

Eine Ebene rotire um eine Achse, ohne zu gleiten. Auf einer ihrer beiden Seiten bewege sich gleichzeitig eine beliebige Fläche so, dass ihr Schwerpunkt s_1 auf einer zur Achse senkrechten Geraden hin- und herpendelt. Der erzeugte Raum soll auf einen Rotationskörper zurückgeführt werden.

Da offenbar derselbe Körper entsteht, wenn Rotations- und Pendelgeschwindigkeit beide um das n-fache wachsen, so können und wollen wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, hier und auch in Zukunft annehmen, die Rotation erfolge mit constanter Winkelgeschwindigkeit. Das ganze Veränderliche fällt dann auf die Pendelschwingung.

Zwar ist bei Bewegungen der erzeugenden Fläche parallel der Achse der Rauminhalt des so entstandenen Körpers dem einfachen Rotationskörper gleich. Wollten wir aber hier die Fläche sich das eine Mal nur nach der Achse hin bewegen lassen, das andere Mal sich von ihr entfernen lassen, so würde der erste Raum offenbar kleiner als der zweite und keiner im Allgemeinen einem leicht angebbaren Rotationskörper gleich sein. Dagegen kann man bei Pendelschwingungen der erzeugenden Fläche in unzählig vielen Fällen den raumgleichen Rotationskörper angeben.

Wir lassen nicht nur die gegebene Fläche mit dem Schwerpunkte s_1, sondern zugleich noch eine congruente oder gleiche mit dem Schwer-

punkte s_2 pendelnde einander jederzeit entgegengesetzt gleiche Bewegungen machen. Daraus folgt dann, dass sich erstens die Schwerpunkte beider in derselben zur Achse senkrechten Geraden bewegen, zweitens aber, dass der Schwerpunkt s des Flächenpaares seine Lage in der Ebene nicht ändert. Also lässt sich der Flächeninhalt des von dem Flächenpaare erzeugten Körpers nach A auf einen Rotationskörper zurückführen, der durch eine Fläche gleich der des Flächenpaares mit dem Schwerpunkte s erzeugt wird.

Wenn wir also die Bewegung so einrichten, dass ausserdem beide Flächen gleiche Räume erzeugen, so ist der Rauminhalt des gesuchten die Hälfte des eben besprochenen Rotationskörpers. Während aber bei den Bewegungen A das Decken einzelner Flächentheile zu vermeiden war, weil man eigentlich nicht Räume, sondern Massen mit zum Theil mehrfacher Dichte erhielt, und doch einander durchdringende Räume in Aufgaben sonst immer als einfache gerechnet werden sollen, so stört hier das Decken der beiden Flächen durchaus nicht, denn das doppelte Anrechnen doppelt durchstrichener Räume ist hier gerade das Erwünschte.

Sollen nun die beiden Flächen bei ihren Schwingungen nach und von s gleiche Räume erzeugen, so darf s_1 nicht beständig zwischen s und der Achse, s_2 aber auf der anderen Seite von s hin- und herpendeln, sonst würde s_1 einen kleinen und s_2 einen grossen Körper erzeugen.

Macht jetzt die eine Fläche zwischen s und der Achse eine Elementarbewegung, so wird die andere zur Wahrung des Schwerpunktes s eine entgegengesetzt gleiche auf der anderen Seite von s machen, also rotirend einen grösseren Raum erzeugen als die erstere. Sollen nun beide Körper schliesslich doch gleiche Gesammträume schaffen, so muss später die zweite Fläche mit s_2 in derselben Entfernung von der Achse dieselbe Bewegung machen, die vorhin die erste mit s_1 machte, und dann wird ganz von selbst die erste gleichzeitig einen Raum erzeugen wie vorhin die zweite.

Dies zeigt, wie sich die einzelne Fläche bewegen darf, wenn wir im Stande sein sollen, den von ihr erzeugten Körper auf einen Rotationskörper zurückzuführen. Denken wir uns durch den Schwerpunkt s des früheren Flächenpaares, den jetzigen Schwingungsmittelpunkt, eine Parallele zur Achse gezogen, so muss s_1 in Punkten, welche zur Parallelen symmetrisch liegen, entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten haben. Sollte s_1 denselben Punkt auf der einen Seite der Parallelen wiederholt treffen, so muss das auch beim symmetrisch gelegenen der Fall sein. Es muss dann die Summe der Geschwindigkeiten in dem einen der Summe der Geschwindigkeiten in dem anderen Punkte entgegengesetzt gleich sein (so dass also im letzteren Falle die Willkür eine grössere ist).

Erfolgt die Schwingung nicht senkrecht zur Achse, sondern in einer unter einem anderen Winkel geneigten Geraden, so wird doch die Projection der Bewegung in der Ebene auf eine in dieser durch den Schwingungsmittelpunkt senkrecht zur Achse gelegten Geraden, wieder eine Bewegung

der erwünschten Art ergeben. Zerlegen wir also die ursprüngliche Bewegung in eine zur Achse parallele und eine zu derselben senkrechte, so darf man die erstere nach B vernachlässigen, die letztere aber führt genau zu demselben Rotationskörper wie die erstere. Neues hat also dieser Fall eigentlich nicht hinzugebracht; er erinnert nur daran, dass man aus zwei Bewegungen parallel und senkrecht zur Achse unendlich viele andere erhalten kann, z. B. Bewegungen in Kreisen, Ellipsen und unzähligen anderen Curven, zu denen derselbe einfache Rotationskörper gehört.

Rotirt also eine Ebene um eine Achse mit constanter Geschwindigkeit um $n^0 \leqq 360^0$ und macht gleichzeitig in ihr eine Fläche F mit dem Schwerpunkte s_1 eine ganze Anzahl krummliniger oder geradliniger (Doppel-)Schwingungen um einen Schwingungsmittelpunkt s, der von der Achse die Entfernung a hat, sind ferner in Punkten einer zur Achse parallelen Geraden für den Schwerpunkt s_1 die Summen der Geschwindigkeiten senkrecht zur Achse genommen gleich denen auf einer anderen Geraden, welche zu jener in Bezug auf s symmetrisch liegt, und gilt das für alle solche Paare von Geraden, so ist der Rauminhalt dieses Körpers $= \frac{2a.\pi.F.n}{360}$. Ist $n^0 > 360^0$, so gilt das Entsprechende nur dann, wenn das Verhältniss der Rotations- und der Pendelgeschwindigkeit jederzeit ausserdem so beschaffen ist, dass die erzeugten Räume einander nicht durchdringen. Beides gilt ferner, solange das Verhältniss der Rotationsgeschwindigkeit und der Pendelgeschwindigkeit, letztere senkrecht zur Achse genommen, dasselbe bleibt.

Zu den einfachsten Körpern dieser Art würde z. B. derjenige gehören, bei welchem F ein Kreis mit dem Schwerpunkte s_1 ist, der sich um einen beliebigen Punkt s in der rotirenden Ebene mit constanter Geschwindigkeit dreht. (Ist dann a der Abstand des Punktes s von der Achse und r der Radius des Kreises, so wird die obige Formel solange gelten, als die Strecke ss_1 vermehrt um r kleiner als a ist.) Ein anderer einfacher Fall wäre der, wo sich der Schwerpunkt s_1 dem Schwingungsmittelpunkte s zunächst wiederholt in derselben Geraden nähert, dann erst ihn erreicht, um auf der anderen Seite die Schwingungen symmetrisch nachzuholen. Als letztes Beispiel diene Folgendes: Eine Ebene rotirt mit constanter Geschwindigkeit um eine Achse, in ihr bewegt sich eine Fläche und zwar mit ihrem Schwerpunkte auf einer beliebig gekrümmten Linie bis zu einem Punkte p, darnach auf dem Spiegelbilde seiner bisherigen Bahn, wenn man den Spiegel senkrecht zur Ebene und parallel zur Achse in p aufstellt, hierauf bewege er sich im Spiegelbilde dieser beiden Linien, welches man erhält, wenn man den Spiegel in den Anfangs- und den bisherigen Endpunkt der Bewegung senkrecht zur Achse und der rotirenden Ebene aufstellt. Ist dann a die Entfernung des Punktes p von der Ebene, so ist bei einer Rotation um n^0 der erzeugte Raum $V = \frac{2a\pi nF}{360}$. Aehnliches gilt, wenn der Spiegel im ersten Falle nicht parallel zur Achse aufgestellt wird.

C_2) Erfolgt die Rotation um die Achse nicht in Form von Pendelschwingungen, so kann man den entsprechenden (einfachen) Rotationskörper auch dann noch bestimmen, wenn s_1 sich der Achse mit constanter Geschwindigkeit nähert oder von ihr entfernt, die Rotation um die Achse aber wie bisher gleichfalls mit constanter Winkelgeschwindigkeit erfolgt. Der Schwerpunkt der Fläche, welche diesen (einfachen) Rotationskörper erzeugt, ist dann offenbar die Mitte der zurückgelegten Strecke, wie man durch Hinzufügen einer congruenten Hilfsfläche sofort einsieht. Dasselbe gilt, so lange das Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten dasselbe bleibt.

Das Resultat ist also Folgendes:

Ia) Hat man einen Körper allein durch Rotationen einer unveränderlichen ebenen Fläche um eine Achse in ihrer Ebene erzeugt, so erhält man bei Rotationen um 360° einen ebenso grossen Körper, wenn dabei:

A) die erzeugenden Flächentheile sich während der Rotation ohne sich zu decken beliebig so verschieben, dass der Schwerpunkt derselbe bleibt;

B) der Schwerpunkt der Fläche sich parallel der Achse mit beliebig veränderlicher Beschleunigung bewegt;

C_1) der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche sich bei constanter Winkelgeschwindigkeit in ganzen (Doppel-)Schwingungen mit beliebig veränderlicher Beschleunigung so um die Lage, die er bei Erzeugung des entsprechenden einfachen Rotationskörpers hat, bewegt, dass die Summe der Geschwindigkeitscomponenten, senkrecht zur Achse genommen, immer für zwei zu jener typischen Lage symmetrische Punkte entgegengesetzt gleich ist;

C_2) der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche senkrecht zur Achse einen gleich grossen Weg von seiner Lage im einfachen Körper nach beiden Seiten zurücklegt und zwar bei constantem Verhältniss seiner Geschwindigkeit zur Winkelgeschwindigkeit um die Achse;

D) die Bewegungen A, B, C_1, oder A, B, C_2 gleichzeitig eintreten.

Ib) Macht die erzeugende Fläche F im Abstande a ihres Schwerpunktes von der Achse die obigen Bewegungen schon nach einer Rotation um $n^0 < 360^0$, so ist der erzeugte Raum $\frac{2 a \pi F n}{360}$.

Für $n > 360^0$ gilt dasselbe, so lange die erzeugende Fläche oder einer ihrer Theile dieselbe Lage im Raume nicht mehr als einmal einnehmen.

Quedlinburg, den 16. August 1891.

XIII.

Ueber eine neue Methode zur Entwicklung der Theorie der Sigmafunctionen mehrerer Argumente.

Von

Eugen Jahnke
in Berlin.

Allgemeine Untersuchungen über Thetafunctionen mehrerer Argumente haben die Herren Weierstrass (in seinen Vorlesungen) und F. Caspary* zu Relationen zwischen diesen Functionen und den Coefficienten einer orthogonalen Substitution geführt. Insbesondere kann man, wie Herr Caspary gefunden hat,** aus den Thetafunctionen einer beliebigen Anzahl von Argumenten Ausdrücke bilden, die den neun Coefficienten a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ einer orthogonalen Substitution mit der Determinante $+1$ und den sechs Differentialgrössen

$$p_h = -(a_{1k}\,d\,a_{1l} + a_{2k}\,d\,a_{2l} + a_{3k}\,d\,a_{3l})$$
$$v_h = a_{k1}\,d\,a_{l1} \quad + a_{k2}\,d\,a_{l2} + a_{k3}\,d\,a_{l3},$$

wo h, k, l die Zahlen 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 bezeichnen, genau gleich sind; dabei bleiben die Argumente, welche in die Theta-Ausdrücke eingehen, vollkommen beliebig. In dem Falle, wo die Anzahl der Argumente gleich 1 oder 2 ist, nehmen diese Beziehungen eine ausserordentlich einfache Gestalt an. Der Weg, auf dem Herr Caspary das in Rede stehende Theorem für die

---

* Crelle's J. B. 94; Comptes Rendus 1887; Mathematische Annalen B. 28.

** Sur une manière d'exprimer, au moyen des fonctions thêta d'un seul argument, les coefficients de trois systèmes orthogonaux dont un est composé des deux autres. C. R. 1888.

Sur une nouvelle méthode d'exposition de la théorie des fonctions thêta, et sur un théorème élémentaire relatif aux fonctions hyperelliptiques de première espèce. C. R. 1890.

Sur une méthode élémentaire pour établir les équations différentielles dont les fonctions thêta forment les intégrales. C. R. 1891.

Thetafunctionen einer Variablen herleitet,* ist kurz der folgende. Es lassen sich die 15 Grössen a_{mn}, p_h, v_h, die Herr Caspary Elemente eines Orthogonalsystems nennt, mit Hilfe von vier beliebigen Grössen identisch ausdrücken. Wählt man nun für diese vier Grössen aus den Thetafunctionen passend zusammengesetzte Ausdrücke, so gewinnt man vermittelst der Formeln für die Transformation zweiten Grades das Theorem, welches die Elemente eines Orthogonalsystems mit den Thetafunctionen einer Variablen verknüpft. In bekannter Weise ergiebt sich hieraus das entsprechende Theorem für die Sigmafunctionen. Da sich nun die Formeln für die Transformation zweiten Grades auf ganz elementarem Wege ergeben,** so lässt sich auf die genannten Theoreme eine elementare Theorie der Theta- und Sigmafunctionen eines Argumentes und folglich auch der elliptischen Functionen aufbauen, welche nur die Definition der vier Jacobi'schen Thetafunctionen und die Kenntniss einer Reihe einfacher Identitäten zwischen den Elementen a_{mn}, p_h, v_h zur Grundlage hat.*** Vermittelst der Caspary-schen Relationen lassen sich auf diesem Wege die elliptischen Transscendenten mit derselben Leichtigkeit behandeln, wie die Kreisfunctionen.

Will man, von dem Caspary'schen Theorem ausgehend, die Theorie der elliptischen Functionen, wie sie von Herrn Weierstrass gegeben worden ist, entwickeln, so führt der eben gekennzeichnete Weg über die Thetafunctionen. Indessen lassen sich die in Rede stehenden Relationen auch herleiten, wenn statt dessen die Definition der Sigmafunctionen als bekannt vorausgesetzt wird, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Wie oben erwähnt, kann man die fünfzehn Elemente eines Orthogonalsystems, wo die Determinante der neun Grössen a_{mn} gleich $+1$ ist, identisch vermittelst vier Grössen a_1, a_2, a_3, a_4, wie folgt,*** darstellen:

$$\Delta = a_1 a_4 - a_2 a_3, \quad i = \sqrt{-1};$$

$$1) \quad \begin{cases} \Delta(a_{11} + i a_{21}) = a_1^2 + a_2^2, \\ \Delta(a_{12} + i a_{22}) = -i(a_1^2 - a_2^2), \\ \Delta(a_{13} + i a_{23}) = -2 i a_1 a_2; \\ \Delta(a_{11} - i a_{21}) = a_3^2 + a_4^2, \\ \Delta(a_{12} - i a_{22}) = -i(a_3^2 - a_4^2), \\ \Delta(a_{13} - i a_{23}) = -2 i a_3 a_4; \\ \Delta a_{31} = -i(a_1 a_3 + a_2 a_4), \\ \Delta a_{32} = -(a_1 a_3 - a_2 a_4), \\ \Delta a_{33} = -(a_1 a_4 + a_2 a_3); \end{cases}$$

* Bulletin des Sciences Mathématiques, B. 13, 1889, Liouville's J. B. 6, 1890.

** Bulletin d. S. M., B. 13, S. 3, 4. Dieselbe Herleitung findet sich in der von Herrn F. Müller besorgten Ausgabe zu Enneper, Elliptische Functionen.

*** Liouville's J. B. 6, S. 370 flg.

$$
1') \quad \begin{cases}
\Delta(p_1 + ip_2) = 2(a_1 da_3 - a_3 da_1), \\
\Delta(v_1 + iv_2) = -2(a_1 da_2 - a_2 da_1), \\
\Delta(p_3 + v_3) = -2i(a_2 da_3 - a_3 da_2), \\
\Delta(p_1 - ip_2) = 2(a_2 da_4 - a_4 da_2), \\
\Delta(v_1 - iv_2) = -2(a_3 da_4 - a_4 da_3), \\
\Delta(p_3 - v_3) = -2i(a_1 da_4 - a_4 da_1).
\end{cases}
$$

Um diese Identitäten in Relationen für die Sigmafunctionen eines Argumentes umzuwandeln, benutze ich allein das Weierstrass'sche Fundamentaltheorem* (die sogenannte dreigliedrige Sigmaformel), welches sich bekanntlich** auf algebraischem Wege, ebenso wie seine Verallgemeinerung für die Sigmafunctionen mehrerer Argumente mit Benutzung der Formeln für die Transformation zweiten Grades herleiten lässt. In der That hat Kronecker merkwürdige lineare Relationen aufgedeckt, welche für die Subdeterminanten symmetrischer Systeme gelten. Man braucht nur für die darin auftretenden Determinanten gewisse Verbindungen von Sigmafunctionen zu substituiren, um das Weierstrass'sche Fundamentaltheorem für die Sigmafunctionen mehrerer Argumente zu finden. Um die Anwendung der Gleichungen zu umgehen, welche bei der Transformation zweiten Grades auftreten, schlagen wir zur Herleitung des in Rede stehenden Theorems für die Sigmafunctionen eines Argumentes folgenden Weg ein. Bezeichnen u, u_1, u_2, u_3 vier beliebige Grössen, so besteht die identische Gleichung

$$(pu - pu_1)(pu_2 - pu_3) + (pu - pu_2)(pu_3 - pu_1) + (pu - pu_3)(pu_1 - pu_2) = 0.$$

Es werde nun pu als die möglichst einfache unter allen doppeltperiodischen Functionen durch die Gleichung

$$pu - pu_1 = -\frac{\sigma(u + u_1)\,\sigma(u - u_1)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 u_1}$$

definirt, dann ergiebt sich aus der obigen Identität durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung das Weierstrass'sche Fundamentaltheorem.

Aus letzterem lassen sich folgende bekannte Formeln herleiten:

$$2) \quad \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \sigma_\mu(u+v)\,\sigma_\nu(u-v) = \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \sigma_\mu u\, \sigma_\mu v\, \sigma_\nu u\, \sigma_\nu v + \varepsilon_\lambda \sigma_\lambda u\, \sigma_\lambda v\, \sigma u\, \sigma v,$$

$$3) \quad \varepsilon_\lambda^2 \sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) + \varepsilon_\mu^2 \sigma_\mu^2 u\, \sigma_\mu^2 v + \varepsilon_\nu^2 \sigma_\nu^2 u\, \sigma_\nu^2 v = 0,$$

$$4) \quad \varepsilon_\lambda^2 \sigma\,(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) - \varepsilon_\lambda^2 \sigma_\lambda^2 u\, \sigma_\lambda^2 v - \sigma^2 u\, \sigma^2 v = 0,$$

$$3^*) \quad \varepsilon_\lambda^2 \sigma_\lambda^2(u \pm v) + \varepsilon_\mu^2 \sigma_\mu^2(u \pm v) + \varepsilon_\nu^2 \sigma_\nu^2(u \pm v) = 0,$$

---

* Vergl. Weierstrass-Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, S. 47; Halphen, Traité des fonctions elliptiques I; Enneper, Elliptische Functionen, 2. Aufl. von F. Müller, S. 100.

** Caspary, Ableitung des Weierstrass'schen Fundamentaltheorems für die Sigmafunctionen mehrerer Argumente aus den Kronecker'schen Relationen für Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Crelle's J. B. 96. Vergl. auch Caspary, Zur Theorie der Thetafunctionen mehrerer Argumente, Crelle's J. B. 96; sowie Caspary, Ueber die Verwendung algebraischer Identitäten zur Aufstellung von Relationen für Thetafunctionen einer Variabeln, Mathematische Annalen B. 28.

wo sich die von Herrn Caspary eingeführten* Grössen ε aus der Gleichung

$$\frac{\varepsilon_\lambda}{\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu} = -(e_\mu - e_\nu)$$

bestimmen als

$$5)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{e_1 - e_2}}, \\ \varepsilon_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_2 - e_3}}, \\ \varepsilon_3 = \dfrac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{e_3 - e_1}} \end{cases}$$

bei positivem Vorzeichen der Quadratwurzel, und wo λ, μ, ν eine gerade Permutation der Zahlen 1, 2, 3 bezeichnen. Formel 3*), ein Specialfall von 3), wo entweder die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, werde in die Form gebracht

$$6)\quad [\varepsilon_\lambda \sigma_\lambda(u \pm v) + i\varepsilon_\mu \sigma_\mu(u \pm v)][\varepsilon_\lambda \sigma_\lambda(u \pm v) - i\varepsilon_\mu \sigma_\mu(u \pm v)] = -\varepsilon_\nu^2 \sigma_\nu^2(u \pm v),$$

welche dazu führt, die obigen Grössen a_1, a_2, a_3, a_4, oder statt dieser passender die Grössen α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22}, welche sich von jenen nur durch ein erst später zu bestimmendes Vorzeichen unterscheiden sollen, in folgender Weise zu wählen:

$$7)\quad \begin{cases} 2\alpha_{11}^2 = -G[\varepsilon_\lambda \sigma_\lambda(u+v) + i\varepsilon_\mu \sigma_\mu(u+v)], \\ 2\alpha_{12}^2 = -G[\varepsilon_\lambda \sigma_\lambda(u+v) - i\varepsilon_\mu \sigma_\mu(u+v)], \\ 2\alpha_{21}^2 = -G^{-1}[\varepsilon_\lambda \sigma_\lambda(u-v) + i\varepsilon_\mu \sigma_\mu(u-v)], \\ 2\alpha_{22}^2 = -G^{-1}[\varepsilon_\lambda \sigma_\lambda(u-v) - i\varepsilon_\mu \sigma_\mu(u-v)], \end{cases}$$

wo G eine beliebige Function bezeichnet. Dabei ist bezüglich des Vorzeichens die Festsetzung erlaubt, dass α_{11}, α_{12} bezw. in α_{21}, α_{22} und α_{11}, α_{22} bezw. in α_{21}, α_{12} durch Verwandlung von v in $-v$ und α_{11}, α_{21} bezw. in α_{12}, α_{22} durch Verwandlung von i in $-i$ (abgesehen von dem Factor $G^{\pm 1}$) übergehen sollen. Hieraus folgt zunächst

$$A_1)\quad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = -G\varepsilon_\lambda \sigma_\lambda(u+v), & \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = -G^{-1}\varepsilon_\lambda \sigma_\lambda(u-v), \\ \alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2 = -iG\varepsilon_\mu \sigma_\mu(u+v), & \alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2 = -iG^{-1}\varepsilon_\mu \sigma_\mu(u-v) \end{cases}$$

und durch Einführung in Formel 6)

$$4\alpha_{11}^2\alpha_{12}^2 = -G^2\varepsilon_\nu^2\sigma_\nu^2(u+v), \quad 4\alpha_{21}^2\alpha_{22}^2 = -G^{-2}\varepsilon_\nu^2\sigma_\nu^2(u-v),$$

woraus

$$A_2)\quad 2\alpha_{11}\alpha_{12} = -iG\varepsilon_\nu\sigma_\nu(u+v), \quad 2\alpha_{21}\alpha_{22} = -iG^{-1}\varepsilon_\nu\sigma_\nu(u-v).$$

Die beiden letzteren Relationen liefern

$$8)\quad \varepsilon_\nu^2\sigma_\nu(u+v)\sigma_\nu(u-v) = -4\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22},$$

und Formel 2) zufolge

$$9)\quad \begin{cases} 2\alpha_{11}\alpha_{21} = -\varepsilon_\lambda\sigma_\lambda u\,\sigma_\lambda v - i\varepsilon_\mu\sigma_\mu u\,\sigma_\mu v, \\ 2\alpha_{12}\alpha_{22} = -\varepsilon_\lambda\sigma_\lambda u\,\sigma_\lambda v + i\varepsilon_\mu\sigma_\mu u\,\sigma_\mu v, \end{cases}$$

woraus

---

* Liouville's J. B. 6, S. 396.

$A_3)\quad \alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}=-\varepsilon_\lambda\sigma_\lambda u\,\sigma_\lambda v,\quad \alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{12}\alpha_{22}=-i\,\varepsilon_\mu\sigma_\mu u\,\sigma_\mu v,$

und Formel 4) zufolge

$$10)\quad \begin{cases} 2\,\alpha_{11}\alpha_{22}=\sigma u\,\sigma v-i\,\varepsilon_\nu\sigma_\nu u\,\sigma_\nu v,\\ 2\,\alpha_{12}\alpha_{21}=-\sigma u\,\sigma v-i\,\varepsilon_\nu\sigma_\nu u\,\sigma_\nu v,\end{cases}$$

woraus

$A_4)\quad \alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{12}\alpha_{21}=-i\,\varepsilon_\nu\sigma_\nu u\,\sigma_\nu v,\quad \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}=\sigma u\,\sigma v.$

Durch Combination der in 7) einerseits, in 9) und 10) andererseits aufgestellten Ausdrücke für α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} erhält man beiläufig folgendes Identitätensystem

$$B)\quad \begin{cases} [\varepsilon_\lambda\sigma_\lambda(u+v)\pm i\,\varepsilon_\mu\sigma_\mu(u+v)]\,[\varepsilon_\lambda\sigma_\lambda(u-v)\pm i\,\varepsilon_\mu\sigma_\mu(u-v)]\\ \qquad\qquad =(\varepsilon_\lambda\sigma_\lambda u\,\sigma_\lambda v\pm i\,\varepsilon_\mu\sigma_\mu u\,\sigma_\mu v)^2,\\ [\varepsilon_\lambda\sigma_\lambda(u+v)\pm i\,\varepsilon_\mu\sigma_\mu(u+v)]\,[\varepsilon_\lambda\sigma_\lambda(u-v)\mp i\,\varepsilon_\mu\sigma_\mu(u-v)]\\ \qquad\qquad =(\sigma u\,\sigma v\mp i\,\varepsilon_\nu\sigma_\nu u\,\sigma_\nu v)^2,\end{cases}$$

wo entweder die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind.

Jetzt differentiire man die beiden ersten Gleichungen des Systems 7), so giebt beispielsweise die erste

$$-4\,\alpha_{11}\,d\alpha_{11}=dG\,[\varepsilon_\lambda\sigma_\lambda(u+v)+i\,\varepsilon_\mu\sigma_\mu(u+v)]$$
$$+G\,[\varepsilon_\lambda\sigma_\lambda'(u+v)+i\,\varepsilon_\mu\sigma_\mu'(u+v)]\,(du+dv).$$

Diese Gleichungen erweitere man der Reihe nach mit $\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$, $\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}$ und subtrahire die erste von der zweiten, dann verschwindet der Coefficient von dG, und es bleibt

$$-2\,(\alpha_{11}\,d\alpha_{12}-\alpha_{12}\,d\alpha_{11})$$
$$=\frac{\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu}{\varepsilon_\nu}\,G\,\frac{\sigma_\mu(u+v)\,\sigma_\lambda'(u+v)-\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\mu'(u+v)}{\sigma_\nu(u+v)}\,(du+dv).$$

Um die rechte Seite noch weiter umzuformen, benutze ich zwei weitere, aus dem Additionstheorem für die Sigmafunction resultirende Formeln:*

$$11)\quad (e_\mu-e_\lambda)\,\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)=\sigma_\lambda^2u\,\sigma_\mu^2v-\sigma_\mu^2u\,\sigma_\lambda^2v,$$

$$12)\quad \sigma(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v)=\sigma u\,\sigma_\lambda u\,\sigma_\mu v\,\sigma_\nu v+\sigma_\mu u\,\sigma_\nu u\,\sigma v\,\sigma_\lambda v.$$

Die erstere ergiebt mittelst Differentiation und einer leichten Transformation

$$\tfrac{1}{2}\,(e_\mu-e_\lambda)\;\sigma 2u=\sigma_\lambda u\,\sigma_\mu^2u\,\sigma_\lambda'u-\sigma_\lambda^2u\,\sigma_\mu u\,\sigma_\mu'u,$$

die letztere

$$\sigma 2u=2\,\sigma u\,\sigma_\lambda u\,\sigma_\mu u\,\sigma_\nu u,$$

woraus die bekannte Relation* folgt

$$\frac{d}{du}\log\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma_\mu u}=\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu}\,\frac{\sigma_\nu u\,\sigma u}{\sigma_\lambda u\,\sigma_\mu u}.$$

Hiernach wird

$$(A_5)\quad \begin{cases}-2\,(\alpha_{11}\,d\alpha_{12}-\alpha_{12}\,d\alpha_{11})=G\,\sigma(u+v)\,(du+dv),\\ -2\,(\alpha_{21}\,d\alpha_{22}-\alpha_{22}\,d\alpha_{21})=G^{-1}\sigma(u-v)\,(du-dv).\end{cases}$$

---

* Vergl. Weierstrass-Schwarz, Formeln etc., S. 51, (2), (8); S. 29, (9).

Durch eine analog geführte Rechnung wird erhalten

$$(A_6)\begin{cases}\alpha_{11}\,d\alpha_{22}-\alpha_{22}\,d\alpha_{11}-\alpha_{12}\,d\alpha_{21}+\alpha_{21}\,d\alpha_{12}=-\sigma u\,\sigma v\,m_0,\\ \alpha_{11}\,d\alpha_{21}-\alpha_{21}\,d\alpha_{11}+\alpha_{12}\,d\alpha_{22}-\alpha_{22}\,d\alpha_{12}=\varepsilon_\lambda\,\sigma_\lambda u\sigma_\lambda v m_\lambda,\\ \alpha_{11}\,d\alpha_{21}-\alpha_{21}\,d\alpha_{11}-\alpha_{12}\,d\alpha_{22}+\alpha_{22}\,d\alpha_{12}=i\varepsilon_\mu\,\sigma_\mu u\sigma_\mu v\,m_\mu,\\ \alpha_{11}\,d\alpha_{22}-\alpha_{22}\,d\alpha_{11}+\alpha_{12}\,d\alpha_{21}-\alpha_{21}\,d\alpha_{12}=i\varepsilon_\nu\,\sigma_\nu u\sigma_\nu v m_\nu,\end{cases}$$

wo

$$m_k=\frac{\sigma_k' v}{\sigma_k v}\,du+\frac{\sigma_k' u}{\sigma_k u}\,dv+d\log G.$$

$$(k=0,\ \lambda,\ \mu,\ \nu;\quad \sigma_0=\sigma).$$

Setzt man jetzt noch mit Herrn Caspary* der Reihe nach die früher eingeführten Grössen a

$$\begin{array}{lllll}\text{I} & a_1=e'\alpha_{11}, & a_2=e''\alpha_{12}, & a_3=e''\alpha_{22}, & a_4=e'\alpha_{21},\\ \text{II} & a_1=e'\alpha_{11}, & a_2=e''\alpha_{12}, & a_3=e''\alpha_{21}, & a_4=e'\alpha_{22},\\ \text{III} & a_1=e'\alpha_{11}, & a_2=e''\alpha_{12}, & a_3=-e''\alpha_{21}, & a_4=e'\alpha_{22},\\ \text{IV} & a_1=e'\alpha_{11}, & a_2=e''\alpha_{12}, & a_3=-e''\alpha_{22}, & a_4=e'\alpha_{21},\end{array}$$

wo

$$e'=\pm 1,\quad e''=\pm 1,\quad e'e''=e,$$

so liefern die Identitäten 1) und 2) in Verbindung mit den Formeln A_1), ... A_6) folgende vier Systeme von Relationen zwischen den Sigmafunctionen und den Elementen eines Orthogonalsystems:

Sind u und v zwei beliebige Argumente, e die (positive oder negative) Einheit und G eine beliebige Function und bezeichnen λ, μ, ν eine gerade Permutation der Zahlen 1, 2, 3, so ist

$$a_{1h}\pm i\,a_{2h}=-e_h\,G^{\pm 1}\,\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_s}\,\frac{\sigma_k(u\pm v)}{\sigma_s u\,\sigma_s v},$$

$$(e_2=e_1,\quad e_3=ee_1),$$

$$a_{3h}=e_h'\,i\,\frac{\varepsilon_{s_h}}{\varepsilon_s}\,\frac{\sigma_{s_h} u\,\sigma_{s_h} v}{\sigma_s u\,\sigma_s v},$$

$$p_h=-i\,a_{3h}\,m_{s_h},$$

$$v_1\pm iv_2=\frac{e\bar{e}}{\varepsilon_s}\,G^{\pm 1}\,\frac{\sigma(u\pm v)}{\sigma_s u\,\sigma_s v}\,(du\pm dv),$$

$$v_3=-im_s,$$

wo für $h=1$, $k=\lambda$, für $h=2$, $k=\mu$, für $h=3$, $k=\nu$ zu setzen ist und die Einheiten e_1, e_1', e_2', e_3', $\bar{e}$ sowie die Indices s, s_h aus folgender Tabelle sich ergeben:

	e_1	e_1'	e_2'	e_3'	$\bar{e}_1''$	s	s_1	s_2	s_3
I.....	i	$-e$	$-e$	1	$\pm i$	μ	ν	0	λ
II.....	1	e	e	1	1	0	λ	μ	ν
III.....	i	e	$-e$	-1	$\pm i$	ν	μ	λ	0
IV.....	-1	$-e$	e	-1	-1	λ	0	ν	μ

Dabei ist $\varepsilon_0=1$ und

$$m_k=\frac{\sigma_k' v}{\sigma_k v}\,du+\frac{\sigma_k' u}{\sigma_k u}\,dv+d\log G$$

$$(k=0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ \sigma_0=\sigma).$$

* Liouville's J. B. 6, S. 373.

Das zweite dieser Systeme ist offenbar das einfachste; für $e=1$, $\lambda=2$, $\mu=3$, $\nu=1$ geht es in dasjenige über, welches Herr Caspary für die Sigmafunctionen aufstellt, nachdem die vier Systeme in den Thetafunctionen abgeleitet sind.*

Der zweite Band von Halphen's bedeutsamem Traité des fonctions elliptiques hebt mit Untersuchungen an, die äusserlich betrachtet, eine auffallende Aehnlichkeit mit denen von Herrn Caspary aufweisen. Halphen erkennt indessen nicht — und darin liegt der Fortschritt der Caspary'schen Untersuchungen — dass die Relationen zwischen den Sigmafunctionen und den Coefficienten des Orthogonalsystems Identitäten sind, der Traité führt sie als Bedingungsgleichungen ein. Ausserdem finden sich hier nicht die Differentialgrössen p_h und v_h,** deren Einführung aber von besonderer Wichtigkeit ist. Erst hierdurch wird es möglich, aus den oben hergeleiteten Relationen die Theorie der Sigmafunctionen in ihrer vollen Allgemeinheit und Anwendbarkeit abzuleiten, eine Theorie, die man wegen der Bedeutung der genannten Differentialausdrücke für die Kinematik eine kinematische Theorie der Sigmafunctionen nennen könnte.

Die Caspary'schen Formeln, welche den Zusammenhang zwischen den Elementen eines Orthogonalsystems und den Sigmafunctionen enthüllen, lassen sich mit Leichtigkeit in andere umsetzen, welche die Elemente eines Orthogonalsystems mit den elliptischen Functionen verknüpfen. Bekanntlich will Herr Weierstrass an die Stelle der Jacobi'schen Bezeichnungen die Sigmaquotienten gesetzt wissen, um den inneren Zusammenhang zwischen den drei elliptischen Functionen schon in der Bezeichnungsweise zum Ausdruck zu bringen. Wird***

$$\xi_{\lambda 0} u = \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}, \qquad \xi_{\mu\nu} u = \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}$$

gesetzt, so findet man leicht in dem Falle des Caspary'schen Systems* für $e=1$:

$$\xi_{h0}(u \pm v) = -\frac{1}{\varepsilon_h} \frac{a_{1h} \pm i a_{2h}}{v_1^u \pm i v_2^u},$$

$$\xi_{hk}(u \pm v) = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_h} \frac{a_{1h} \pm i a_{2h}}{a_{1k} \pm i a_{2k}},$$

$$\xi_{h0} u \, \xi_{h0} v = -\frac{i}{\varepsilon_h} a_{3h} \quad (h, k = 1, 2, 3),$$

wo $v_1^u \pm i v_2^u$ nach Herrn Caspary den Coefficienten von du in dem Ausdruck von $v_1 \pm i v_2$, der eine lineare Function von du und dv ist, bezeichnet.

Mit Hilfe einfacher algebraischer und Differential-Identitäten gewinnt man aus den Caspary'schen Relationen sämmtliche Eigenschaften der Sigmafunctionen und der elliptischen Functionen, insbesondere ergeben sich

* Liouville's J. B. 6, S. 376.

** Während die Grössen p_h schon von Herrn Darboux in seinen Leçons sur la théorie générale des surfaces benutzt worden sind, scheint Herr Caspary die Grössen v_h zuerst eingeführt zu haben.

*** Weierstrass-Schwarz, Formeln etc., S. 28.

verschiedene Formen des Additionstheorems der Weierstrass'schen p-Function, die zumeist wohl als neu zu betrachten sind.* Das von Herrn Caspary entdeckte Theorem ist, wie schon eingangs angedeutet wurde, einer Verallgemeinerung für die Sigmafunctionen einer beliebigen Anzahl von Argumenten fähig; insbesondere gilt für die 15 hyperelliptischen Functionen erster Gattung der merkwürdige Satz,** dass sie den 15 Elementen eines Orthogonalsystems proportional sind.

Auch für die von Herrn Hermite entdeckten doppeltperiodischen Functionen zweiter Gattung lässt sich ein einfacher Zusammenhang mit den Elementen eines Orthogonalsystems feststellen.*** In der That, man hat nur nöthig in dem Caspary'schen Theorem das Argument v gleich einer Constanten und

$$G = e^{-u\zeta v}, \quad \zeta v = \frac{\sigma' v}{\sigma v}$$

zu setzen, so gehen die Ausdrücke $v_1{}^u + iv_2{}^u$ und $a_{1h} + ia_{2h}$ in

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sigma(u+v)}{\sigma_s u \, \sigma_s v} \, e^{-u\zeta v}, \\ \varphi_h &= \frac{\sigma_k(u+v)}{\sigma_s u \, \sigma_s v} \, e^{-u\zeta v} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} h = 1,\ 2,\ 3 \\ k = \lambda,\ \mu,\ \nu \end{pmatrix}$$

über, wo s einen der Werthe μ, 0, ν, λ haben kann. Für $s = 0$ stellt φ dieselbe Function dar, welche Halphen als doppeltperiodische Function zweiter Gattung eingeführt hat.† Bei den über v und G getroffenen Festsetzungen verschwindet nun der Ausdruck für v_3. Demnach erhält man die Eigenschaften der von Herrn Hermite unipolar genannten Functionen φ und φ_h, wenn man in den oben erwähnten algebraischen und Differential-Identitäten $v_3 = 0$ setzt.

Zum Schluss werde noch eine Bemerkung über die Differentialgleichungen hinzugefügt, welche für die allgemeinen unipolaren Functionen zweiter Gattung aufgestellt werden können, und von denen bereits überaus wichtige von den Herren Hermite, Darboux, Picard und Caspary entdeckt worden sind. Diese lassen sich sämmtlich aus der durch ihre Einfachheit merkwürdigen, von Herrn Caspary gefundenen Differentialidentität

$$d(a_{1h} \pm ia_{2h}) = \pm i(a_{1h} \pm ia_{2h})\, v_3 \mp ia_{3h}(v_1 \pm iv_2)$$

herleiten. Man findet aber auf diesem Wege nicht blos die schon bekannten, sondern zahllose neue Differentialbeziehungen, und wenn die Elemente des Orthogonalsystems von mehreren Variabeln abhängen, zahllose Systeme partieller Differentialgleichungen für die Functionen zweiter Gattung, worauf ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen hoffe.

---

* Liouville's J. B. 6, S. 387, 397. ** Comptes rendus 1890.

*** Liouville's J. B. 6, S. 400 flg.

† l. c. B. I, S. 230; vergl. auch Frobenius, Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art, Crelle's J. B. 93.

Berlin, im März 1892.

Kleinere Mittheilungen.

XI. Ueber die geodätische Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Curven und ihre Aenderung bei beliebiger Transformation der Fläche.

Wird eine Fläche unter Ausschluss von Dehnungen und Zusammenziehungen beliebig verbogen, so ändert sich, wie bekanntlich Minding zuerst nachgewiesen hat,* in keinem Punkte irgend einer auf der Fläche gezogenen Curve deren geodätische Krümmung. Anders ausgedrückt: Lässt sich eine gegebene Fläche auf eine zweite abwickeln und nennt man solche Punkte bezw. Curven auf den beiden Flächen entsprechend, welche durch die Abwicklung zur Deckung gebracht werden, so sind die geodätischen Krümmungen entsprechender Curven in entsprechenden Punkten einander gleich. Man kann sich die Frage vorlegen:

Wenn eine gegebene Fläche auf eine beliebige zweite in beliebiger Weise Punkt für Punkt abgebildet wird, welche Beziehung besteht alsdann zwischen der geodätischen Krümmung in irgend einem Punkte einer auf der ersten Fläche beliebig gezogenen Curve und der geodätischen Krümmung ihrer Abbildung im entsprechenden Punkte?

Die Antwort fällt überraschend einfach aus. Es ist nämlich die geodätische Krümmung der Abbildung einer gegebenen Curve in irgend einem Punkt eine ganze lineare Function von der zum entsprechenden Punkte gehörigen geodätischen Krümmung der gegebenen Curve,** wobei die Coefficienten nur von der Lage des betreffenden Curvenpunktes und von der Richtung der Curventangente in diesem Punkt abhängen.

---

* Minding, Bemerkung über die Abwickelung krummer Linien von Flächen. Crelle's Journal, Bd. 6, S. 159, 1830.

** Dieses Ergebniss hat grosse Aehnlichkeit mit einem Satze über die Aenderung des Gauss'schen Krümmungsmaasses einer Fläche [bezw. noch allgemeiner des Kronecker'schen Krümmungsmaasses eines l-dimensionalen Gebildes in einem ebenen Raume von $(l+1)$ Dimensionen] bei Anwendung einer beliebigen Punkttransformation des Raumes auf diese Fläche, den ich in dieser Zeitschrift Bd. 36, S. 212, 1891, abgeleitet habe. Das Krümmungsmaass der transformirten Fläche ist ebenfalls eine ganze lineare Function von demjenigen der ursprünglichen Fläche.

Eine sehr anschauliche geometrische Fassung lässt sich diesem Satze geben, wenn man den Begriff der geodätischen Krümmungsstrecke einführt. So möge die Strecke genannt werden, die in dem betreffenden Curvenpunkt anfängt, nach dem sogenannten geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Curve gerichtet ist (also vor Allem in der Tangentenebene der Fläche liegt und senkrecht auf der Tangente der Curve steht) und eine Länge von so viel Einheiten besitzt, als die geodätische Krümmung der Curve Einheiten beträgt. Man kann jetzt sagen:

Sind auf einer Fläche mehrere beliebige, sich in einem und demselben Punkte berührende Curven gezogen und construirt man die zum Berührungspunkte gehörigen geodätischen Krümmungsstrecken derselben, bildet man ferner die gegebenen Curven mit ihrer Fläche auf eine beliebige zweite Fläche nach irgend einem Gesetze Punkt für Punkt ab und construirt man auch für die Abbildungen jener Curven die zum gemeinsamen Berührungspunkte gehörigen geodätischen Krümmungsstrecken, dann sind die beiden Punktreihen, welche in den Endpunkten der geodätischen Krümmungsstrecken der gegebenen Curven einerseits und ihrer Abbildungen andererseits bestehen, einander ähnlich.

Nimmt man statt der Endpunkte der geodätischen Krümmungsstrecken die geodätischen Krümmungsmittelpunkte, so ergeben sich offenbar zwei Punktreihen, die zwar nicht ähnlich, aber doch projectiv sind, wobei der gemeinsame Berührungspunkt der gegebenen Curven und derjenige ihrer Abbildungen die Rolle zugeordneter Punkte spielen.

Auf die zahlreichen Fragen, zu welchen obiger Satz Veranlassung giebt, soll in dieser vorläufigen Mittheilung nicht eingegangen werden; nur ein Ergebniss, das unmittelbar aus ihm fliesst, sei hervorgehoben:

Berühren sich drei auf einer Fläche beliebig gezogene Curven in einem Punkt und bezeichnen k, k', k'' die geodätischen Krümmungen der Curven in jenem Punkt, so bleibt der Quotient

$$\frac{k-k'}{k-k''}$$

bei allen punktweisen Transformationen der Fläche ungeändert.*

Eine Ausdehnung dieser Resultate auf gewisse andere Transformationen von Flächen wird unten gegeben werden.

Was nun den Beweis des oben ausgesprochenen Satzes betrifft, so lässt sich derselbe auf die folgende Art führen: Die gegebene Fläche sei in Gauss'scher Weise mit Hilfe zweier Parameter u und v dargestellt. Für

* Es muss betont werden, dass hier von Transformationen einer Fläche die Rede ist, mit welchen keine Transformation des ganzen Raumes verbunden zu sein braucht.

die geodätische Krümmung k einer auf der Fläche gezogenen Curve giebt es einen Ausdruck der Form:*

$$k = \frac{\Delta\,(du\,d^2v - dv\,d^2u) + \varphi}{ds^3},$$

wo ds das Linienelement bedeutet,

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$\Delta^2 = EG - F^2$$

ist und endlich φ eine gewisse Differentialform dritten Grades in du und dv bezeichnet, deren Coefficienten Functionen von E, F, G und ihren Ableitungen nach u und v sind. Man fasse u und v als rechtwinklige Cartesische Coordinaten eines Punktes p in einer Ebene auf. Wird dieser Punkt dem Flächenpunkt (u, v) entsprechend gesetzt, so ist hiermit die Fläche auf die Ebene abgebildet. Sei $\varkappa$ die Krümmung der ebenen Abbildung der auf der Fläche gezogenen Curve, dann ist

$$\varkappa = \frac{du\,d^2v - dv\,d^2u}{(du^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man kann daher schreiben:

$$k = \alpha\varkappa + \beta,$$

wo

$$\alpha = \frac{\Delta\,(du^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}}{ds^3}, \qquad \beta = \frac{\varphi}{ds^3}$$

ist. Die Coefficienten α und β sind also Functionen von u, v, du, dv, enthalten dagegen d^2u und d^2v nicht. Hieraus folgt: Hat man auf der Fläche ein System S von sich in einem Punkte berührenden Curven, so ist die Punktreihe, welche aus den Endpunkten der zum gemeinsamen Berührungspunkt gehörigen geodätischen Krümmungsstrecken dieser Curven zusammengesetzt ist, ähnlich zu derjenigen Punktreihe, die aus den Endpunkten der entsprechenden Krümmungsstrecken der ebenen Abbildung Σ des Curvensystems S besteht. Es werde nun jedem Punkt (u, v) der gegebenen Fläche ein bestimmter Punkt (u_1, v_1) einer beliebigen zweiten Fläche zugeordnet. Dem Curvensysteme S entspricht alsdann ein System S_1 von Curven der zweiten Fläche, die sich auch in einem und demselben Punkte berühren. Die zweite Fläche bilde man ebenfalls auf die Ebene ab, indem man u_1, v_1 als rechtwinklige Cartesische Coordinaten eines Punktes p_1 der Ebene betrachtet. Es bezeichne Σ_1 die ebene Abbildung von S_1. Mittelbar sind jetzt auch die ebenen Curvensysteme Σ und Σ_1 Punkt für Punkt auf einander bezogen oder es kann Σ_1 durch Anwendung einer bestimmten ebenen Punkttransformation aus Σ erhalten werden. Zwischen Σ_1 und S_1 besteht natürlich, was die aus den Endpunkten entsprechender Krümmungsstrecken (bezw. geodätischer Krümmungsstrecken) gebildeten Punktreihen betrifft, dieselbe Beziehung, wie zwischen Σ und S, aber ebenso auch, wie

* Vergl. Minding, a. a. O. S. 160.

aus einem an anderem Orte* bewiesenen Satze hervorgeht, zwischen Σ_1 und Σ, folglich auch zwischen S_1 und S, was gerade zu beweisen war.

Die obigen Sätze erfahren eine Erweiterung und finden zugleich ihren natürlichen Abschluss beim Uebergange zu Transformationen, welche aus der Anwendung des Lie'schen Begriffes der Berührungstransformationen auf die Flächentheorie hervorgehen. Wir können jedem Linienelement auf einer gegebenen Fläche ein bestimmtes Linienelement auf einer anderen gegebenen Fläche so zuordnen, dass je zwei, im Sinne des Herrn Lie vereinigt liegenden Elementen wieder zwei vereinigt liegende Elemente entsprechen. Dann wird jede auf der ersten Fläche gezogene Curve sich in eine Curve (in besonderen Fällen auch in einen Punkt) der zweiten Fläche verwandeln und zwei sich berührende Curven werden im Allgemeinen in zwei sich ebenfalls berührende Curven übergehen.** Die punktweise Transformation einer Fläche ist hierin als besonderer Fall enthalten.

Für die eben definirten Transformationen von Flächen gilt nun, wie ich ohne Beweis hier anführe, der Satz:

Die geodätische Krümmung der Transformirten einer auf der gegebenen Fläche beliebig gezogenen Curve in irgend einem Punkt ist eine gebrochene lineare Function von der geodätischen Krümmung der gegebenen Curve im entsprechenden Punkt, wobei die Coefficienten nur von der Lage des betreffenden Curvenpunktes auf der Fläche und von der Richtung der Curventangente in demselben abhängen.

Oder in geometrischer Fassung:

Hat man auf der gegebenen Fläche ein beliebiges System von Curven, die sich in einem Punkte berühren, so bilden die zum Berührungspunkte gehörigen geodätischen Krümmungsmittelpunkte dieser Curven und die entsprechenden geodätischen Krümmungsmittelpunkte ihrer Transformirten zwei projective Punktreihen.

Daraus folgt u. A.:

Berühren sich vier auf einer Fläche beliebig gezogene Curven in einem Punkt und bezeichnen k_1, k_2, k_3, k_4 ihre geodätischen Krümmungen in jenem Punkt, so ist das Doppelverhältniss

$$\frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}$$

gegenüber allen Berührungstransformationen der Fläche (im oben angegebenen Sinne) eine absolute Invariante.

Darmstadt, October 1891. R. Mehmke.

* Diese Zeitschrift Bd. 36 S. 208, 1891.

** Derartige Transformationen von Flächen sind meines Wissens noch nicht untersucht worden. Sie lassen sich, wie leicht zu sehen ist, den räumlichen Berührungs-Transformationen keineswegs unterordnen.

XII. Zu der Bemerkung: „Arithmetischer Satz“.

Im 6. Heft des 36. Jahrganges dieser Zeitschrift findet sich S. 383 flg. ein kleinerer arithmetischer Satz mitgetheilt. Dem dort Gesagten darf vielleicht als Ergänzung hinzugefügt werden, dass die Eigenthümlichkeit, durch cyklische Vertauschung der Ziffern Vielfache der ursprünglichen Zahl zu geben, den Perioden aller in sogen. Systembrüche verwandelter gewöhnlicher Brüche gemeinsam ist, sofern sie reine Perioden sind. Dazu ist bekanntlich nur erforderlich, dass der Nenner des dargestellten Bruches relativ prim zu der Grundzahl des betreffenden Zahlensystemes ist.

Uebrigens lässt der fragliche Satz noch eine weitere Verallgemeinerung zu, wie wir kurz zeigen wollen.

Es mögen $r_1, r_2, r_3, \dots r_n$ die Reste und $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ die Ziffern der Periode des im Zahlensysteme α dargestellten (echten) Bruches $\frac{r_1}{k}$ sein, wo α prim zu k ist. Bezeichnet man dann abkürzend

$$\frac{r_1}{k} = \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} + \frac{a_3}{\alpha^3} + \cdots + \frac{a_n}{\alpha^n} + in\,inf. = (0,\, a_1 a_2 a_3 \dots a_n)_\alpha,$$

so folgt hieraus bekanntlich

$$\frac{r_\lambda}{k} = (0,\, a_\lambda a_{\lambda+1} a_{\lambda+2} \dots a_{\lambda-1})_\alpha \quad \text{oder}$$

$$1) \qquad \dots r_\lambda = k\,(0,\, a_\lambda a_{\lambda+1} a_{\lambda+2} \dots a_{\lambda-1})_\alpha \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots n).$$

Multiplicirt man 1) mit α^n und zählt von dem so erhaltenen Producte 1) ab, so ergiebt sich:

$$2) \quad \dots r_\lambda(\alpha^n - 1) = k\,(a_\lambda a_{\lambda+1} a_{\lambda+2} \dots a_{\lambda-1})_\alpha, \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots n),$$

wo

$$(a_\lambda a_{\lambda+1} a_{\lambda+2} \dots a_{\lambda-1})_\alpha = a_\lambda \alpha^{n-1} + a_{\lambda+1}\alpha^{n-2} + a_{\lambda+2}\alpha^{n-3} + \dots + a_{\lambda-2}\alpha + a_{\lambda-1}.$$

Bedeuten weiter $r'_1, r'_2, r'_3, \dots r'_n$ die Reste und $a'_1, a'_2, a'_3, \dots a'_n$ die Ziffern der Periode des im Zahlensysteme α dargestellten Bruches $\frac{r'_1}{k}$, wo r'_1 in der Reihe $r_1, r_2, r_3, \dots r_n$ vorkommen kann oder nicht, so erhält man auf dieselbe Weise:

$$3) \quad \dots r'_\mu(\alpha^n - 1) = k\,(a'_\mu a'_{\mu+1} a'_{\mu+2} \dots a'_{\mu-1})_\alpha \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots n).$$

Aus 2) und 3) folgt ohne Weiteres:

$$4) \quad \dots r_\lambda(a'_\mu a'_{\mu+1} a'_{\mu+2} \dots a'_{\mu-1})_\alpha = r'_\mu(a_\lambda a_{\lambda+1} a_{\lambda+2} \dots a_{\lambda-1})_\alpha \; (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \dots n).$$

Kommt r'_μ unter den Resten $r_1, r_2, r_3, \dots$ vor, ist etwa $r'_\mu = r_{\lambda+\nu-1}$, und setzt man $\lambda = 1$, so verwandelt sich Gleichung 4) in

$$5) \quad \dots r_1(a_\nu a_{\nu+1} a_{\nu+2} \dots a_{\nu-1})_\alpha = r_\nu(a_1 a_2 a_3 \dots a_\nu)_\alpha \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots n).$$

Diese Gleichung stimmt, wenn im besonderen Falle $r_1 = 1$, k eine Primzahl und α eine zugehörige primitive Wurzel ist, hinsichtlich ihres Inhalts mit dem a. a. O. entwickelten Satze überein.

Sei z. B. $k = 91$, $\alpha = 10$, $r_1 = 8$, $r'_1 = 9$, so ist $n = 6$, und man hat

$$\frac{8}{91} = (0{,}087912)_{10}, \quad \frac{9}{91} = (0{,}098901)_{10}$$

$r_1 = 8$	$r'_1 = 9$	$a_1 = 0$	$a'_1 = 0$
$r_2 = 80$	$r'_2 = 90$	$a_2 = 8$	$a'_2 = 9$
$r_3 = 72$	$r'_3 = 81$	$a_3 = 7$	$a'_3 = 8$
$r_4 = 83$	$r'_4 = 82$	$a_4 = 9$	$a'_4 = 9$
$r_5 = 11$	$r'_5 = 1$	$a_5 = 1$	$a'_5 = 0$
$r_6 = 19$	$r'_6 = 10$	$a_6 = 2$	$a'_6 = 1$

Man erhält daher aus Gleichung 4) beispielsweise:

$$\text{für } \lambda = 2, \ \mu = 4: \ 80.901098 = 82.879120,$$

$$\text{für } \lambda = 3, \ \mu = 5: \ 72.10989 = 791208, \text{ u. s. w.}$$

Es möge bei dieser Gelegenheit noch gestattet sein, auf die unter dem Titel „Neue Grundlagen einer allgemeinen Zahlenlehre“ demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Abhandlungen des Verfassers hinzuweisen, wo gelegentlich Gleichungen, wie 4) und andere zur Ableitung interessanter Identitäten verwendet werden.

Dr. J. Kraus.

Mainz, im März 1892.

XIII. Construction einer Tangente in einem Punkte einer Curve dritten Grades.

Ist irgend eine Basis des dritten Grades gegeben, so kann in einem beliebigen Punkte derselben auf folgende einfache Art eine Tangente gezeichnet werden:

Durch den gegebenen Berührungspunkt P ziehe man zwei beliebige Geraden, welche die Basis noch in den Punkten A_1, B_1 und A_2, B_2 treffen. Die Geraden A_1A_2 und B_1B_2 mögen ferner die Curve noch in Punkten C_1 und C_2 treffen; es bestimmt dann C_1C_2 allemal auf der Basis C^3 einen solchen Punkt Q, so dass PQ Tangente der Basis in P ist.

Durch die Geraden A_1B_1, A_2B_2 und C_1C_2, diese zusammen als eine Curve des dritten Grades angesehen, und die Basis C_3 selbst ist nämlich ein Büschel von Curven dritten Grades bestimmt, die alle sich in P berühren. Eine solche Curve ist auch gebildet durch die Geraden A_1A_2, B_1B_2 und PQ, und zwar muss PQ die Basis und alle Curven des Büschels berühren, da diese letztern drei Geraden durch 8 der 9 Grundpunkte des Büschels gehen.

Stuttgart, im Mai 1892.

Benedikt Sporer.

XIV. Ueber die Kennzeichen der Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

Die Criterien der Theilbarkeit, welche Herr Dietrichkeit im 4. und 5. Hefte des Jahrg. 1891 der vorliegenden Zeitschrift mitgetheilt hat, veranlassen mich zu folgenden Bemerkungen:

I. Es ist zur Anwendung des Criteriums unnöthig, dass die Reste der Division bei der Verwandlung von $\frac{1}{n}$ in einen Decimalbruch vorher von n subtrahirt werden, wie es S. 316 (Heft 5) geschieht. Man kann vielmehr diese Reste selber verwenden, und dann kommt man auf ein schon bekanntes Criterium zurück.

II. Die verschiedenen Kennzeichen sind sämmtlich besondere Fälle eines allgemeineren Criteriums, welches von Herrn R. Perrin in den Comptes rendus de l'association française pour l'avancement des sciences, 1889, 2e partie, pag. 24—38 veröffentlicht worden ist.

Rotterdam. Dr. R. H. van Dorsten.

Berichtigung.

In der Arbeit: „Ueber die Kreisungspunkte einer complan bewegten Ebene" (1. Heft dieses Jahrganges) habe ich auf S. 52 die Verbindungslinie des Pols mit dem unendlich fernen Punkte der Kreisungspunktcurve (in Fig. 7, Taf. III mit PV bezeichnet) Asymptote genannt, was nicht richtig ist, weil diese Gerade nicht die erforderliche Eigenschaft besitzt, Curventangente zu sein. Diese Eigenschaft kommt aber bei sämmtlichen Schlussfolgerungen überhaupt nicht in Frage, und so behalten sämmtliche Resultate ihre Giltigkeit, wenn nur von S. 52 ab überall statt Asymptote richtiger „zur Asymptote paralleler Normalstrahl" gesetzt wird.

Bei diesem Anlasse möchte ich noch erwähnen, dass Herr Prof. R. Müller die Freundlichkeit hatte, mich brieflich darauf hinzuweisen, dass 1. die von mir in Figur 7 mit K_0 und Q_0 bezeichneten Punkte die Gegenpunkte zu P auf den Krümmungskreisen der Kreisungspunktcurve im Doppelpunkte sind (vergl. hierzu R. Müller: „Ueber die Krümmung der Bahnevoluten bei starren ebenen Systemen". Diese Zeitschrift, Bd. XXXVI, S. 196 flg.); 2. die Gerade PV die Focalachse der Kreisungspunktcurve ist.

M. Grübler.

XIV.

Zum Fundamentalsatz über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen.

Von

Dr. Gustav Mie.

Schluss.

Dritter Abschnitt.

Anwendungen.

1. Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y) + f_0(x, y) \cdot z + f_1(x, y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

a) Untersuchung des unendlichen Systems, in welchem x nicht explicite vorkommt.

19. Die Gleichung sei:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(y) + f_0(y) \cdot z + f_1(y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$f(y) = a_0 + a_1 y + \cdots + a_m \cdot \frac{y^m}{m!} + \cdots$$

$$f_0(y) = b_0 + b_1 y + \cdots + b_m \cdot \frac{y^m}{m!} + \cdots$$

$$f_1(y) = c_0 + c_1 y + \cdots + c_m \cdot \frac{y^m}{m!} + \cdots$$

Setze ich

$$z = \zeta_0 + \zeta_1 y + \zeta_2 \frac{y^2}{2!} + \cdots$$

rechts ein, so bekomme ich:

$$\left(a_0+a_1y+a_2\frac{y^2}{2!}+\cdots\right)+(b_0+b_1y+\cdots)(\zeta_0+\zeta_1y+\cdots)+(c_0+c_1y+\cdots)(\zeta_1+\zeta_2y+\cdots)$$

$$=(a_0+b_0\cdot\zeta_0+c_0\cdot\zeta_1)+(a_1+b_0\zeta_1+b_1\zeta_0+c_0\zeta_2+c_1\zeta_1)y+\cdots$$

$$+\left|\begin{array}{l} a_m+b_0\zeta_m+m\,b_1\zeta_{m-1}+\binom{m}{2}\cdot b_2\cdot\zeta_{m-2}+\cdots+b_m\cdot\zeta_0 \\ +c_0\cdot\zeta_{m+1}+m\cdot c_1\cdot\zeta_m+\binom{m}{2}\cdot c_2\cdot\zeta_{m-1}+\cdots+c_m\cdot\zeta_1 \end{array}\right|\frac{y^m}{m!}+\cdots$$

Ist nun:

$$\zeta_0=C_{01}\cdot x+C_{02}\cdot x^2+\cdots$$
$$\zeta_1=C_{11}\cdot x+C_{12}\cdot x^2+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

so ist der Coefficient von $\frac{y^m}{m!}$:

$$A_0^{(m)}=a_m \qquad\qquad \leqq C_{m1}$$

$$+A_1^{(m)}\cdot x=$$

$$x\cdot\left|\begin{array}{l} b_0C_{m,1}+m\,b_1C_{m-1,1}+\binom{m}{2}b_2C_{m-2,1}+\cdots+b_m\cdot C_{0,1} \\ +c_0C_{m+1,1}+m\cdot c_1C_{m,1}+\binom{m}{2}c_2C_{m-1,1}+\cdots+c_mC_{1,1} \end{array}\right|\leqq 2\,C_{m2}\,x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+A_\mu^{(m)}\cdot x^\mu=$$

$$x^\mu\cdot\left|\begin{array}{l} b_0\cdot C_{m,\mu}+m\cdot b_1\cdot C_{m-1,\mu}+\binom{m}{2}\cdot b_2\cdot C_{m-2,\mu}+\cdots+b_m\cdot C_{0,\mu} \\ +c_0C_{m+1,\mu}+m\cdot c_1C_{m,\mu}+\binom{m}{2}c_2\cdot C_{m-1,\mu}+\cdots+c_m\cdot C_{1,\mu} \end{array}\right|\leqq(\mu+1)\,C_{m,\mu+1}\cdot x^\mu$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Zufolge der Bemerkung in 17 muss ich annehmen: $c_0>0$. Ich schreibe mir nun die folgende Reihe von Ungleichungen auf:

$$A_1^{(m)}\leqq 2\,C_{m2}$$

$$A_2^{(m-1)}=\cdots+c_0\,.\,C_{m2}+\cdots\leqq 3\,C_{m-1,3},$$

$$A_3^{(m-2)}=\cdots+c_0\,.\,C_{m-1,3}+\cdots\leqq 4\,C_{m-2,4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{m+1}^{(0)}=\cdots+c_0\,.\,C_{1,m+1}+\cdots\leqq(m+2)\cdot C_{0,m+2}$$

Multiplicirt: $c_0^m\cdot A_1^{(m)}\leqq(m+2)!\;C_{0,m+2}\leqq(m+2)!\;A^{(0)}\,.\,r^{m+2}$ (S. 21).

Setzt man $2\cdot A_0\cdot r^2=A$, $\frac{r}{c_0}<R$, so ergeben sich also (wenn R gross genug gewählt ist) folgende Bedingungen:

$$A_1^{(0)} < A,$$
$$A_1^{(1)} < A \,.\, R,$$
$$A_1^{(2)} < 2!\; A \,.\, R^2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_1^{(m)} < m!\, A \,.\, R^m.$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Da nun: $$A_1^{(m)} = b_0 \cdot C_{m,1} + m \cdot b_1 \cdot C_{m-1,1} + \cdots + b_m \cdot C_{01} + c_0 \cdot C_{m+1,1} + m \cdot c_1 \cdot C_{m,1} + \cdots + c_m \cdot C_{11}$$

und da nicht alle $C_{m,1}$ Null sein können, weil ja die $a_m < C_{m,1}$ *, so folgen aus dieser Reihe von Ungleichungen drei andere Reihen: És muss sechs Zahlen: $A, B, C, \varrho, \varrho_0, \varrho_1$ geben, dass:

$$C_{01} < A,\; C_{11} < A \cdot \varrho, \cdots C_{m,1} < m!\; A \cdot \varrho^m, \cdots$$

oder 1) $a_0 < A,\; a_1 < A \cdot \varrho, \cdots a_m < m!\; A \cdot \varrho^m, \cdots$

ferner 2) $b_0 < B,\; b_1 < B \cdot \varrho_0, \cdots b_m < m!\; B \cdot \varrho_0^m, \cdots$

und 3) $c_0 < C,\; c_1 < C \cdot \varrho_1, \cdots c_m < m!\; C \cdot \varrho_1^m, \cdots$

Berücksichtigt man die Bedeutung der a, b, c (s. S. 193), so heissen diese Bedingungen nichts weiter, als dass die Reihen: $f(y), f_0(y), f_1(y)$ von Null verschiedene Convergenzradien haben müssen.

Diese Bedingungen sind aber nicht nur nothwendig, sondern auch völlig hinreichend für die Existenz von Integralen.

Sei nämlich $R > \varrho, \varrho_0, \varrho_1$, so kann ich gewiss setzen: $C_{m1} = m!\, A \cdot R^m$, denn dann sind die Bedingungen $A_0^{(m)} = a_m < C_{m1}$ erfüllt. Um $A_1^{(m)}$ zu berechnen, setze ich statt der b_m, c_m die grösseren Werthe $m!\, B \cdot \varrho_0^m, m!\, C \cdot \varrho_1^m$. Dann ist:

$$A_1^{(m)} = (b_0 C_{m1} + m \cdot b_1 C_{m-1,1} + \cdots + b_m C_{01}) + (c_0 C_{m+1,1} + m \cdot c_1 C_{m,1} + \cdots + c_m C_{11})$$

$$A_1^{(m)} < A \cdot C \cdot (m+1)!\, R^{m+1} \cdot \left(1 + \frac{m}{m+1} \cdot \frac{\varrho_1}{R} + \frac{m-1}{m+1} \cdot \left[\frac{\varrho_1}{R}\right]^2 + \cdots + \frac{1}{m+1} \cdot \left[\frac{\varrho_1}{R}\right]^m\right)$$
$$+ A \cdot B \cdot m!\; R^m \left(1 + \frac{\varrho_0}{R} + \cdots + \left[\frac{\varrho_0}{R}\right]^m\right)$$
$$< (m+1)!\; A \cdot R^{m+1} \cdot \left(\frac{C \cdot R}{1 - \frac{\varrho_1}{R}} + \frac{1}{m+1} \cdot \frac{B}{1 - \frac{\varrho_0}{R}}\right)$$
$$< (m+1)!\; A \cdot R^{m+1} \cdot \varrho',$$

wo ϱ' so bestimmt sei, dass es für alle m denselben Werth hat, z. B.:

$$\varrho' = \frac{C \cdot R}{1 - \frac{\varrho_1}{R}} + \frac{B}{1 - \frac{\varrho_0}{R}}.$$

---

* Den Fall $\frac{\partial z}{\partial x} = f_0(y) \,.\, z + f_1(y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ brauche ich nicht zu berücksichtigen. Hier ist das Integral unter allen Umständen $z = 0$.

Wähle ich nun $C_{m_2} = \frac{(m+1)!}{2} \cdot A \cdot R^m \cdot \varrho'$, so sind die Bedingungen $A_1^{(m)} < 2 \cdot C_{m_2}$ erfüllt. Ferner ist:

$$A_2^{(m)} < A \cdot \frac{(m+2)!}{2} \cdot R^m \cdot \varrho' \cdot \left(\frac{C \cdot R}{1 - \frac{\varrho_1}{R}} + \frac{B}{1 - \frac{\varrho_0}{R}} \right) < A \cdot \frac{(m+2)!}{2} \cdot R^m \cdot \varrho'^2.$$

Also, wenn $C_{m_3} = \frac{(m+2)!}{3!} \cdot A \cdot R^m \cdot \varrho'^2$, so ist $A_2^{(m)} < 3\, C_{m_3}$ und so fort. $C_{m\mu} = \frac{(m+\mu-1)!}{\mu!} \cdot A \cdot R^m \cdot \varrho'^{\mu-1}$ gesetzt, wird immer der Bedingung $A_{\mu-1}^{(m)} < \mu \,.\, C_{m\mu}$ genügen. Denn:

$$(\mu-1)!\; A_{\mu-1}^{(m)} < A \,.\, B\, \varrho'^{\mu-2} R^m \,.\, (m+\mu-2)!$$

$$\left(1 + \frac{m}{m+\mu-2} \cdot \left[\frac{\varrho_0}{R}\right] + \frac{m\,.\,(m-1)}{(m+\mu-2)(m+\mu-3)} \cdot \left[\frac{\varrho_0}{R}\right]^2 + \cdots + \frac{m!}{(m+\mu-2)\cdots(\mu-1)} \cdot \left[\frac{\varrho_0}{R}\right]^m\right)$$

$$+ A \,.\, C \,.\, \varrho'^{\mu-2} \cdot R^m \cdot (m+\mu-1)!$$

$$\left(1 + \frac{m}{m+\mu-1} \cdot \left[\frac{\varrho_1}{R}\right] + \frac{m\,.\,(m-1)}{(m+\mu-1)(m+\mu-2)} \cdot \left[\frac{\varrho_1}{R}\right]^2 + \cdots + \frac{m!}{(m+\mu-1)\cdots\mu} \cdot \left[\frac{\varrho_1}{R}\right]^m\right)$$

$$< (m+\mu-1)!\;\; A \cdot R^m \cdot \varrho'^{\mu-2} \cdot \left(\frac{B}{m+\mu-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varrho_0}{R}} + \frac{C}{1 - \frac{\varrho_1}{R}} \right)$$

$$< (m+\mu-1)!\;\; A \cdot R^m \cdot \varrho'^{\mu-1} = \mu!\; C_{m,\mu}$$

$$A_{\mu-1}^{(m)} < \mu \cdot C_{m,\mu}.$$

Nun hat aber die Reihe:

$$m!\, A \cdot R^m \cdot x + \frac{(m+1)!}{2} \cdot A \cdot R^m \cdot \varrho' \cdot x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{(m+\mu-1)!}{\mu!} \cdot A \cdot R^m \cdot \varrho'^{\mu-1} \cdot x^\mu + \cdots$$

einen Sinn; denn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder nähert sich dem Werthe:

$$\lim_{\mu=\infty} \left(\frac{m+\mu}{\mu+1} \cdot \varrho' \cdot x \right) = \varrho' \cdot x.$$

Die Reihe hat also den Convergenzradius $\frac{1}{\varrho}$. Also lässt sich das unendliche System mit Hilfe von Potenzreihen integriren.

Es ist nicht ohne Interesse zu bemerken, dass das für $y = 0$ gewonnene unendliche System im Falle $c_0 = 0$ stets Potenzreihen zu Integralen hat, auch wenn $f(y)$, $f_0(y)$, $f_1(y)$ nicht in Potenzreihen entwickelbar sind, sondern nur für $y = 0$ lauter endliche Ableitungen haben. Es lautet nämlich in diesem Falle das unendliche System:

$$\frac{dz_0}{dx} = \left[f(y) + f_0(y)\cdot z + f_1(y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]_0 = a_0 + b_0\cdot z_0,$$

$$\frac{dz_1}{dx} = \left[f'(y) + f'_0(y)\cdot z + [f_0(y) + f'_1(y)]\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + f_1(y)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_0$$

$$= a_1 + b_1\cdot z_0 + (b_0 + c_1)\cdot z_1$$

$$\frac{dz_2}{dx} = \left[f''(y) + f''_0(y)\cdot z + [2f'_0(y) + f''_1(y)]\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + [f_0(y) + 2f'_1(y)]\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f_1(y)\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right]_0$$

$$= a_2 + b_2\cdot z_0 + (2b_1 + c_2)z_1 + (b_0 + 2c_1)\cdot z_2.$$

. . . .

Eine jede Gleichung bildet schon mit den vorhergehenden ein vollständiges System. Sind also die Differentialquotienten von $f(y)$, $f_0(y)$, $f_1(y)$ für $y = 0$ (die mit a, b, c bezeichnet wurden) etwa bis zum m^{ten} alle endlich, so lassen sich $z_0, z_1, \ldots z_m$ als Potenzreihen berechnen. Sind sämmtliche a, b, c endlich, ohne dass darum f, f_0, f_1 Taylor'sche Reihen zu sein brauchen, so ist das ganze unendliche System integrirbar.

Aber, damit z als Potenzreihe in x und y existirt, ist auch im Falle $c_0 = 0$ die für $c \neq 0$ nachgewiesene Bedingung nothwendig.

b) Resultat.

20. Stellen wir mit Obigem das in 7. und 16. Gefundene zusammen, so erhalten wir den Satz:

Nothwendig und hinreichend dafür, dass die Gleichung mit lauter positiven Coefficienten:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y) + f_0(x, y)\cdot z + f_1(x, y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

als Integral $z(x, y)$ eine Potenzreihe in x und y hat, ist nur, dass f, f_0, f_1 Potenzreihen mit von Null verschiedenen Convergenzbereichen in x und y sind.

2. Die Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$.

a) Die Gleichung sei linear.

21. Ich nehme zunächst an, x komme rechts nicht vor. Die Gleichung sei:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(y) + f_0(y)\cdot z + f_1(y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + f_2(y)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$f(y) = a_0 + a_1 y + a_2\cdot\frac{y^2}{2!} + \cdots$$

$$f_0(y) = b_0 + b_1 y + b_2\cdot\frac{y^2}{2!} + \cdots$$

$$f_1(y) = c_0 + c_1 y + c_2\cdot\frac{y^2}{2!} + \cdots$$

$$f_2(y) = d_0 + d_1 y + d_2\cdot\frac{y^2}{2!} + \cdots$$

Setze ich ein:

$$z = \zeta_0 + \zeta_1 \cdot y + \zeta_2 \cdot \frac{y^2}{2!} + \cdots,$$
$$\zeta_0 = C_{01}\,x + C_{02}\,x^2 + \cdots,$$
$$\zeta_1 = C_{11}\,x + C_{12}\,x^2 \cdots, \cdots$$

so wird die rechte Seite:

$$(a_0 + b_0\zeta_0 + c_0\zeta_1 + d_0\zeta_2) + (a_1 + b_0\zeta_1 + b_1\zeta_0 + c_0\zeta_2 + c_1\zeta_1 + d_0\zeta_3 + d_1\zeta_2)\cdot y +$$
$$\cdots + \left.\begin{array}{l} a_m + b_0\,\zeta_m + m\cdot b_1\,\zeta_{m-1} + \binom{m}{2}\cdot b_2\cdot\zeta_{m-2} + \cdots + b_m\zeta_0 \\ + c_0\cdot\zeta_{m+1} + m\cdot c_1\cdot\zeta_m + \binom{m}{2}\cdot c_2\cdot\zeta_{m-1} + \cdots + c_m\zeta_1 \\ + d_0\cdot\zeta_{m+2} + m\cdot d_1\cdot\zeta_{m+1} + \binom{m}{2}\cdot d_2\,\zeta_m + \cdots + d_m\,\zeta_2 \end{array}\right| \frac{y^m}{m!} + \cdots$$

Entwickelt nach x-Potenzen lautet der Factor von $\frac{y^m}{m!}$:

$$A_0^{(m)} = a_m \qquad\qquad \leqq C_{m,1}\,x$$
$$+ A_1^{(m)}\cdot x =$$
$$x\left|\begin{array}{l} b_0 C_{m1} + m\cdot b_1\cdot C_{m-1,1} + \binom{m}{2}\cdot b_2 C_{m-2,1} + \binom{m}{3} b_3 C_{m-3,1} + \cdots + b_m C_{01} \\ + c_0\cdot C_{m+1,1} + m\cdot c_1 C_{m,1} + \binom{m}{2}\cdot c_2\cdot C_{m-1,1} + \binom{m}{3} c_3 C_{m-2,1} + \cdots + c_m C_{11} \\ + d_0\cdot C_{m+2,1} + m\cdot d_1 C_{m+1,1} + \binom{m}{2}\cdot d_2\cdot C_{m,1} + \binom{m}{3} d_3 C_{m-1,1} + \cdots + d_m C_{21} \end{array}\right| \leqq 2\,C_{m,2}\,x$$

. . . .

$$+ A_n^{(m)}\cdot x^n =$$
$$x^n\left|\begin{array}{l} b_0 C_{mn} + m\cdot b_1 C_{m-1,n} + \binom{m}{2}\cdot b_2 C_{m-2,n} + \binom{m}{3} b_3 C_{m-3,n} + \cdots + b_m C_{0n} \\ + c_0 C_{m+1,n} + m\cdot c_1 C_{m,n} + \binom{m}{2}\cdot c_2 C_{m-1,n} + \binom{m}{3} c_3 C_{m-2,n} + \cdots + c_m C_{1n} \\ + d_0 C_{m+2,n} + m\cdot d_1 C_{m+1,n} + \binom{m}{2}\cdot d_2 C_{m,n} + \binom{m}{3} d_3 C_{m-1,n} + \cdots + d_m C_{2n} \end{array}\right| \leqq (n+1)\cdot C_{m,n+1}\,x^n$$

. . . .

22. Erster Fall. Der Coefficient von $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ sei eine Constante: $d_0 = D$.

Es müssen nun folgende Ungleichungen bestehen:

$$A_1^{(m-2)} = \cdots + D\cdot C_{m,1} + \cdots < 2\,C_{m-2,2}$$
$$A_2^{(m-4)} = \cdots + D\cdot C_{m-2,2} + \cdots < 3\,C_{m-4,3},$$

. . . .

$$A_{\frac{m}{2}}^{(0)} = \cdots + D\cdot C_{2,\frac{m}{2}} + \cdots < \left(\frac{m}{2}+1\right)\cdot C_{0,\frac{m}{2}+1}$$ (wenn m gerade angenommen wird)

$$D^{\frac{m}{2}}\cdot C_{m,1} < \left(\frac{m}{2}+1\right)!\,C_{0,\frac{m}{2}+1} < \left(\frac{m}{2}+1\right)!\,A^{(0)}\cdot r^{\frac{m}{2}+1}, \text{(S. 21)},$$

ebenso wenn m ungerade:

$$D^{\frac{m-1}{2}}\cdot C_{m,1} < \left(\frac{m+1}{2}\right)!\,C_{1,\frac{m+1}{2}} < \left(\frac{m+1}{2}\right)!\,A^{(1)}\cdot r^{\frac{m+1}{2}}.$$

Wähle ich nun $R > \sqrt{\frac{r}{D}}$ gross genug, so kann ich eine Zahl A angeben, dass stets die Ungleichungen bestehen:

$$C_{2\nu,1} < \nu!\;A\cdot R^{2\nu},\quad C_{2\nu+1,1} < \nu!\;A\cdot R^{2\nu+1}$$

Da nun aber alle $a_m < C_{m,1}$, so muss die Reihe $f(y)$ Coefficienten haben, kleiner als die einer gewissen Reihe:

$$A \cdot (1 + y \cdot R + \frac{1!}{2!} y^2 \cdot R^2 + \frac{1!}{3!} \cdot y^3 \cdot R^3 + \cdots \frac{\nu!}{2\nu!} \cdot y^{2\nu} \cdot R^{2\nu} + \frac{\nu!}{2\nu+1!} \cdot y^{2\nu+1} \cdot R^{2\nu+1} + \cdots$$

Also wenn ich setze $R < 2\varrho$, kleiner als die der Reihe:

$$A \cdot (1 + y \cdot \varrho + \frac{y^2 \cdot \varrho^2}{1!} + \frac{y^3 \cdot \varrho^3}{1!} + \cdots + \frac{y^{2\nu} \cdot \varrho^{2\nu}}{\nu!} + \frac{y^{2\nu+1} \cdot \varrho^{2\nu+1}}{\nu!} + \cdots$$

$$\left(\text{Denn } \frac{2\nu!}{(\nu!)^2} > 2^{2\nu}; \text{ also } \frac{1}{\nu!} > \frac{\nu! \, 2^{2\nu}}{2\nu!}\right)$$

$f(y)$ muss Coefficienten haben, kleiner als die der Reihe

$$A \cdot (e^{\varrho^2 y^2} + \varrho \cdot y \cdot e^{\varrho^2 \cdot y^2}).$$

Dies ist die erste nothwendige Bedingung, welche aber noch nicht hinreichend ist.

Genau so, wie für C_{m1}, kann man nämlich für jedes $C_{m,\mu}$ eine Ungleichung herleiten. Und zwar muss sein:

$$C_{2\nu,\mu} < \frac{(\nu + \mu)!}{\mu!} \cdot A \cdot R^{2\nu}, \quad C_{2\nu+1,\mu} < \frac{(\nu + \mu)!}{\mu!} \cdot A \cdot R^{2\nu+1}.$$

(A und R dieselben Zahlen, wie oben.)

Ausserdem aber gilt die folgende Reihe (indem ich $\frac{b_3}{3!} = B_3$ setze):

$$A_1^{(m+3)} = \cdots + (m+3) \cdot (m+2) \cdot (m+1) \cdot B_3 \cdot C_{m,1} + \cdots < 2 \cdot C_{m+3,2},$$

$$A_2^{(m+6)} = \cdots + (m+6) \cdot (m+5) \cdot (m+4) \cdot B_3 \cdot C_{m+3,2} + \cdots < 3 \cdot C_{m+6,3},$$

. . . .

$$A_\mu^{(m+3\mu)} = \cdots + (m+3\mu) \cdot (m+3\mu-1) \cdot (m+3\mu-2) \cdot B_3 \cdot C_{m+3(\mu-1),\mu} + \cdots < (\mu+1) \cdot C_{m+3\mu,\mu+1}$$

$$\frac{(m + 3_\mu)!}{m!} \cdot B_3^{\mu-1} \cdot C_{m,1} < (\mu + 1)! \, C_{m+3\mu,\mu+1} \text{ für jedes } \mu.$$

Wähle ich μ so, dass $m + \mu$ gerade, so ist

$$C_{m+3\mu,\mu+1} < \frac{\left(\frac{m+3\mu}{2} + \mu + 1\right)!}{(\mu+1)!} \cdot A \cdot R^{m+3\mu}$$

$$\frac{(m+3\mu)!}{m!} \cdot B_3^{\mu} - \cdot C_{m,1} < \left(\frac{m+3\mu}{2} + \mu + 1\right)! \, A \cdot R^{m+3\mu}$$

Nun sinkt aber die Zahl:

$$\frac{\left(\frac{m+3\mu}{2} + \mu + 1\right)! \, m!}{(m + 3\mu)!} \cdot R^{m+3\mu} = \frac{m! \, R^{m+3\mu}}{\left(\frac{m+\mu}{2} + 2\mu + 2\right)\left(\frac{m+\mu}{2} + 2\mu + 3\right) \cdots (m + 3\mu)}$$

mit wachsendem μ unter alle Grenzen, wie gross auch m und R sein

mögen. Ist nun $B_3 \neq 0$, so setze ich $\frac{R}{\sqrt[3]{B_3}} = R_1$, so giebt es eine Zahl A_1, derart, dass

$$C_{m,1} < \varepsilon_\mu \cdot A_1 \cdot R_1^{m+3\mu}, \quad \varepsilon_\mu = \frac{\left(\frac{m+3\mu}{2} + \mu + 1\right)!\, m!}{(m+3\mu)!}.$$

Durch genügend grosse Wahl der Zahl μ kann ich die rechte Seite dieser Ungleichheit kleiner machen als jede, beliebig klein vorgelegte Grösse. Folglich kann die Bedingung für jedes μ nur dann erfüllt sein, wenn $C_{m,1} = 0$. Und dieses müsste für jedes m gelten. Also, ausser wenn unsere Gleichung lautet:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_0(y) \cdot z + f_1(y) \frac{\partial z}{\partial y} + f_2(y) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

wo das Integral unter allen Umständen $z = 0$ ist, muss die oben gemachte Voraussetzung $B_3 \neq 0$ falsch sein, es muss sein: $B_3 = 0$.

Unter Berücksichtigung von 17. erhalte ich also als zweite nothwendige Bedingung: $f_0(y)$ muss eine ganze Function, höchstens vom zweiten Grade sein.

$$f_0(y) = B_0 + B_1 y + B_2 y^2.$$

Aber ebenso ergiebt sich noch eine dritte Bedingung (indem ich statt $\frac{c_2}{2}$: C_2 setze):

$$A_1^{(m+1)} = \cdots + (m+1) \cdot m \cdot C_2 \cdot C_{m1} + \cdots < 2 \cdot C_{m+1,2},$$

$$A_2^{(m+2)} = \cdots + (m+2) \cdot (m+1) \cdot C_2 \cdot C_{m+1,2} + \cdots < 3 \cdot C_{m+2,3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_\mu^{(m+\mu)} = \cdots + (m+\mu)(m+\mu-1) \cdot C_2 \cdot C_{m+\mu-1,\mu} + \cdots < (\mu+1) \cdot C_{m+\mu,\mu+1}$$

$$\frac{(m+\mu)!}{m!} \cdot \frac{(m+\mu-1)!}{(m-1)!} \cdot C_2^\mu \cdot C_{m,1} < (\mu+1)!\ C_{m+\mu,\mu+1}$$

Ich wähle wieder μ so, dass $m + \mu$ gerade.

$$C_{m+\mu,\mu+1} < \frac{\left(\frac{m+\mu}{2} + \mu\right)!}{(\mu+1)!} \cdot A \cdot R^{m+\mu},$$

$$C_2^\mu \cdot C_{m,1} < \frac{\left(\frac{m+\mu}{2} + \mu\right)!\, m!\, (m-1)!}{(m+\mu)!\, (m+\mu-1)!} \cdot A \cdot R^{m+\mu}.$$

Setze ich unter der Voraussetzung, dass $C_2 \neq 0$, $\frac{R}{C_2} = R_1$, so giebt es eine Zahl A_1, dass

$$C_{m1} < \frac{\left(\frac{m+\mu}{2} + \mu\right)!\, m!\, (m-1)!}{(m+\mu)!\, (m+\mu-1)!} A_1 \cdot R_1^{m+\mu} = \mathsf{E}_\mu.$$

Bilde ich den Quotienten:

$$\frac{\mathsf{E}_{\mu+2}}{\mathsf{E}_{\mu}} = \frac{\left(\frac{m+\mu}{2}+\mu+3\right)\left(\frac{m+\mu}{2}+\mu+2\right)\cdot\left(\frac{m+\mu}{2}+\mu+1\right)}{(m+\mu+2)(m+\mu+1)^2\cdot(m+\mu)} \cdot R_1^{\,2},$$

so ist leicht ersichtlich, dass derselbe mit wachsendem μ unter alle Grenzen sinkt, was auch R_1 und m seien. Daraus folgt, dass auch $\lim_{\mu=\infty}(\mathsf{E}_\mu) = 0$, und unter Anwendung desselben Schlussverfahrens wie oben:

$$C_2 = 0.$$

Es muss $f_1(y)$ eine ganze, lineare Function sein. $f_1(y) = C_0 + C_1 y$.

Somit habe ich in unserm Falle 1. die nothwendigen Bedingungen:

1. $f_2(y) = D$, eine Constante.

2. $f_1(y) = C_0 + C_1 y$, linear.

3. $f_0(y) = B_0 + B_1 y + B_2 y^2$, ganz, vom zweiten Grade.

4. $f(y)$ eine ganze, transcendente Function, deren Coefficienten kleiner oder gleich denen einer Reihe: $A \, . \, (e^{\varrho^2 y^2} + \varrho\, y \, . \, e^{\varrho^2 y^2})$ sind.

Diese Bedingungen reichen auch hin. Es sei nämlich:

$$f(y) = a\left(1 + Ry + \frac{1!}{2!}\cdot R^2 y^2 + \frac{1!}{3!} R^3 y^3 + \cdots\right).$$

$$f_0(y) = b\,(1 + y + y^2),\; f_1(y) = c\,(1+y),\; f_2(y) = d.$$

Die C_{m1} bestimme ich $= a_m$, also:

$$C_{2\nu,1} = \nu!\;\, a \, . \, R^{2\nu},\;\; C_{2\nu+1,1} = \nu!\;\, a \, . \, R^{2\nu+1},$$

so wird (s. S. 198):

$$A_1^{(2\nu)} = a\cdot b\cdot(\nu!R^{2\nu} + 2\nu\cdot(\nu-1)!R^{2\nu-1} + 2\nu\cdot(2\nu-1)\cdot(\nu-1)!\,R^{2\nu-2}) +$$
$$+ a\cdot c\cdot(\nu!\,R^{2\nu+1} + 2\nu\cdot\nu!\,R^{2\nu}) + a\cdot d\cdot(\nu+1)!\,R^{2\nu+2}$$
$$< (\nu+1)!\,a\cdot R^{2\nu}\cdot\varrho',\;\; \varrho' = \frac{b}{R^2}\cdot(R^2 + 2R + 4) + c\cdot(R+2) + d\cdot R^2$$

$$A_1^{(2\nu+1)} = a\cdot b\cdot(\nu!R^{2\nu+1} + (2\nu+1)\cdot\nu!R^{2\nu} + (2\nu+1)\cdot 2\nu\cdot(\nu-1)!\,R^{2\nu-1}) +$$
$$+ a\cdot c\cdot[(\nu+1)!\,R^{2\nu+2} + 2\nu+1)\cdot\nu!\,R^{2\nu+1}] + a\cdot d\cdot(\nu+1)!\,R^{2\nu+3}$$
$$< (\nu+1)!\,a\cdot R^{2\nu+1}\cdot\varrho',\;\; \varrho' = \frac{b}{R^2}\cdot(R^2 + 2R + 4) + c\cdot(R+2) + d\cdot R^2.$$

Setze ich nun:

$$C_{2\nu,2} = \frac{(\nu+1)!}{2}\cdot a\cdot R^{2\nu}\cdot\varrho';\;\; C_{2\nu+1} = \frac{(\nu+1)!}{2}\, a\cdot R^{2\nu+1}\cdot\varrho',$$

so ist $A_1^{(m)} < 2\,C_{m,2}$. Ich berechne nun $A_2^{(m)}$ und erhalte natürlich:

$$A_2^{(2\nu)} < \frac{(\nu+2)!}{2}\cdot a\cdot R^{2\nu}\cdot\varrho'^{\,2};\;\; A_2^{(2\nu+1)} < \frac{(\nu+2)!}{2}\cdot a\cdot R^{2\nu+1}\cdot\varrho'^{\,2}.$$

Ich setze also:

$$C_{2\nu,3} = \frac{(\nu+2)!}{3!} \cdot a \cdot R^{2\nu} \cdot \varrho'^2, \quad C_{2\nu+1,3} = \frac{(\nu+2)!}{3!} \cdot a \cdot R^{2\nu+1} \cdot \varrho'^2,$$

so dass $A_2^{(m)} < 3 C_{m,3}$. Nun berechne ich ebenso $A_3^{(m)}$ und ein $C_{m,4}$ und so fort; es wäre:

$$C_{2\nu,\mu} = \frac{(\nu+\mu-1)!}{\mu!} \cdot a \cdot R^{2\nu} \cdot \varrho'^{\mu+1}, \quad C_{2\nu+1,\mu} = \frac{(\nu+\mu-1)!}{\mu!} \cdot a \cdot R^{2\nu+1} \cdot \varrho'^{\mu+1}.$$

Aber die Reihe:

$$a \cdot R^{2\nu} \cdot \nu! \left(x + \frac{\nu+1}{1\cdot 2} \cdot x^2 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot x^3 + \cdots + \frac{(\nu+\mu-1)\cdots(\nu+1)}{\mu!} x^\mu + \cdots \right)$$

ist convergent (Radius 1), also existiren Integrale.

23. Zweiter Fall. Der Coefficient von $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ist eine lineare Function von y:

$$D_0 + D_1 y.$$

$$A_1^{(m-1)} = \cdots + (m-1) \cdot D_1 \cdot C_{m,1} + \cdots < 2 C_{m-1,2},$$

$$A_2^{(m-2)} = \cdots + (m-2) \cdot D_1 \cdot C_{m-1,2} + \cdots < 3 C_{m-2,3},$$

. . . .

$$A_{m-1}^{(1)} = \cdots + D_1 \cdot C_{2,m-1} + \cdots < m \cdot C_{1,m}$$

$$(m-1)!\; D_1^{m-1}\, C_{m1} < m!\; C_{1,m} < m!\; A^{(1)} \cdot r^m \quad \text{(Nr. 15.)}$$

$R > r$, $A > A^{(1)}$:

$$C_{m,1} < A \cdot R^m.$$

Die erste Bedingung ist also folgende: Die Coefficienten der Reihe $f(y)$ müssen sämmtlich kleiner sein, als die einer Reihe $A \cdot e^{Ry}$.

Mit Hilfe desselben Schlussverfahrens erhalte ich die weiteren Ungleichungen:

$$C_{m,\mu} < \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+\mu-1)}{\mu!} \cdot A \cdot R^{m+\mu-1}.$$

Dazu kommen aber folgende Bedingungen:

$$A_1^{(m+2)} = \cdots + (m+2)(m+1) \cdot B_2 \cdot C_{m,1} + \cdots < 2 \cdot C_{m+2,2} \left(B_2 = \frac{b_2}{2!} \right),$$

$$A_2^{(m+4)} = \cdots + (m+4)(m+3) \cdot B_2\, C_{m+2,1} + \cdots < 3 \cdot C_{m+4,3},$$

. . . .

$$A_\mu^{(m+2\mu)} = \cdots + (m+2\mu)(m+2\mu-1) \cdot B_2\, C_{m+2(\mu-1),\mu} + \cdots < (\mu+1)\, C_{m+2\mu,\mu+1}$$

$$\frac{(m+2\mu)!}{m!}\, B_2^\mu \cdot C_{m\;1} < (\mu+1)!\; C_{m+2\mu,\mu+1}$$

$$< \frac{(m+\mu)!}{m!} \cdot A \cdot R^{m+3\mu}.$$

Da nun $\frac{(m+\mu)!}{(m+2\mu)!} \cdot R^{m+3\mu}$ mit wachsendem μ für jedes m und für jedes R unter alle Grenzen sinkt, so gilt derselbe Schluss, der schon mehrmals angewandt wurde: Soll nicht sein $f(y) = 0$, so muss $B_2 = 0$ sein, d. h. $f_0(y) = B_0 + B_1 y$, eine lineare Function.

Aber ebenso wie in Fall 1. muss natürlich auch $f_1(y)$ linear sein. Ich erhalte also für Fall 2. die folgenden nothwendigen Bedingungen:

1. $f_2(y) = D_0 + D_1 y$, linear.
2. $f_1(y) = C_0 + C_1 y$, linear.
3. $f_0(y) = B_0 + B_1 y$, linear.
4. $f(y)$ eine ganze, transcendente Function, deren Coefficienten nicht grösser sind, als die einer Reihe $A \cdot e^{Ry}$.

Diese Bedingungen reichen auch hin.

Sei nämlich:
$$f(y) = a \,.\left(1 + Ry + \frac{R^2 y^2}{2!} + \cdots\right)$$
$$f_0(y) = b\,(1+y),\ f_1(y) = c\,.\,(1+y),\ f_2(y) = d\,(1+y),$$
so ist:
$$A_1^{(m)} = a \cdot b \cdot (R^m + m \cdot R^{m-1}) + a \cdot c\,(R^{m+1} + m \cdot R^m) + a \cdot d \cdot (R^{m+2} + m R^{m+1})$$
$$< m \cdot a \cdot R^m \cdot \varrho',\quad \varrho' = (b + c \cdot R + d R^2) \cdot \left(1 + \frac{1}{R}\right).$$

Ich setze nun:
$$C_{m,2} = \frac{m}{2} \cdot a \cdot R^m \cdot \varrho', \text{ so ist } A_1^{(m)} < 2\, C_{m,2}$$
und:
$$A_2^{(m)} =$$
$$\left\{a \cdot b \cdot \left(m R^m + m(m-1) \cdot R^{m-1}\right) + a\,.\,c\left((m+1) R^{m+1} + m^2 \cdot R^m\right) + a d .\left((m+2) R^{m+2} + m(m+1) R^{m+1}\right)\right\}$$
$$< \frac{m\,.\,(m+2)}{2} \cdot a \cdot R^m \cdot \varrho'^2,\quad \varrho' = (b + cR + dR^2)\left(1 + \frac{1}{R}\right).$$
$$C_{m,3} = \frac{m \cdot (m+2)}{3!} \cdot a \cdot R^m \cdot \varrho'^2,\ A_2^{(m)} < 3 \cdot C_{m,3}.$$
$$A_3^{(m)} < \frac{m \cdot (m+2)\,.\,(m+4)}{3!} a \cdot R^m \cdot \varrho'^3,\ C_{m,4} = \frac{m(m+2)(m+4)}{4!} a \cdot R^m \cdot \varrho'^3.$$

Fahre ich auf diese Weise fort, so erhalte ich allgemein:
$$C_{m,\mu} = \frac{m \cdot (m+2) \cdots (m + 2\,[\mu - 2])}{\mu!} \cdot a \cdot R^m \cdot \varrho'^{\mu-1}.$$
Aber die Reihe:
$$C_{m,1} \cdot x + C_{m,2} x^2 + \cdots + C_{m,\mu} \cdot x^\mu + \cdots$$
ist gewiss convergent $\left(\text{Radius } \frac{1}{2\varrho'}\right)$, also existiren für das System Integrale.

24. Dritter Fall. Der Coefficient von $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ist vom zweiten Grade:

$$f_2(y) = D_0 + D_1 y + D_2 \cdot y^2.$$

Wie im Fall 2 bewiesen, muss sein (s. S. 202):

$$C_{m,\mu} < \frac{(m+\mu-1)\cdots(m+1)}{\mu!} \cdot A \cdot R^{m+\mu-1} < \binom{m+\mu-1}{\mu} \cdot A \cdot R^{m+\mu-1}.$$

Nun ist aber $2^\nu = (1+1)^\nu = \sum_0^\nu {}_\mu \binom{\nu}{\mu}$, also $\binom{\nu}{\mu} < 2^\nu$. Ist R eine fest vorgelegte Grösse, so existirt also gewiss eine Grösse R_1, die der Bedingung genügt: $R_1^{\,\nu} \geqq \binom{\nu}{\mu} \cdot R^\nu$, was auch ν und μ sein mögen. Also muss es eine Zahl R_1 geben, dass allgemein:

$$C_{m,\mu} < A \cdot R_1^{\,m+\mu-1}.$$

Ich beachte nun folgende Ungleichungen:

$$A_\nu^{(m)} = \cdots + m\cdot(m-1)\cdot D_2 \cdot C_{m,\nu} + \cdots < (\nu+1)\cdot C_{m,\nu+1},$$
$$A_{\nu+1}^{(m)} = \cdots + m\cdot(m-1)\cdot D_2 \cdot C_{m,\nu+1} + \cdots < (\nu+2)\cdot C_{m,\nu+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{\nu+\mu-1}^{(m)} = \cdots + m\cdot(m-1)\cdot D_2 \cdot C_{m,\mu+\nu-1} + \cdots < (\nu+\mu)\cdot C_{m,\nu+\mu}$$

$$\begin{aligned} m^\mu\cdot(m-1)^\mu\cdot D_2^{\,\mu}\cdot C_{m,\nu} &< \frac{(\mu+\nu)!}{\nu!}\cdot C_{m,\mu+\nu} \\ &< \binom{\mu+\nu}{\mu}\cdot \mu!\, A\cdot R_1^{\,m+\mu+\nu-1} \\ &< \mu^\mu \cdot A \cdot R_2^{\,m+\mu+\nu-1} \end{aligned}$$

$$C_{m,\nu} < \left(\frac{\mu}{m\cdot(m-1)}\cdot\frac{R_2}{D_2}\right)^\mu \cdot A \cdot R_2^{\,m+\nu-1}$$

Seien nun $\varepsilon < \varepsilon'$ zwei echte Brüche, so ist klar, dass von einem bestimmten m an sich immer μ so angeben lässt, dass:

$$\varepsilon < \frac{\mu}{m\cdot(m-1)}\cdot\frac{R_2}{D_2} < \varepsilon', \quad \mu > \frac{\varepsilon\cdot D_2}{R_2}\cdot m\cdot(m-1).$$

Dann ist gewiss stets:

$$\left(\frac{\mu}{m\,.\,(m-1)}\cdot\frac{R_2}{D_2}\right)^\mu < \varepsilon'^{\frac{\varepsilon\,.\,D_2}{R_2}\cdot m\,.\,(m-1)} < \left(\frac{1}{\mathfrak{R}}\right)^{m\,(m-1)}, \ \mathfrak{R} > 1$$

$$C_{m,\nu} < \frac{A_1}{\mathfrak{R}^{m^2}}\cdot(R_2\,.\,\mathfrak{R})^m\,.\,R_2^{\,\nu-1} < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}_1^{\,m^2}}\cdot R_2^{\,\nu-1}.$$

Es ist klar, dass sich solche Zahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{R}_1$ bestimmen lassen müssen. Mit anderen Zeichen geschrieben, ergiebt sich also als erste Bedingung:

$$C_{m,\nu} < \frac{A}{R^{m^2}} \cdot \varrho^{\nu-1}; \quad R,\ \varrho > 1.$$

Also:

$$a_m < C_{m,1} < \frac{A}{R^{m^2}},$$

d. h. die Coefficienten von $f(y)$ müssen kleiner sein, als die einer Reihe:

$$A \cdot \left(1 + \frac{y}{R} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{y^2}{R^4} + \cdots + \frac{1}{m!} \cdot \frac{y^m}{R^{m^2}} + \cdots\right),$$

wofür man auch sagen kann: kleiner als die einer Reihe:

$$A_1 \cdot \left(1 + \frac{y}{R_1} + \frac{y^2}{R_1^{\,4}} + \cdots + \frac{y^m}{R_1^{\,m^2}} + \cdots\right).$$

Es müssen aber ferner folgende Ungleichungen bestehen:

$$A_1^{(m+1)} < \cdots + (m+1) \cdot B_1 \cdot C_{m,1} + \cdots < 2\, C_{m+1,2},$$

$$A_2^{(m+2)} < \cdots + (m+2) \cdot B_1 \cdot C_{m+1,2} + \cdots < 3 \cdot C_{m+2,3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_\mu^{(m+\mu)} < \cdots + (m+\mu) \cdot B_1 \cdot C_{m+\mu-1,\mu} + \cdots < (\mu+1) \cdot C_{m+\mu,\mu+1}$$

$$\frac{(m+\mu)!}{m!} \cdot B_1^{\,\mu} \cdot C_{m,1} < (\mu+1)!\ C_{m+\mu,\mu+1} < \frac{(\mu+1)!\, A}{R^{(m+\mu)^2}} \cdot \varrho^\mu$$

$$B_1^{\,\mu} \cdot C_{m,1} < \frac{A}{R^{(m+\mu)^2}} \cdot \varrho^\mu.$$

Aber $\frac{A}{R^{(m+\mu)^2}} \cdot \varrho^\mu$ sinkt mit wachsendem μ unter alle Grenzen, was auch ϱ sein mag, da $R > 1$. Es gilt also das wiederholt gemachte Schlussverfahren: Soll $f(y) \neq 0$ sein, so muss $B_1 = 0$, $f_0(y) = B_0$ eine Constante sein.

Ebenso wie in den früheren Fällen muss $f_1(y)$ linear sein.

Wir erhalten also für Fall 3 folgende Bedingungen:

1. $f_2(y) = D_0 + D_1 y + D_2 y^2$, vom zweiten Grade.
2. $f_1(y) = C_0 + C_1 y$, linear.
3. $f_0(y) = B_0$, eine Constante.
4. $f(y)$ eine ganze Transcendente, mit Coefficienten, kleiner als die einer Reihe

$$A \cdot \left(1 + \frac{y}{R} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{y^2}{R^4} + \cdots + \frac{1}{m!} \cdot \frac{y^m}{R^{m^2}} + \cdots\right), \quad R > 1$$

oder auch:

$$A_1\left(1 + \frac{y}{R_1} + \frac{y^2}{R_1^{\,4}} + \cdots + \frac{y^m}{R_1^{\,m^2}} + \cdots\right), \quad R_1 > 1,$$

wass daselbe bedeutet.

Diese Bedingungen reichen auch hin.

Sei nämlich:

$$f(y) = a \cdot \left(1 + \frac{y}{R} + \frac{1}{2!}\frac{y^2}{R^4} + \cdots + \frac{1}{m!}\cdot\frac{y^m}{R^{m^2}} + \cdots\right),$$

$$f_0(y) = b;\ f_1(y) = c \cdot (1+y);\ f_2(y) = d \cdot (1 + y + y^2),$$

so ist allgemein:

$$A_\nu^{(m)} = b \cdot C_{m\nu} + c \cdot (C_{m+1,\nu} + m \cdot C_{m,\nu}) + d \cdot (C_{m+2,\nu} + m \cdot C_{m+1,\nu} + m \cdot (m+1)\, C_{m,\nu}).$$

Es ist klar, dass man eine Grösse ϱ bestimmen kann, derart, dass für jedes m

$$A_\nu^{(m)} < \varrho \cdot (C_{m+2,\nu} + [m+1] \cdot C_{m+1,\nu} + m^2.\ C_{m,\nu}).$$

Setze ich nun

$$C_{m,1} = a_m = \frac{a}{R^{m^2}},$$

so ist:

$$A_1^{(m)} < \varrho \cdot a \cdot \left(\frac{1}{R^{(m+2^2)}} + \frac{m+1}{R^{(m+1)^2}} + \frac{m^2}{R^{m^2}}\right) = 2\, C_{m,2},$$

$$2\,A_2^{(m)} < \varrho^2 \cdot a \cdot \left\{\frac{1}{R^{(m+4)^2}} + \frac{m+3}{R^{(m+3)^2}} + \frac{(m+2)^2}{R^{(m+2)^2}}\right.$$

$$+ \frac{m+1}{R^{(m+3)^2}} + \frac{(m+1)(m+2)}{R^{(m+2)^2}} + \frac{(m+1)^3}{R^{(m+1)^2}}$$

$$\left. + \frac{m^2}{R^{(m+2)^2}} + \frac{m^2(m+1)}{R^{(m+1)^2}} + \frac{m^4}{R^{m^2}}\right\}$$

$$< 3\,\varrho^2 \cdot a \cdot \left(\frac{1}{R^{(m+4)^2}} + \frac{m+3}{R^{(m+3)^2}} + \frac{(m+2)^2}{R^{(m+2^2)}} + \frac{(m+1)^3}{R^{(m+1)^2}} + \frac{m^4}{R^{m^2}}\right) = 2 \cdot 3 \cdot C_{m,3}.$$

Allgemein:

$$\nu!\ C_{m,\nu} = a \cdot 3^{\nu-2} \cdot \varrho^{\nu-1} \cdot \left(\frac{1}{R^{(m+2[\nu-1])^2}} + \frac{m+2\nu-3}{R^{(m+2\nu-3)^2}} + \cdots + \frac{m^{2(\nu-1)}}{R^{m^2}}\right)$$

gesetzt, giebt für:

$$\nu!\ A_\nu^{(m)} < a \cdot 3^{\nu-2} \cdot \varrho^\nu \cdot \left\{\frac{1}{R^{(m+2\nu)^2}} + \frac{m+2\nu-1}{R^{(m+2\nu-1)^2}} + \cdots + \frac{(m+2)^{2(\nu-1)}}{R^{(m+2)^2}}\right.$$

$$+ \frac{m+1}{R^{(m+2\nu-1)^2}} + \frac{(m+1)(m+2\nu-2)}{R^{(m+2\nu-2)^2}} + \cdots + \frac{(m+1)^{2\nu-1}}{R^{(m+1)^2}}$$

$$\left. + \frac{m^2}{R^{(m+2\nu-2)^2}} + \frac{m^2(m+2\nu-3)}{R^{(m+2\nu-3)^2}} + \cdots + \frac{m^{2\nu}}{R^{m^2}}\right\}$$

$$< a \cdot 3^{\nu-1} \cdot \varrho^\nu \cdot \left(\frac{1}{R^{(m+2\nu)^2}} + \frac{m+2\nu-1}{R^{(m+2\nu-1)^2}} + \frac{(m+2\nu-2)^2}{R^{(m+2\nu-2)^2}} + \cdots + \frac{m^{2\nu}}{R^{m^2}}\right).$$

$$= (\nu+1)!\ C_{m,\nu+1}$$

Also ist die Bedingung: $A_\nu^{(m)} < (\nu+1)!\ C_{m,\nu+1}$ erfüllt.

Andererseits ist die Reihe:

$$C_{m,1}\,x + C_{m,2}\,x^2 + \cdots$$

convergent.

Setze ich nämlich $\varepsilon = \frac{1}{e \cdot lg R}$, so ist: $\frac{1}{R^{m^2}} \leq \left(\frac{\mu}{m^2} \cdot \varepsilon\right)^\mu$, was auch μ und m sein mögen. Bestimme ich nämlich die Stelle des Minimalwerthes der Function von μ: $\left(\frac{\mu}{m^2} \cdot \varepsilon\right)^\mu$, welche für die Function $\mu \cdot lg\left(\frac{\mu}{m^2}\varepsilon\right)$ dieselbe ist, indem ich setze:

$$\frac{d}{d\mu}\left[\mu \cdot lg \frac{\mu}{m^2}\varepsilon\right] = 0,$$

$$lg \frac{\mu}{m^2} \cdot \varepsilon + 1 = 0,$$

so erhalte ich:

$$\frac{\mu}{m^2} \cdot \varepsilon = e^{-1}, \quad \mu = \frac{m^2}{\varepsilon \cdot e} = m^2 \cdot lg R.$$

Der Minimalwerth selbst ist also:

$$\left(\frac{\mu}{m^2} \cdot \varepsilon\right)^\mu = e^{-m^2 \cdot lg R} = R^{-m^2},$$

das heisst für jedes μ ist:

$$\left(\frac{\mu}{m^2} \cdot \varepsilon\right)^\mu \geq \frac{1}{R^{m^2}}.$$

Ersetze ich nun in dem Ausdrucke für $\nu!\, C_{m\nu}$:

$$\frac{1}{R^{m^2}}, \quad \frac{1}{R^{(m+1)^2}}, \ldots$$

durch die grösseren Werthe:

$$\left(\frac{\nu-1}{m^2} \cdot \varepsilon\right)^{\nu-1}, \quad \left(\frac{\nu-1}{(m+1)^2}\,\varepsilon\right)^{\nu-1}, \ldots$$

so ist sicher:

$$\nu!\, C_{m\nu} < a \cdot 3^{\nu-2} \cdot \varrho^{\nu-1} \cdot (2\nu - 1) \cdot (\nu - 1)^{\nu-1} \cdot \varepsilon^{\nu-1}$$

oder, wenn ich setze $3\varrho\varepsilon = \varrho'$, so ist:

$$C_{m\nu} < a \cdot \frac{(\nu-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \cdot \varrho'^{\,\nu-1}.$$

Aber die Reihe:

$$a \cdot \left(x + \varrho' \cdot x^2 + \frac{2^2}{2!} \cdot \varrho'^2 \cdot x^3 + \cdots + \frac{\nu^\nu}{\nu!} \cdot \varrho'^\nu \cdot x^{\nu+1} + \ldots\right)$$

ist convergent $\left(\text{Radius } \frac{1}{e \cdot \varrho'}\right)$, also erst recht:

$$C_{m1}x + C_{m2}x^2 + \cdots$$

Damit ist die Existenz des Integrals bewiesen.

25. Allgemeiner Fall. Mit den behandelten drei Fällen sind alle Fälle erschöpft, in denen unsere lineare Differentialgleichung in Potenzreihen entwickelbare Integrale hat. Wenn nämlich in $f_2(y)$ noch höhere Potenzen als die zweite vorkommen, so müssen folgende Ungleichungen bestehen:

$$\left(\text{Ich setze } \frac{d_3}{3!} = D_3, \text{ nach Nr. 17 ist } D_3 \neq 0\right)$$

$$A_1^{(m+1)} = \cdots + (m+1)(m+2)(m+3) \cdot D_3 \cdot C_{m,1} + \cdots < 2\, C_{m+1,2},$$

$$A_2^{(m+2)} = \cdots + (m+2)(m+3)(m+4) \cdot D_3 \cdot C_{m+1,2} + \cdots < 3 \cdot C_{m+2,3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_\mu^{(m+\mu)} = \cdots + (m+\mu)(m+\mu+1)(m+\mu+2) \cdot D_3 \cdot C_{m+\mu-1,\mu} + \cdots < (\mu+1) \cdot C_{m+\mu,\mu+1}$$

$$\frac{(m+\mu)!\,(m+\mu+1)!\,(m+\mu+2)!}{m!\,(m+1)!\,(m+2)!} D_3^{\mu} \cdot C_{m1} \qquad < (\mu+1)!\, C_{m+\mu,\mu+1}$$

Nach S. 205 ist aber: $C_{m+\mu,\mu+1} < \frac{A}{R^{(m+\mu)^2}} \cdot \varrho^{\mu}$.

Man sieht unmittelbar, dass man μ immer so angeben kann, dass $C_{m,1}$ unter einer beliebig klein angegebenen Zahl liegen muss. Wie schon öfters geschlossen würde, folgt auch hier: Soll nicht $f(y) = 0$ sein, so muss $D_3 = 0$, $f_2(y)$ also höchstens vom zweiten Grade sein.

26. Mit Rücksicht auf Nr. 7 und 16 erhalten wir demnach folgendes Resultat: Eine Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y) + F_0(x, y) \cdot z + F_1(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + F_2(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ist für den Anfangswerth $(z)_{x=0} = 0$, wenn alle Coefficienten positiv sind, dann und nur dann durch eine Potenzreihe integrirbar, wenn sämmtliche Coefficienten der Gleichung gleich oder kleiner sind als die einer Gleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \left(f(y) + f_0(y) \cdot \zeta + f_1(y) \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} + f_2(y) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) \cdot \varphi(x),$$

wo φ eine convergente Potenzreihe bedeutet, f, f_0, f_1, f_2 entweder den unter Fall 1, oder den unter Fall 2, oder den unter Fall 3 angegebenen Bedingungen genügen.

b) Die allgemeine Gleichung.

27. Ich schreibe die Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

folgendermassen:

$$1)\ \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, y) + \varphi_0(x, y, z) \cdot z + \varphi_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \varphi_2\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

φ, φ_0, φ_1, φ_2 sind Potenzreihen in den angegebenen Variabeln mit positiven Coefficienten.

Angenommen nun, die Gleichung habe eine Potenzreihe als Integral, so müssen zunächst die sämmtlichen Coefficienten derselben positiv sein, also, wenn ich die Werthe für z, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in φ_0, φ_1, φ_2 einsetze, müssen in der resultirenden Gleichung:

$$2)\quad \frac{\partial z}{dx} = \psi(x, y) + \psi_0(x, y) \cdot z + \psi_1(x, y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \psi_2(x, y) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ψ_0, ψ_1, ψ_2 mindestens ebenso hohe Potenzen von y enthalten, als $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Nun muss sich aber für 2. offenbar genau dasselbe Integral ergeben, als für 1. Also muss 2. den aufgestellten Bedingungen genügen, in ψ_0, ψ_1, ψ_2 darf höchstens die zweite Potenz von y stehen, z darf höchstens vom vierten Grade in y sein. Bei Berechnung der Potenzreihen müssen sich also als identisch Null ergeben:

$$\frac{\partial^5 z}{\partial y^5}, \frac{\partial^6 z}{\partial y^6}, \ldots$$

Ich differenzire nun Gleichung 1 viermal partiell nach y, setze:

$$z = z_0, \frac{\partial z}{\partial y} = z_1, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_2, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = z_3, \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = z_4, \frac{\partial^5 z}{\partial y^5} = \cdots = 0,$$

so erhalte ich ein endliches System von Differentialgleichungen:

$$\frac{dz_0}{dx} = F_0(x, z_0, z_1, z_2),$$

$$\frac{dz_1}{dx} = F_1(x, z_0, z_1, z_2, z_3),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{dz_4}{dx} = F_4(x, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4),$$

wo y als Parameter in den Coefficienten vorkommt. Dies System ist natürlich integrirbar und $z = z_0$ ist zugleich Integral der Gleichung 1.

Sieht man aber von diesen (übrigens leicht zu discutirenden) Fällen ab, so kann man sagen: $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ lässt sich nur dann integriren, wenn $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ rechts nur in erster Potenz vorkommen.

28. Die gewonnenen Resultate lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen:

Sei $\frac{\partial z}{\partial x} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ eine Gleichung, deren rechte Seite, um die Anfangswerthe:

$$x = x_0, \; y = y_0, \; z = (z)_{x = x_0} = z_0(y), \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial y}, \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}$$

$$[z_0(y) = a + b(y - y_0) + c \cdot (y - y_0)^2 + \cdots]$$

entwickelt, eine Taylor'sche Reihe mit lauter positiven Coefficienten liefert, so hat sie dann und nur dann eine Potenzreihe

als Integral, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind (wobei der Kürze halber gesetzt werde: $x - x_0 = \bar{x}$, $y - y_0 = \bar{y}$, $z - z_0 = \bar{z}$)

1. Die rechte Seite muss in $\bar{z}$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}}$, $\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{y}^2}$ linear sein. Die Gleichung muss also lauten:

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = f(\bar{x}, \bar{y}) + f_0(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \bar{z} + f_1(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} + f_2(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{y}^2}.$$

2. In f_1 darf nur die erste Potenz von $\bar{y}$ vorkommen, in f_2 und f_0 höchstens die zweite und zwar:

a) wenn f_2 von $\bar{y}$ unabhängig, in f_0 höchstens die zweite,

b) wenn f_2 in $\bar{y}$ linear, in f_0 höchstens die erste,

c) wenn f_2 in $\bar{y}$ vom 2ten Grade, muss f_0 von $\bar{y}$ unabhängig sein.

In x hingegen sind f_0, f_1, f_2 beliebige Potenzreihen.

3. Für f gilt in den sub 2 unterschiedenen drei Fällen:

a) alle Coefficienten kleiner als die einer Reihe:

$$\left(e^{\varrho^2 \cdot \bar{y}^2} + \varrho \cdot \bar{y} \cdot e^{\varrho^2 \bar{y}^2}\right) \cdot \varphi(\bar{x}),$$

b) als die einer Reihe: $e^{\varrho \bar{y}} \cdot \varphi(\bar{x})$,

c) als die einer Reihe:

$$\left(1 + \frac{\bar{y}}{\varrho} + \frac{\bar{y}^2}{\varrho^4} + \frac{\bar{y}^3}{\varrho^9} + \cdot \quad \cdot + \frac{\bar{y}^n}{\varrho^{n^2}} + \cdot \cdot \cdot\right) \varphi(\bar{x}); \ \varrho > 1.$$

$\varphi(\bar{x})$ bedeutet eine beliebige Potenzreihe.

29. Anmerkung. Das Integral $\bar{z}$ der Gleichung erfüllt dieselbe Bedingung, welche für $f(\bar{x}, \bar{y})$ unter 3. angegeben ist.

Zerlegt man nämlich f_0, f_1, f_2 beliebig in zwei Theile $f_0 = \varphi_0 + \chi_0, \dots$ und ersetzt in der ersten Hälfte der rechten Seite der Gleichung:

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \left[f(\bar{x}, y) + \varphi_0 \cdot \bar{z} + \varphi_1 \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + \varphi_2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{y}^2}\right]$$
$$+ \chi_0 \cdot \bar{z} + \chi_1 \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + \chi_2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{y}^2}$$

$\bar{z}$ durch die berechnete Potenzreihe in $\bar{x}$ und $\bar{y}$, so bekomme ich eine Gleichung:

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}} = \Phi(\bar{x}, \bar{y}) + \chi_0 \bar{z} + \chi_1 \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} + \chi_2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{y}^2},$$

welche genau dasselbe Integral hat, wie die ursprüngliche. Also erfüllt

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = f + \varphi_0 \cdot \bar{z} + \varphi_1 \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} + \varphi_2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{y}^2}$$

die Bedingung 3, folglich auch $\bar{z}$.

Schlussbemerkungen.

30. Nach zwei Richtungen hin ist nun die Untersuchung fortzusetzen:

I. Sind allgemein Bedingungen, wie die in 28. aufgestellten, herzuleiten für jeden Fall, in welchem nicht die höchste Ableitung nach der bevorzugten Variabeln in der Gleichung steht.

II. Ist die Frage, ob und wie die Gleichung integrirt werden kann, wenn jene Bedingungen nicht erfüllt sind, zu beantworten.

Das erstgenannte Problem muss sich mit denselben Hilfsmitteln lösen lassen, die oben im speciellen Fall zur Anwendung kamen.

Das zweite hingegen wird dieselben Schwierigkeiten involviren, wie das entsprechende Problem bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen und den partiellen, in welchen die höchste Ableitung nach der bevorzugten Variabeln steht. Von diesen weiss man, dass das Integral eindeutig bestimmt und in eine Potenzreihe entwickelbar ist, wenn die rechte Seite im Anfangspunkt keine singuläre Stelle hat, das heisst als Potenzreihe um die Anfangswerthe entwickelbar ist. Andernfalls ist es freilich nicht ausgeschlossen, dass die Gleichung in derselben Weise integrirbar ist, aber in sehr vielen Fällen wird es eintreten:

1. dass das Integral nicht mehr um den Anfangspunkt entwickelt werden kann. Gleichwohl wird die Gleichung im Allgemeinen durch eine analytische Function zu befriedigen sein, welche im Anfangspunkte eine Singularität hat.

2. dass das Integral noch eine Willkürlichkeit einschliesst (ein Beispiel bietet die Gleichung $\frac{dz}{dx} = a \cdot \frac{z}{x}$, $a > 0$, welche für den Anfangswerth $(z)_{x=0} = 0$ das Integral $C \, . \, x^a$ hat, C willkürlich).

Unsere Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ hat ein eindeutig als Potenzreihe entwickelbares Integral, wenn die Bedingungen Nr. 28 erfüllt sind. Andernfalls aber lässt sich diese Möglichkeit nicht allgemein leugnen. Beispielsweise lassen sich auch Gleichungen, in deren rechten Seite höhere Potenzen von z, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ stehen, bei geeignet gewählten Anfangswerthen integriren. Um dies einzusehen, braucht man nur einmal y als bevorzugte Variable zu nehmen, ein Integral $\zeta\,(y, x)$ zu suchen und als Anfangswerth für unsere Gleichung $(z)_{x=0}\, \zeta\,(y, 0)$ zu wählen, so ist $\zeta\,(y, x)$ das verlangte Integral. In

andern Fällen freilich, z. B. immer, wenn alle Coefficienten rechts positiv sind, ist diese Entwickelung unmöglich. Alsdann aber giebt es, wenigstens wenn die rechte Seite sich im Anfangspunkt nicht singulär verhält, überhaupt keine Function von complexen Variabeln, welche der Gleichung und den Anfangsbedingungen genügt. Da sich nämlich aus der rechten Seite durch fortgesetztes Differenziren nach x alle Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \ldots$$

im Anfangspunkte als endliche Grössen ergeben, so kann z dort weder eine Discontinuität, noch einen Verzweigungspunkt haben (y betrachte ich als Parameter). z wäre um den Anfangspunkt herum eindeutig und endlich, also als Function einer complexen Variabeln in eine Potenzreihe entwickelbar, was der Voraussetzung widerspricht. Man muss also in diesem Fall z als Function reeller Variabeln auffassen, wenigstens im Anfangspunkte. z könnte sehr wohl eine Function complexer Variabeln sein, welche im Anfangspunkte eine wesentliche Discontinuität hat, von der Art das z mit allen seinen Ableitungen beim Fortschreiten auf der reellen Achse der x endlich bleibt. Beispiele solcher Functionen hat Dubois-Reymond gebracht. (Math. Annalen 1883. XXI. S. 109 ff.)

Bei dieser Auffassung würde auch analog den gewöhnlichen Differentialgleichungen eintreten können, dass das Integral noch Willkürlichkeiten enthielt. Hätte z. B. die Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2} \cdot (1 + y + y^2 + \cdots) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdots a)$$

(welche den Bedingungen 28 nicht genügt), für den Anfangswerth $(z)_{x=0} = f(y)$ ein Integral $z\,(x, y)$ (im allgemeinen mit wesentlicher Discontinuität im Anfangspunkt), so würde ebensogut die Function:

$$\zeta = z\,(x, y) + C \cdot e^{-\frac{1-y}{x^2}} \quad (C \text{ ganz willkürlich})$$

der Gleichung und den Anfangsbedingungen genügen. Wie die einfache Rechnung zeigt, besteht nämlich zwischen den Differentialquotienten der Function $e^{-\frac{1-y}{x^2}}$ die Beziehung a), also genügt auch $z + C \cdot e^{-\frac{1-y}{x^2}}$ dieser Gleichung. Ausserdem besteht in dem Bereiche $|y| < 1$ (für welchen die Entwickelung der rechten Seite von a) Giltigkeit hat) jedenfalls die Identität:

$$(\zeta)_{x=0} = (z)_{x=0}.$$

Denn als Function der reellen Variabeln x aufgefasst ist (jedenfalls, wenn $|y| < 1$) $e^{-\frac{1-y}{x^2}}$ (nebst allen seinen Ableitungen) Null für $x = 0$.

XV.

Construction der Burmester'schen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck.

Erste Mittheilung.

Von

Prof. Dr. R. Müller

in Braunschweig.

Hierzu Tafel VII, Figur 1—4.

Bei der Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene giebt es in jeder Systemlage vier Punkte, die augenblicklich Bahnelemente mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreise beschreiben; wir haben dieselben als die Burmester'schen Punkte der betrachteten Systemlage bezeichnet.* In dem besonderen Falle, dass die Systembewegung durch ein Gelenkviereck vermittelt wird, sind zwei dieser Punkte von vornherein gegeben, und dann erhalten wir die beiden anderen Punkte durch eine einfache Construction, die wir im Folgenden ableiten wollen:

1. Die fragliche Construction gründet sich auf eine früher mitgetheilte Formel, durch welche im allgemeinen Falle die vier Burmester'schen Punkte einer beliebigen Systemlage bestimmt werden. Angenommen, das System gelange aus der Anfangslage S in vier unendlich benachbarte Lagen durch auf einander folgende Drehungen um die Pole $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ bez. um die Winkel $d\vartheta$, $d\vartheta + d^2\vartheta$, $d\vartheta + 2d^2\vartheta + d^3\vartheta$, $d\vartheta + 3d^2\vartheta + 3d^3\vartheta$; dabei sei $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mathfrak{S}$ und $d\tau$ bez. $d\tau + d^2\tau$ der Contingenzwinkel der Polbahn in den Punkten $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$. Verstehen wir dann unter M_I, M_{II}, M_{III}, M_{IV} die Burmester'schen Punkte der Systemlage S und unter φ, φ_{II}, φ_{III}, φ_{IV} die Winkel, welche die Geraden $\mathfrak{P}M_I$, $\mathfrak{P}M_{II}$ u. s. w. mit der Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ einschliessen, so sind $\tan\varphi_I$, $\tan\varphi_{II}$ u. s. w. die Wurzeln der Gleichung vierten Grades**

$$d^2\vartheta^2 . \tan^4\varphi - d\vartheta\, d^2\vartheta\,(d\vartheta + 2d\tau)\tan^3\varphi + (3d\vartheta\, d^3\vartheta - 4d^2\vartheta^2)\tan^2\varphi$$
$$+ 3d\vartheta\,(d\vartheta\, d^2\tau - d\tau\, d^2\vartheta)\tan\varphi - d\vartheta^2\,(d\vartheta - d\tau)\,(2d\vartheta + d\tau) = 0;$$

es ist also

$$\tan\varphi_I + \tan\varphi_{II} + \tan\varphi_{III} + \tan\varphi_{IV} = \frac{d\vartheta\,(d\vartheta + 2d\tau)}{d^2\vartheta}$$

und

$$\tan\varphi_I . \tan\varphi_{II} . \tan\varphi_{III} . \tan\varphi_{IV} = -\frac{d\vartheta^2\,(d\vartheta - d\tau)\,(2d\vartheta + d\tau)}{d^2\vartheta^2}.$$

* Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen, diese Zeitschrift, Bd. 37, S. 129 flg.

** a. a. O. § 7, Gleichung 40.

Bezeichnen wir ferner mit m und μ die Kreispunktcurven für die directe bez. umgekehrte Bewegung, mit F bez. E die Focalcentren derselben und mit φ_F, φ_{E} die Winkel $F\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, $\mathsf{E}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, so ist*

$$tan\,\varphi_F = \frac{d\vartheta\,(2\,d\vartheta + d\tau)}{d^2\vartheta},$$

$$tan\,\varphi_{\mathsf{E}} = -\frac{d\vartheta\,(d\vartheta - d\tau)}{d^2\vartheta}.$$

Zwischen den sechs Winkeln φ_I, φ_{II}, φ_{III}, φ_{IV}, φ_F, φ_{E} bestehen daher die bemerkenswerthen Gleichungen

$$\text{I.}\quad \begin{cases} tan\,\varphi_I + tan\,\varphi_{II} + tan\,\varphi_{III} + tan\,\varphi_{IV} = tan\,\varphi_F + tan\,\varphi_{\mathsf{E}} \\ tan\,\varphi_I . tan\,\varphi_{II} . tan\,\varphi_{III} . tan\,\varphi_{IV} = tan\,\varphi_F . tan\,\varphi_{\mathsf{E}}. \end{cases}$$

Beschreiben nun zwei Systempunkte A und B Kreise um die Mittel- A bez. B, so kann die Systembewegung ersetzt werden durch die Bewegung der Systemstrecke AB in dem Gelenkviereck $AB\mathsf{B}\mathsf{A}$, und dann fallen zwei der Burmester'schen Punkte, etwa M_{III} und M_{IV}, mit A und B zusammen. Bezeichnen wir mit α und β die bekannten Winkel, welche bez. die Geraden $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}B$ in der Systemlage S mit der Polbahntangente bilden, so sind φ_I und φ_{II} bestimmt durch die Gleichungen

$$\text{II.}\quad \begin{cases} tan\,\varphi_I + tan\,\varphi_{II} = (tan\,\varphi_F + tan\,\varphi_{\mathsf{E}}) - (tan\,\alpha + tan\,\beta) \\ tan\,\varphi_I \;.\; tan\,\varphi_{II} = \dfrac{tan\,\varphi_F . tan\,\varphi_{\mathsf{E}}}{tan\,\alpha . tan\,\beta}. \end{cases}$$

Wir fragen zunächst nach der geometrischen Bedeutung der hierin vorkommenden Ausdrücke von der Form $tan\,\alpha + tan\,\beta$, $tan\,\alpha . tan\,\beta$.

2. Legen wir in Fig. 1 durch den Kreis δ eine Sekante, die denselben in K und L, sowie den Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ in T und die Tangente $\mathfrak{P}N$ in N schneidet, so folgt aus dem Dreiecke $\mathfrak{P}LN$, wenn $\angle K\mathfrak{P}\vartheta = \varkappa$, $\angle L\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \lambda$ gesetzt wird,

$$\angle \mathfrak{P}NL = \varkappa + \lambda,$$

also

$$\mathfrak{P}N = \mathfrak{P}L\,\frac{sin\,(90^\circ - \varkappa)}{sin\,(\varkappa + \lambda)} = \mathfrak{P}\mathfrak{D} . \frac{cos\,\varkappa\; cos\,\lambda}{sin(\varkappa + \lambda)} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{tan\,\varkappa + tan\,\lambda},$$

oder

$$tan\,\varkappa + tan\,\lambda = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}N}.$$

Es ist ferner

$$\mathfrak{P}T = PN\,tan\,(\varkappa + \lambda) = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{tan\,\varkappa + tan\,\lambda}\,tan\,(\varkappa + \lambda) = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{1 - tan\,\varkappa\; tan\,\lambda},$$

folglich

$$tan\,\varkappa\; tan\,\lambda = 1 - \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}T} = \frac{\mathfrak{D}T}{\mathfrak{P}T}.$$

---

* a. a. O. § 6, Gleichungen 36) und 38).

Sollen wir demnach durch den Punkt $\mathfrak{P}$ zwei Geraden $\mathfrak{P}K$ und $\mathfrak{P}L$ ziehen, welche mit $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten eine vorgeschriebene Summe s und ein vorgeschriebenes Product p besitzen, so machen wir auf der Kreistangente in $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{P}N = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{s}$$

und bestimmen auf dem Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ den Punkt T durch das Theilungsverhältniss

$$\frac{\mathfrak{D}T}{\mathfrak{P}T} = p;$$

dann schneidet δ die Gerade NT in K und L.

3. In Fig. 2 ist $AB\mathsf{B}\mathsf{A}$ ein Gelenkviereck mit dem festen Gliede AB. Um für die augenblickliche Lage der mit dem Gliede AB verbundenen Ebene die Burmester'schen Punkte M_I, M_{II} zu bestimmen, construiren wir zunächst in bekannter Weise die Focalcentren F und E der Kreispunktcurven m und μ*: Wir verbinden den Pol $\mathfrak{P}$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{K}$ der Geraden AB und AB, errichten in $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ ein Loth, welches $A\mathsf{A}$ und $B\mathsf{B}$ bez. in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ schneidet, und in diesen Punkten Lothe zu $A\mathsf{A}$ bez. $B\mathsf{B}$; dieselben treffen sich in einem Punkte $\mathfrak{D}$ der Polbahntangente. Wir bestimmen ferner die Schnittpunkte $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ von AB und AB mit einer Parallelen durch $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{K}\mathfrak{A}$, ziehen $\mathfrak{J}\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{J}'\mathfrak{G}'$ parallel zu $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ bis $A\mathsf{A}$ und errichten in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ Lothe zu $A\mathsf{A}$, welche die Polbahnnormale bez. in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ treffen. Fällen wir endlich aus $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{C}'$ die Lothe $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{E}$, so sind F und E bez. die Mittelpunkte der Strecken $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{E}$.

Der Kreis δ über dem Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ ist der gemeinschaftliche Krümmungskreis der beiden Kreispunktcurven in ihrem Doppelpunkte $\mathfrak{P}$; zu demselben Punkte gehört in den Curven m und μ ein zweiter Krümmungskreis mit dem Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ bez. $\mathfrak{P}\mathfrak{C}'$.

Schneiden die Geraden $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Polbahntangente bez. in T und T', die Polbahnnormale in N und N', so ist, wenn φ_F, φ_{E}, α, β, φ_I, φ_{II} dieselbe Bedeutung haben, wie vorhin,

$$tan\,\varphi_F + tan\,\varphi_{\mathsf{E}} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}N}$$

$$tan\,\alpha + tan\,\beta = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}N'}$$

$$tan\,\varphi_F \,.\, tan\,\varphi_{\mathsf{E}} = \frac{\mathfrak{D}T}{\mathfrak{P}T}$$

$$tan\,\alpha \,.\, tan\,\beta = \frac{\mathfrak{D}T'}{\mathfrak{P}T'},$$

also nach II)

$$tan\,\varphi_I + tan\,\varphi_{II} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}N} - \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}N'}$$

$$tan\,\varphi_I \,.\, tan\,\varphi_{II} = \frac{\mathfrak{D}T}{\mathfrak{P}T} : \frac{\mathfrak{D}T'}{\mathfrak{P}T'}.$$

* Vergl. Construction der Krümmungsmittelpunkte der Hüllbahnevoluten bei starren ebenen Systemen, diese Zeitschrift Bd. 36, S. 266.

Wir erhalten demnach die beiden Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{M}_I$, $\mathfrak{P}\mathfrak{M}_{II}$, welche mit $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ bez. die Winkel φ_I, φ_{II} einschliessen, indem wir die Schnittpunkte $\mathfrak{M}_I$, $\mathfrak{M}_{II}$ des Kreises δ mit einer gewissen Sekante $N''T''$ aufsuchen; dabei sind die Punkte N'' und T'' auf $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ bez. $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ bestimmt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{P}N'' = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\tan\varphi_I + \tan\varphi_{II}} = \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{P}N} - \frac{1}{\mathfrak{P}N'}} = \frac{\mathfrak{P}N.\mathfrak{P}N'}{NN'}$$

$$\frac{\mathfrak{D}T''}{\mathfrak{P}T''} = \tan\varphi_I.\tan\varphi_{II} = \frac{\mathfrak{D}T}{\mathfrak{P}T} : \frac{\mathfrak{D}T'}{\mathfrak{P}T'}.$$

Um hiernach N'' und T'' zu ermitteln, ziehen wir $\mathfrak{D}\mathfrak{R}$ parallel zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$, bestimmen die Schnittpunkte $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bez. $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ und legen durch $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{V}$ zwei Parallelen; die erste trifft $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ in N'', die zweite $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ in T''. Dann verhält sich nämlich

$$\mathfrak{P}N'' : \mathfrak{P}N = \mathfrak{V}\mathfrak{W} : \mathfrak{V}N = N'\mathfrak{P} : N'N,$$

also ist in der That

$$\mathfrak{P}N'' = \frac{\mathfrak{P}N.\mathfrak{P}N'}{NN'};$$

bezeichnen wir ferner mit $\mathfrak{S}$ den Schnittpunkt von $\mathfrak{D}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{V}$, mit ∞ den unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{D}\mathfrak{R}$, so ist das Doppelverhältniss

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}TT') = (\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{R}\infty) = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{D}T''}{\mathfrak{P}T''}.$$

Es handelt sich jetzt noch um die Bestimmung des Schnittpunktes M_I der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{M}_I$ mit der Kreispunktcurve m. Schneidet in Fig. 3 die Gerade FM_I die Focalachse f von m in $\mathfrak{Z}$, so ist bekanntlich $\angle\mathfrak{D}\mathfrak{P}f = \varphi_F$ und $M_I\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}\mathfrak{Z}$, also

$$\angle\mathfrak{P}M_I\mathfrak{Z} = \angle M_I\mathfrak{P}\mathfrak{Z} = \varphi_I + \varphi_F,$$

und im Dreieck $\mathfrak{P}M_IF$

$$\angle M_IF\mathfrak{P} = 180^0 - (\varphi_I - \varphi_F) - (\varphi_I + \varphi_F) = 2(90^0 - \varphi_I) = 2.\angle\mathfrak{M}_I\mathfrak{F}\mathfrak{P}.$$

Beschreiben wir daher um F mit dem Radius $F\mathfrak{P}$ einen Kreis, der $\mathfrak{F}\mathfrak{M}_I$ in $\mathfrak{U}_I$ schneidet, so geht FM_I nach $\mathfrak{U}_I$.

In Fig. 2 haben wir die Punkte $\mathfrak{U}_I$, $\mathfrak{U}_{II}$ bestimmt als Fusspunkte der Lothe aus $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{F}\mathfrak{M}_I$, $\mathfrak{F}\mathfrak{M}_{II}$; die Geraden $F\mathfrak{U}_I$, $F\mathfrak{U}_{II}$ treffen $\mathfrak{P}\mathfrak{M}_I$, $\mathfrak{P}\mathfrak{M}_{II}$ bez. in M_I, M_{II}. Es sind ferner zu den Bahncurven der so erhaltenen Burmester'schen Punkte die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte M_I, M_{II} construirt als die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}\mathfrak{M}_I$, $\mathfrak{P}\mathfrak{M}_{II}$ mit der Kreispunktcurve μ: Wir finden z. B. M_I, indem wir von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{E}\mathfrak{M}_I$ ein Loth fällen und den Fusspunkt desselben mit E verbinden.

In Fig. 4 sind die Bahncurven der Punkte M_I und M_{II} dargestellt. Dieselben sind bekanntlich tricirculare Curven sechster Ordnung; die ebenfalls gezeichneten fünfpunktig berührenden Krümmungskreise in M_I und M_{II}

haben also mit der betreffenden Curve jedesmal noch einen sechsten reellen Punkt gemein; in der Figur fällt der Kreisbogen zwischen diesem Schnittpunkte und dem Berührungspunkte nahezu mit der Bahncurve zusammen.

4. Nach II. sind $tan\,\varphi_I$ und $tan\,\varphi_{II}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$tan^2\varphi - (tan\,\varphi_F + tan\,\varphi_{\mathrm{E}} - tan\,\alpha - tan\,\beta)\,tan\,\varphi + \frac{tan\,\varphi_F\,tan\,\varphi_{\mathrm{E}}}{tan\,\alpha\,tan\,\beta} = 0;$$

die Burmester'schen Punkte sind also reell, sobald die Discriminante

$$(tan\,\varphi_F + tan\,\varphi_{\mathrm{E}} - tan\,\alpha - tan\,\beta)^2 - 4\frac{tan\,\varphi_F\,tan\,\varphi_{\mathrm{E}}}{tan\,\alpha\,tan\,\beta} \geqq 0$$

ist. Nun folgt aus Fig. 2

$$tan\,\varphi_F = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}}$$

und

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{A}}{cos\,\alpha} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{G}}{sin\,\alpha} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{J}}{sin\,\alpha\,sin\,\beta},$$

also ist

$$tan\,\varphi_F = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}\mathfrak{J}}\,tan\,\alpha\,tan\,\beta$$

und ebenso

$$tan\,\varphi_{\mathrm{E}} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}\mathfrak{J}'}\,tan\,\alpha\,tan\,\beta,$$

oder, wenn $\angle\,\mathfrak{P}\mathfrak{K}\mathfrak{J}$ mit χ, $\angle\,\mathfrak{P}\mathfrak{K}\mathfrak{J}'$ mit ψ bezeichnet wird,

$$tan\,\varphi_F = \frac{tan\,\alpha\,tan\,\beta}{tan\,\chi}$$

$$tan\,\varphi_{\mathrm{E}} = \frac{tan\,\alpha\,tan\,\beta}{tan\,\psi}.$$

Die obige Realitätsbedingung geht demnach über in

$$\{tan\,\alpha\,tan\,\beta\,(tan\,\psi + tan\,\chi - tan\,\psi\,tan\,\chi\,(tan\,\alpha + tan\,\beta)\}^2$$
$$- 4\,tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\psi\,tan\,\chi \geqq 0;$$

dabei sind α, β, ψ, χ die Winkel, welche bez. die Vierecksseiten $B\mathrm{B}$, $A\mathrm{A}$, AB, AB mit der Diagonale $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ einschliessen.

Braunschweig, den 8. April 1892.

XVI.

Ein Beitrag zur systematischen Behandlung der ebenen Bewegung starrer Systeme.

Von

Prof. Dr. Rodenberg

in Hannover.

Hierzu Tafel VIII, Figur 1—20.

Die ebene Relativbewegung einer Anzahl starrer Systeme ist während eines Zeitelementes in geometrischer Hinsicht durch die Polconfiguration vollkommen charakterisirt, und die Möglichkeit einer eindeutigen Construction dieser Figur zeigt an, dass die Systeme in dem betreffenden Augenblick einen Grad der Bewegungsfreiheit besitzen, d. h. curvenzwangläufig, oder noch kürzer, zwangläufig gegen einander sind. Gewöhnlich wird die Polconfiguration durch eine Anzahl gegebener Pole bestimmt; diese Bestimmungsstücke sind jedoch insofern nicht die allgemeinsten, als ein gegebener Pol schon der Angabe von zwei Constanten entspricht. Einer einzigen gegebenen Constanten hingegen ist die Forderung gleich zu achten, dass der Pol zweier Systeme auf einer Geraden liege, welche dann „Normalstrahl“ des betreffenden Poles genannt wird, weil sie Normale aller Bahnen der auf ihr liegenden Systempunkte des einen Systemes im zweiten ist. Sobald nun die Anzahl der bewegten Systeme grösser als fünf ist, braucht, wie sich zeigen wird, nicht ein einziger Pol direct als Schnittpunkt zweier seiner Normalstrahlen gegeben zu sein.

In § 1 wird die Construction der Polconfiguration aus diesen allgemeinsten linearen Bestimmungsstücken in rein geometrischer Weise, d. h. ohne Benutzung des Begriffes der Geschwindigkeit, durchgeführt. Es stellt sich hierbei heraus, dass eine Gruppe von Normalstrahlen, welche die momentane Bewegung von mehr als 13 Systemen bestimmt, immer eine Gruppe solcher Strahlen enthält, welche diese Bewegung von mindestens 13 jener Systeme bestimmt, so dass die Construction der Polconfiguration dieser Anzahl von Systemen mit den grössten wesentlichen Schwierigkeiten verknüpft ist. Im § 2 werden dann ausser Normalstrahlen noch Pole als gegeben vorausgesetzt, die insbesondere auch noch specielle Lagen, wie es häufig vorkommt, zu einander besitzen, z. B. theilweise geradlinige

Reihen bilden oder, noch specieller, unendlich fern liegen. Während die Schwierigkeit der Construction durch das Auftreten von Polen und die übrigen speciellen Annahmen sich meistens verringert, wächst diejenige der Angabe allgemein giltiger Kennzeichen für die Bestimmtheit der Bewegung wesentlich. Die Aufstellung solcher Kennzeichen bildet daher den hauptsächlichen Inhalt dieses Paragraphen. Gewisse Vorkommnisse machen eine Berücksichtigung des Falles nothwendig, in welchem auf eine Gruppe der betrachteten Systeme mehr Constanten entfallen, als zur Bestimmung der Polconfiguration dieser Systeme nothwendig ist. Eine solche Gruppe kann sich dann momentan nur wie ein einziges starres System verhalten. Enthalten nun die gegebenen Bestimmungsstücke die zur zwangläufigen Bewegung aller Systeme nothwendige Zahl von Constanten, so kann zwischen den übrigen Systemen nur dann Zwangläufigkeit bestehen, wenn auf jene ausgezeichnete Gruppe nur eine überzählige Constante entfällt. Dieser Fall ist deshalb besonders wichtig, weil es im Allgemeinen während der Bewegung eines Getriebes vorkommt, dass sich aus dem angeführten Grunde eine Gliedergruppe momentan wie ein starres System verhalten muss; oder, wie man auch sagen kann, die Relativbewegung dieser Glieder unendlich klein 2ter Ordnung ist, während andere Glieder unter sich oder in Bezug auf jene „todte Gruppe“ unendlich kleine Bewegungen 1ter Ordnung vollziehen. Sofern sich in der todten Gruppe das festgestellte Glied und Angriffsglieder äusserer Kräfte befinden, kann dann durch das Wirken der letztern keine Bewegung eingeleitet werden, oder wenn Bewegung vorhanden ist, diese in dem betreffenden Momente nicht beschleunigt werden. Man sagt daher, dass eine „Todtlage“ des Getriebes vorhanden sei. Für diese wird in § 3 eine rein geometrische Definition gegeben, wie sie vom kinematischen Standpunkt aus gefordert werden muss; ferner werden allgemeine Kennzeichen und Bildungsarten von Todtlagen mitgetheilt. Als Anwendung des Bisherigen werden dann in § 4 Kennzeichen für die Zwangläufigkeit kinematischer Ketten angegeben.*

Alle Resultate sind auf rein projectivem Wege gewonnen worden; die Möglichkeit einer solchen Gewinnung ergiebt sich durch die Erwägung, dass die Polconfiguration ein rein projectives Gebilde ist, dem erst metrische Eigenschaften anhaften, wenn die Winkelgeschwindigkeiten der relativen Drehungen um die einzelnen Pole mit in den Kreis der Betrachtungen hereingezogen werden.

Von § 5 an wird noch die Bewegung während eines zweiten Zeitelementes berücksichtigt. Es zeigt sich, dass aus der Polconfiguration durch Angabe des Tripels, d. h. dreier sich paarweise entsprechender Krüm-

---

* Dieselben Kennzeichen findet, wenigstens der Hauptsache nach, auf Grund metrischer Betrachtungen, Herr Grübler in seiner Arbeit: „Allgemeine Eigenschaften der ebenen kinematischen Ketten.“ Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preussen. Bd. 64, Jahrg. 1885.

mungsmittelpunkte der Bewegung je dreier Systeme, auf jeder der Polgeraden, eine Figur geschaffen werden kann, welche alles Geometrische, also namentlich die bekanntlich zwischen den Krümmungsmittelpunkten bestehenden quadratischen Verwandtschaften, vollständig darstellt. Während § 5 den allgemeinen Theil behandelt, werden in § 6 die besonderen Eigenthümlichkeiten von Todtlagen in Betracht gezogen. Wesentliche Schwierigkeiten bietet die Untersuchung derjenigen, im Allgemeinen vorkommenden Lagen einer kinematischen Kette, in denen etliche Glieder derselben mehr als einen Grad der Bewegungsfreiheit besitzen.* Es giebt dann unendlich viele Polconfigurationen und die Pole erfüllen geometrische Oerter, so zwar, dass durch Annahme eines Poles entweder die ganze oder eine Partialconfiguration bestimmt ist. Aber eine Reihe ausgezeichneter Pole giebt es, um die insbesondere zwei auf einander folgende Bewegungen der beiden zugehörigen Glieder stattfinden können, und um die Bestimmung dieser Pole kann es sich hier nur handeln. Während sich im Allgemeinen die Rollcurven nur in einem Punkte, dem Pole der betreffenden beiden Glieder, berühren, findet im vorliegenden Falle mehrfache Berührung, und zwar in den ausgezeichneten Polen statt. Jeder Systempunkt des einen von solchen zwei Gliedern beschreibt im Systeme des andern eine Curve mit mehrfachem Punkte und die Normalen der verschiedenen Zweige dieses Punktes sind nach den ausgezeichneten Polen gerichtet. Da die Bahnen aller Systempunkte momentan derartig verzweigt sind, bezeichnen wir die Lage der Kette als „Verzweigungslage“ und die Singularität der Bahncurve als „Verzweigungspunkt“. Ein solcher Punkt unterscheidet sich in kinematischer Hinsicht wesentlich von einem gewöhnlichen mehrfachen Punkte, welcher entsteht, wenn der beschreibende Punkt nach Durchlaufen von schleifenförmigen Curvenstücken mehrmals denselben Punkt passirt. Während dann die Bewegung selbst vollkommen bestimmt ist, und von der Singularität aus nur ein bestimmter Zweig jedesmal durchlaufen werden kann, sind in einer Verzweigungslage alle Zweige zugänglich, insbesondere können beim Ueberschreiten dieser Lage die Winkel beschrieben werden, welche zwei beliebige Tangenten der Singularität mit einander bilden. Bekanntlich kann das Auftreten einer Reihe singulärer Punkte das Zerfallen einer Curve in Theilcurven niederer Ordnung herbeiführen. Ist dies der Fall, so befindet sich die Kette in einer sogenannten Wechsellage, die hiernach als Unterart der allgemeinen Verzweigungslage erscheint.

Wie es bei einer solchen Lage Gruppen von Gliedern geben kann, deren Polconfiguration bestimmt ist, so können auch insbesondere todte Gruppen auftreten; das Wesentliche bleibt stets, dass es überhaupt Glieder giebt, deren Relativbewegung während eines Zeitelementes unbestimmt ist.

* Vergl. meinen Bremer Vortrag: „Ueber Polbestimmung in Verzweigungslagen zwangläufig bewegter starrer Systeme“. Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. S. 7. Bremen 1890.

Im § 7, dem letzten der Arbeit, wird für eine Reihe von Ketten die Bestimmung der mehrdeutigen Pole, sowie der zugehörigen quadratischen Verwandtschaften durchgeführt, soweit es unter Berücksichtigung von zwei auf einander folgenden Bewegungen möglich ist. In der That kann es vorkommen, dass die Polconfiguration auch noch im 3ten, 4ten etc. Zeitelemente unbestimmt bleibt und erst die Berücksichtigung des Vorgangs in einem weitern Elemente eine ausgezeichnete Polgruppe ergiebt. Auf derartige Fragen konnte nur hingewiesen werden; an die Erledigung derselben kann so lange nicht gedacht werden, als nicht die Relativbewegung zweier Systeme in constructiver Hinsicht für die erforderliche Anzahl von Zeitelementen erforscht ist.

§ 1. Die allgemeinste Art der eindeutigen Festlegung der Polconfiguration von n bewegten starren Systemen.

Die Festlegung eines starren Systems σ_1 in Bezug auf ein zweites erfordert die Angabe von drei Constanten, oder einfachen geometrischen Bedingungen, wie die Transformationen der ebenen Coordinaten solcher Systeme zeigen. Ebenso sind zur Festlegung jedes weitern Systems gegen die beiden ersten drei weitere Bedingungen anzugeben; d. h. die Lage von n starren Systemen in Bezug auf einander ist durch $3(n-1)$ von einander unabhängige Bedingungen bestimmt. Giebt man eine Bedingung weniger, d. h. deren nur $3n-4$, so besitzen die Systeme gegen einander einen Grad von Bewegungsfreiheit, und zwar sind je zwei von ihnen gegen einander bewegbar, wenn keine m Systeme unter ihnen mehr als $3m-4$ Bedingungen zu erfüllen haben. Zulässig wäre es noch, die m Systeme $3(m-1)$ Bedingungen zu unterwerfen. Dann würden alle sich wie ein einziges starres System verhalten und es würde nur Relativbewegung zwischen $n-m+1$ Systemen stattfinden, für welche noch $3n-4-(3m-3)$ $=3(n-m+1)-4$ Bedingungen gegeben wären, wie es nach dem oben Gesagten zur Erzielung eines Freiheitsgrades nothwendig ist.

Das geometrische Bild einer unendlich kleinen Relativbewegung während eines Zeitelementes ist die Polconfiguration der Systeme, deren Festlegung demnach $3n-4$ Constanten erfordert. Eine solche ist gegeben durch die Forderung, dass der Pol $ik\,(=ki)$ zweier Systeme $\sigma_i\sigma_k$ auf einer gegebenen Geraden $\overline{ik}$ liege oder $\overline{ik}$ ein „Normalstrahl“ der Relativbewegung von σ_i und σ_k sei. Realisirt wird der Normalstrahl durch ein sogenanntes nicht zwangläufiges höheres Elementenpaar, d. h. zwei Cylinderflächen, je eine den beiden starren Körpern, deren ebene Bewegung betrachtet wird, als Begrenzungsfläche angehörend, welche sich während der Bewegung stets längs einer Erzeugenden berühren. Bei der geometrischen Behandlung reicht es aus, die Profilcurven zu betrachten, in welchen eine Normalebene dieser Cylinder dieselben schneidet, und der Normalstrahl ist dann die gemeinschaftliche Normale der Profilcurven im Berührungspunkte. In

anderer Weise kann durch Einschiebung eines neuen Systemes ein Normalstrahl folgendermaassen realisirt werden: Man nehme auf ihm zwei Punkte $A_i A_k$ an und verbinde in diesen $\sigma_i \sigma_k$ durch ein neues starres System gelenkig mit einander; dann erhält man nach Durchführung dieser Operation für alle Normalstrahlen eine kinematische Gelenkkette, welche curvenzwangläufig sein muss, da sie die erforderliche Constantenzahl besitzt.* Daraus folgt, dass durch die gegebenen $3n-4$ Normalstrahlen die Polconfiguration insbesondere eindeutig bestimmt ist. Wir sagen:

1) Die Polconfiguration von n bewegten Systemen ist durch Angabe von $3n-4$ von einander unabhängigen Normalstrahlen eindeutig bestimmt.

Die vorstehend gegebene Festlegung der Polconfiguration ist allgemeiner als die sonst übliche durch eine Anzahl von Polen, da bei hinlänglich grossem n nicht von jedem Pole und Systempaar ein Normalstrahl gegeben zu sein braucht, während die Kenntniss eines Poles ik sich mit der Angabe zweier Normalstrahlen $\overline{ik}$, $\overline{ik}'$ eines und desselben Systempaares deckt. In der That, da es $\frac{n(n-1)}{2}$ Pole giebt, so bleiben, wenn von den $3n-4$ gegebenen Strahlen nicht zwei durch einen und denselben, ihnen zugeordneten Pol gehen, (mehr als zwei wäre unzulässig) noch $\frac{n(n-1)}{2}-(3n-4)=\frac{(n-2)(n-5)}{2}-1$ Pole, von denen kein Normalstrahl gegeben ist, und diese Zahl wird positiv für $n > 5$.

Seien jetzt $3n-5$ Normalstrahlen gegeben, so lassen sich diesen ∞^1 Polconfigurationen von n Systemen einschreiben. Der eindeutigen Bestimmtheit der Configuration durch $3n-4$ solcher Strahlen wegen müssen sich aber alle beweglichen Pole, welche jene $3n-5$ Strahlen zulassen, auf geraden Linien bewegen, da von einem $(3n-4)^{\text{ten}}$ Strahle auf jeder andern Curve mehr als ein Pol ausgeschnitten werden würde. Das heisst:

---

* Dass eine kinematische Kette mit $3n-4$ höhern, nicht zwangläufigen Elementenpaaren zwangläufig ist, findet schon Herr Grübler a. a. O. und dass die oben substituirte Gelenkkette zwangläufig ist, folgt auch aus bekannten Formeln. Besitzt die Kette ν Glieder und g zweigliedrige Gelenkpunkte, so ist $3\nu-4=2g$. In unserem Falle ist $\nu=n+(3n-4)=4(n-1)$; $g=2(3n)-4$. Jede Seite der Gleichung hat folglich den Werth $12n-16$. Da eine Vereinigung beliebig vieler Gelenke eines Gliedes im Allgemeinen der Zwangläufigkeit keinen Abbruch thut, so lange nur nicht alle Gelenke in einem Punkt vereinigt liegen, ist eine Discussion dieser Möglichkeiten überflüssig.

Nach einem von Burmester herrührenden Verfahren (vergl. dessen „Kinematik" S. 82f., auch Müller-Breslau „Graphische Statik, 2. Aufl., §§ 30, 31) kann man die Polconfiguration mit Hilfe der lothrechten Geschwindigkeiten stets construiren, so lange kein Gelenkpunkt unendlich fern liegt. Die in vorliegender Arbeit mitgetheilte Construction macht von dem Geschwindigkeitsbegriff keinen Gebrauch und gilt gleichmässig für im Endlichen liegende und unendlich ferne Elemente. Wegen einer Ergänzung des Burmester'schen Verfahrens s. S. 228 des Vorliegenden.

2) Sind $3n-5$ von einander unabhängige Gerade als Normalstrahlen der Polconfiguration von n Systemen gegeben, so sind diesen Strahlen ∞^1 Configurationen einbeschreibbar und alle noch unbestimmten Pole erfüllen eindeutig bestimmte gerade Linien. Diese und die $3n-5$ Geraden seien als Gruppe Γ^n bezeichnet.

Erst von $n=5$ an braucht, wie oben gezeigt wurde, kein Pol fest zu bleiben; zehn Gerade würden noch die sämmtlichen zehn Pole von fünf Systemen beweglich lassen und für grössere n hat man insbesondere:

2a) Bewegen sich $3n-5$ Pole der Configuration von $n>5$ Systemen auf festen Geraden, welche von einander unabhängig sind, so bewegen sich auch die übrigen $\frac{(n-2)(n-5)}{2}$ Pole auf ebenso vielen, eindeutig bestimmten Geraden. Eine Gruppe solcher $\frac{n(n-1)}{2}$ Strahlen, der ∞^1 Polconfigurationen einbeschrieben werden können, soll durch Γ^n bezeichnet werden.

Zur Gewinnung einer Construction der Polconfiguration denke man von den $3n-4$ gegebenen Strahlen einen solchen $\overline{ik}$ fort, dessen Pol noch unbekannt ist, und suche denjenigen $\overline{ik}^*$ der Γ^n, welche durch die übrigen $3n-5$ Strahlen eindeutig bestimmt ist. Der Schnittpunkt von $\overline{ik}$ und $\overline{ik}^*$ ist dann der gesuchte Pol ik.

Es erscheint hiernach zweckmässig, zunächst Γ^n zu untersuchen. Wir erledigen nach der Reihe die Fälle $n=2, 3, 4$ etc., indem wir uns durch zwei willkürliche Annahmen, jede der Angabe einer Constanten entsprechend, zwei Punkte von $\overline{ik}^*$ schaffen, durch welche $\overline{ik}^*$ bestimmt ist.

$n=2$, $3n-5=1$. Ist $\overline{12}$ gegeben, so liegt $\overline{12}^*$ mit ihm vereinigt (durchlagendes Kurbelgetriebe).

$n=3$, $3n-5=4$. Die vier Strahlen müssen paarweise zwei Polen angehören, sofern von einem Pol kein Strahl gegeben sein soll. Sind gegeben $\overline{12}$, $\overline{12}'$, $\overline{23}$, $\overline{23}'$, so ist $\overline{13}^*$ die Verbindungslinie der Pole 12, 23. Die zugehörige Gelenkkette, wie sie nach Angabe von S. 222 oben entsteht, ist in Fig. 1 dargestellt. Dieselbe ist in diesem Augenblicke nicht zwangläufig, da die fünf Normalstrahlen nicht von einander unabhängig sind. Der Pol 13 ist unbestimmt und wird eindeutig bestimmt für jede andere Lage von $\overline{13}$ oder G_1G_3.

$n=4$. $3n-5=7$.* Sechs Pole sind vorhanden. Soll daher von einem derselben kein Normalstrahl gegeben sein, so kann man von den übrigen Polen je einen Strahl geben, es bleiben dann noch $7-5=2$ Strahlen; d. h. von zwei Polen müssen je zwei Strahlen gegeben sein. Diese beiden

* Dieser Fall ist von Herrn Burmester in seiner Arbeit: „Ueber die momentane Bewegung der ebenen Mechanismen." Prager technische Blätter 1890, Heft 1 erledigt. Die Erkenntniss, dass die beweglichen Pole auf gewissen Geraden liegen müssen, wird dort durch projective Betrachtungen gewonnen.

hierdurch bestimmten Pole können nun entweder a) einem und demselben Systeme angehören oder b) kein System gemein haben.

Beide Fälle sind getrennt von einander zu behandeln.

a) Seien gegeben $\overline{12}$, $\overline{12}'$, $\overline{13}$, $\overline{13}'$, $\overline{23}$, $\overline{14}$, $\overline{24}$, sei also gesucht $\overline{34}^*$. Dann sind 12, 13 direct gegeben, aber weiter ist auch 23 auf ihrer Verbindungslinie durch $\overline{23}$ bestimmt. Man kann demnach auch (Fig. 2)

$$12,\ 13,\ 23,\ \overline{14},\ \overline{24}$$

als gegeben betrachten. Eine willkürliche Annahme eines Punktes $14_\alpha{}^*$ auf $\overline{14}$ führt nun durch Ziehen von 12, $14_\alpha{}^*$ zu einem Punkte $24_\alpha{}^*$ auf $\overline{24}$, und die weitern Geraden 13, $14_\alpha{}^*$, 23, $24_\alpha{}^*$ schneiden sich in einem Punkte $34_\alpha{}^*$, welcher der gesuchten $\overline{34}^*$ angehört. Als zweiten nothwendigen Punkt dieser Geraden hat man den Schnittpunkt von $\overline{14}$ und $\overline{24}$, wenn man ihn wie vorhin als $14_\beta{}^*$ auffasst, indem, wie leicht zu sehen, auch $24_\beta{}^* 34_\beta{}^*$ in diesem Punkte liegen.

b) Gegeben seien $\overline{13}$, $\overline{13}'$, $\overline{24}$, $\overline{24}'$, $\overline{12}$, $\overline{14}$, $\overline{23}$ oder einfacher (Fig. 3)

$$13,\ 24,\ \overline{12},\ \overline{14},\ \overline{23}.$$

Man suche $\overline{34}^*$. Die Annahme, dass σ_1 und σ_3 momentan starr mit einander verbunden seien, entspricht der Angabe einer Constanten, da der Pol 13 gegeben ist. Sind aber zwei Systeme $\sigma_i \sigma_k$ momentan nicht gegen einander beweglich, so decken sich ihre Pole il, kl in Bezug auf ein beliebiges anderes System σ_l. Diese evidente Thatsache wird sich vielfach als nützlich erweisen. Im vorliegenden Falle sind die der gewählten Annahme entsprechenden Pole $12_\alpha{}^* 32_\alpha{}^*$ vereinigt und zwar nothwendigerweise dann im Schnittpunkte A von $\overline{12}\ \overline{32}$. Die Gerade $12_\alpha{}^* 24$ bestimmt dann auf $\overline{14}$ den Pol $14_\alpha{}^*$, mit dem $34_\alpha{}^*$ wiederum vereinigt liegen muss. Die neue Annahme: σ_2 und σ_4 bilden ein starres System, zieht in entsprechender Weise die Vereinigung von $12_\beta{}^* 14_\beta{}^*$ im Schnittpunkte B von $\overline{12}$ und $\overline{14}$ nach sich. Die Gerade $12_\beta{}^* 13$ trifft $\overline{23}$ in $23_\beta{}^*$ und mit diesem Punkte liegt $34_\beta{}^*$ vereinigt. Der gesuchte Strahl $\overline{34}^*$ ist die Gerade $34_\alpha{}^* 34_\beta{}^*$. Die Fig. 4*) stellt die dem vorliegenden Falle entsprechende Gelenkkette noch der bessern Uebersicht wegen besonders dar.

$n = 5,\ 3n - 5 = 10.$ Die Anzahl der Möglichkeiten hinsichtlich der Anzahl gegebener Pole wächst wesentlich. Irgendwelche zehn Strahlen können eine Gruppe Γ^5 vorstellen. Soll demnach ein Strahl gesucht werden, so muss wenigstens ein Pol durch zwei Strahlen gegeben sein. Wir behandeln nur diesen offenbar schwierigsten Fall und geben:

$$12,\ \overline{13},\ \overline{14},\ \overline{15},\ \overline{23},\ \overline{24},\ \overline{25},\ \overline{34},\ \overline{35}.$$

Gesucht ist dann $\overline{45}^*$.

---

*) In den Figuren sind der Einfachheit wegen statt der σ_i nur die Zeiger i hingeschrieben.

Die Annahme: σ_1 und σ_2 bilden ein starres System, bewirkt, dass

$$\begin{array}{llll} 13_\alpha{}^* 23_\alpha{}^* & \text{im Schnittpunkte } A & \text{von} & \overline{13}, \overline{23}, \\ 14_\alpha{}^* 24_\alpha{}^* & \quad\text{"} \qquad\quad \text{"} \quad B & \text{"} & \overline{14}, \overline{24}, \\ 15_\alpha{}^* 25_\alpha{}^* & \quad\text{"} \qquad\quad \text{"} \quad C & \text{"} & \overline{15}, \overline{25} \end{array}$$

vereinigt liegen. Auf $\overline{34}$ wird dann von AB oder $13_\alpha{}^* 14_\alpha{}^*$ der Punkt $34_\alpha{}^*$, ebenso auf $\overline{35}$ von AC der Punkt $35_\alpha{}^*$ verzeichnet, und die Verbindungslinie von $34_\alpha{}^* 35_\alpha{}^*$ trifft BC in $45_\alpha{}^*$. Zur Ermittelung eines zweiten Punktes $45_\beta{}^*$ nehme man $13_\beta{}^*$ auf $\overline{13}$ willkürlich an, wodurch mit Hilfe der Geraden $12\, 13_\beta{}^*$ auch $23_\beta{}^*$ auf $\overline{23}$ bestimmt ist. Damit hat man von jeder der Polconfigurationen von $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ und $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_5$ die für den Fall $n=4$ unter a) als gegeben vorausgesetzten Elemente. Nach Construction dieser Configurationen findet man dann $45_\beta{}^*$ als Schnittpunkt zweier beliebigen der Geraden $34_\beta{}^* 35_\beta{}^*$, $14_\beta{}^* 15_\beta{}^*$, $24_\beta{}^* 25_\beta{}^*$; und $45_\alpha{}^*$, $45_\beta{}^*$ bestimmen $\overline{45}^*$.

$n=6$. $3n-5=13$. Dieser Fall ist insofern der erste von allgemeinem Charakter, als nur Normalstrahlen, keine Pole, gegeben zu sein brauchen. Wir zeigen zunächst, dass dann unter den 13 Normalstrahlen immer 10 vorhanden sind, welche 5 Systemen angehören. Da, wie leicht zu sehen, einem beliebigen Systeme mindestens drei Normalstrahlen in Bezug auf drei andere Systeme zukommen, so zieht man so viel wie möglich Systeme zur Bildung einer Anzahl von Normalstrahlen heran, d. h. man erzielt die ungünstigste Annahme, wenn man von drei Systemen, etwa $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ ausgeht, und ihre Normalstrahlen in Bezug auf die übrigen Systeme $\sigma_4 \sigma_5 \sigma_6$ giebt. Dies Verfahren führt zu den Strahlen

$$\begin{array}{ccc} \overline{14} & \overline{24} & \overline{34} \\ \overline{15} & \overline{25} & \overline{35} \\ \overline{16} & \overline{26} & \overline{36}. \end{array}$$

Irgendwelche vier weitere Strahlen, z. B. $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{31}$, $\overline{45}$, welche noch hinzugenommen werden müssen, bewirken aber das Auftreten der Gruppe von zehn, welche fünf Systemen, in diesem Falle den Systemen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5$, angehören. Setzen wir also als gegeben voraus:

$$\overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{45}, \overline{16}, \overline{26}, \overline{36}$$

und suchen $\overline{46}^*$, $\overline{56}^*$.

Die willkürliche Annahme von 12^* auf $\overline{12}$ führt nach dem Verfahren für $n=5$ zur Configuration 12^*, 13^*, $14^* \ldots 45^*$ der Systeme $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5$. Nach $n=4$, a) liefern dann die Pole $12^*\, 23^*\, 31^*$ unter Hinzunahme von $\overline{16}$, $\overline{26}$, $\overline{36}$ die weitern Pole $16^*\, 26^*\, 36^*$, und nun schneiden sich die Geraden $14^* 16^*$, $24^* 26^*$, $34^* 36^*$ in einem Punkte 46^*,
$15^* 16^*$, $25^* 26^*$, $35^* 36^*$ " " " 56^*.

Damit ist von jeder der zu suchenden Geraden ein Punkt gewonnen und eine zweite willkürliche Annahme führt zu einem zweiten Punkte, der die Geraden dann bestimmt.

Das soeben erörterte Verfahren ermöglicht auch die Lösung der folgenden allgemeinen Aufgabe:

3. Gegeben sei Γ^n von n Systemen $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$. Man suche Γ^{n+1}, wenn von σ_{n+1} drei Normalstrahlen $\overline{i, n+1}$, $\overline{k, n+1}$, $\overline{l, n+1}$ in Bezug auf drei Systeme $\sigma_i \sigma_k \sigma_l$ der ersten n gegeben sind. Denn die willkürliche Annahme des Poles ik^* liefert die ganze Polfiguration der n ersten Systeme, welche dieser Annahme entspricht und die Bestimmungsstücke

$$ik^*,\ il^*,\ kl^*,\ \overline{i, n+1},\ \overline{k, n+1},\ \overline{l, n+1}$$

führen nach $n = 4$ a) zu den Polen $i, n+1^*$, $k, n+1^*$, $l, n+1^*$. Endlich schneiden sich die Linien ix^*, $i, n+1^*$ und kx^*, $k, n+1^*$ (und auch lx^*, $l, n+1^*$) in einem Punkte $x, n+1^*$, welcher dem Normalstrahl $\overline{x, n+1^*}$ des beliebigen Systems σ_x in Bezug auf σ_{n+1} angehört, und eine Wiederholung des Verfahrens bestimmt ihn demnach.

Sofern nun unter den $3n-5$ Normalstrahlen, welche Γ^n bestimmen, $3.6-5=13$ Strahlen einer Γ^6 vorhanden sind, kann man hiernach auch Γ^n bilden, da von irgend einem der nicht Γ^6 angehörigen Systeme drei Strahlen in Bezug auf drei Systeme von Γ^6 vorhanden sein müssen. Aber diese Annahme ist nicht zutreffend, man zeigt vielmehr:

4. Sind von $n > 11$ Systemen $3n-5$ Normalstrahlen gegeben, so befinden sich unter diesem stets $3.11-5=28$ Strahlen von 11 dieser Systeme, die übrigen Strahlen lassen sich dann so anordnen, dass von jedem folgenden Systeme drei Strahlen in Bezug auf vorhergehende Systeme gegeben sind. Nach Herstellung von Γ^{11} führt dann das Verfahren von 3) zum Ziele.

Zum Beweise gehen wir natürlich von der Gruppe

$$\begin{array}{ccc}
\overline{14} & \overline{24} & \overline{34} \\
\overline{15} & \overline{25} & \overline{35} \\
\overline{16} & \overline{26} & \overline{36} \\
\overline{17} & \overline{27} & \overline{37} \\
\overline{18} & \overline{28} & \overline{38} \\
\overline{19} & \overline{29} & \overline{39} \\
\overline{1X} & \overline{2X} & \overline{3X} \\
\overline{1XI} & \overline{2XI} & \overline{3XI} \\
\overline{1XII} & \overline{2XII} & \overline{3XII} \\
\cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

aus, welche noch der Entwickelung des Falles $n = 6$ die ungünstigste Annahme darstellt. Bei n Systemen enthält jene Gruppe $3(n-3)$ Strahlen, es sind demnach noch $3n-5-3(n-3)=4$ Strahlen hinzuzufügen, wenn die Γ^n bestimmt sein soll. Die Angabe eines der Strahlen $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{23}$ würde die Angabe aller Strahlen von jedem seiner Systeme in Bezug auf

jedes der übrigen $\sigma_4\sigma_5\sigma_6\ldots\sigma_n$ nach sich ziehen, was vermieden werden kann, wenn nur Strahlen aus der Systemgruppe $\sigma_4\sigma_5\sigma_6\ldots\sigma_n$ gewählt werden. Hierbei wird dann diejenige Wahl wieder die ungünstigste sein, welche möglichst viele Systeme erfordert, d. h. die Wahl von $\overline{45}$, $\overline{67}$, $\overline{89}$, $\overline{\text{X XI}}$. Damit sind 28 Strahlen von 11 Systemen gegeben, die Gruppe, die im Satze als nicht zu umgehen bezeichnet wurde.

Wir beschäftigen uns nun sofort mit diesem, die grössten wesentlichen Schwierigkeiten bietenden Fall:

$n=11,\ 3n-5=28$ und denken die soeben beim Beweise von 4) benutzten Normalstrahlen

$$\begin{array}{cccc} & \overline{14} & 24 & \overline{34} \\ & \overline{15} & \overline{25} & \overline{35} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \overline{1\,\text{XI}} & \overline{2\,\text{XI}} & \overline{3\,\text{XI}} \\ \overline{45}, & \overline{67}, & \overline{89}, & \overline{\text{X XI}} \end{array}$$

als gegeben. Eine willkürliche Annahme, welcher der Angabe einer Constanten entspricht, führt nicht mehr, wie vergebliche Versuche zeigten, zur Gewinnung eines Punktes auf einem Strahle von Γ^{XI}. Als am zweckmässigsten erweist es sich, drei willkürliche Gerade $\overline{12}'$, $\overline{23}'$, $\overline{31}'$ anzunehmen, wodurch 13 Strahlen einer Γ'^6 der ersten sechs Systeme vorliegen. Man construire dieselbe und dann unter Heranziehung von $\overline{17}$, $\overline{27}$, $\overline{37}$, $\overline{67}$ [nach 3)] die Polconfiguration Π'^7 von $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_7$. Irgend eine andere willkürliche Annahme $\overline{12}''\overline{23}''\overline{31}''$ führt dann zu einer Π''^7.

Nun bedenke man, dass die Verbindungslinien entsprechender Pole $ik'\ ik''$ zweier Configurationen $\Pi'^m\Pi''^m$ eine Γ^m bilden, unsere beiden Π^7 demnach eine Γ'^7 bestimmen, welcher die Normalstrahlen der sieben ersten Systeme angehören. Dies Verfahren ist fortführbar; Γ'^7 und

$$\begin{array}{cccc} \overline{18}, & \overline{28}, & \overline{38} & \\ \overline{19}, & \overline{29}, & \overline{39}, & \overline{89} \end{array}$$

geben unter zweimaliger Anwendung von 3) eine Π'^9, und eine Wiederholung des ganzen Verfahrens liefert eine zweite Π''^9; beide Π^9 bestimmen ein Γ'^9. Ebenso wie der Schritt von Γ'^7 zu Γ'^9 ist aber der Schritt von dieser zur Γ^{XI}; und von nun an besteht, wenn weitere Systeme hinzukommen, die Construction der folgenden Γ^{XII}, Γ^{XIII} aus Wiederholungen von 3).

Die grössten wesentlichen Schwierigkeiten bietet hiernach die Bestimmung der Polconstruction von 13 Systemen, wenn als 35 Normalstrahlen zu den soeben für Γ^{XI} gegebenen noch die sieben weitern $\overline{1\,\text{XII}}$, $\overline{2\,\text{XII}}$, $\overline{3\,\text{XII}}$; $\overline{1\,\text{XIII}}$, $\overline{2\,\text{XIII}}$, $\overline{3\,\text{XIII}}$, $\overline{\text{XII}\,.\,\text{XIII}}$ hinzugenommen werden.

Das hiermit vollständig gekennzeichnete Verfahren ist rein geometrisch, benutzt nur Elemente der Configuration und lässt in Folge dessen das Wesen derselben vollkommen durchschauen. Da andererseits Burmester's Methode der Polbestimmung für den praktischen Gebrauch sehr bequem ist, so möge hier noch gezeigt werden, wie sich dieselbe durch eine geringe Ergänzung auch für den Fall, dass unendlich ferne Configurationselemente auftreten, brauchbar machen lässt. Man hat behufs Anwendung der Methode zunächst die zum Normalstrahlen-System gehörige Gelenkkette herzustellen, ein Glied derselben fest zu denken und einem (am Besten ein dem festen benachbarten) Gliede eine willkürliche endliche lothrechte Geschwindigkeit zu ertheilen. Damit sind, wenn Zwangläufigkeit des Getriebes vorhanden ist, auch die Geschwindigkeiten aller übrigen Glieder bestimmt. Setzen wir nun zunächst alle Gelenkpunkte als im Endlichen gelegen voraus, was so lange zutrifft, als nicht ein gegebener Normalstrahl unendlich fern liegt, und bezeichnen diejenige Figur, welche aus allen Gelenkpunkten und den Strecken, welche die starre Verbindung der Gelenkpunkte eines jeweiligen Gliedes andeuten, besteht, durch F, so bilden die Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte eine Figur F' und zwar ist jedem Punkte von F ein Punkt von F', jeder Geraden von F eine Parallele zu ihr von F' zugeordnet, ohne dass F und F' einander ähnlich wären. Sind dann $A_i B_i$ zwei Gelenkpunkte des Gliedes σ_i in F, $A_i' B_i'$ die ihnen entsprechenden Punkte in F', so stellen die Strecken $\overline{A_i A_i'}$, $\overline{B_i B_i'}$ die lothrechten Geschwindigkeiten von σ_i dar und der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist somit der Pol ik von σ_i in Bezug auf das festgestellte Glied σ_k. Die Herstellung von F' ist nun stets möglich*, man kann somit alle Pole im Gliede σ_k construirt denken. Eine Wiederholung des Verfahrens für ein anderes festgestelltes Glied σ_l liefert alle Pole in diesem, und man erhält endlich irgend einen Pol xy nach dem bekannten Schema

$$\begin{matrix} xl - yl \\ xk - yk \end{matrix} > xy.$$

Um diesem Verfahren seine Anwendbarkeit im Falle unendlich ferner Ecken von F, d. h. beim Auftreten von Richtpaaren der Kette, zu erhalten, construire man zunächst eine zu F centrisch collineare F^*. Collineations-Centrum, -Achse, sowie die Gegenachse (das Bild der unendlich fernen Geraden der F) sind ganz willkürlich; man wird insbesondere die Wahl also leicht so treffen können, dass alle Punkte von F^* innerhalb der Papierebene liegen. In F^* kann man dann die Polconfiguration Π^* mit Hilfe von F'^* construiren und die zu Π^* in F gehörige Configuration Π ist die gesuchte.

* Vergl. Müller-Breslau a. a. O., auch Lang-Rigasche Industrie Zeitung 1889, S. 75 flg.

§ 2. Specielle Bestimmungsarten der Polconfiguration und specielle Configurationen.

Wir setzen nunmehr voraus, dass neben Normalstrahlen eine Reihe von Polen gegeben sei. Ein Pol entspricht der Angabe von zwei Normalstrahlen, p von einander unabhängige Pole entsprechen der Angabe von $2p$ solchen Strahlen oder Constanten. Abhängigkeit in der Lage von Polen wird durch den Umstand herbeigeführt, dass die Pole von drei Systemen stets auf einer Geraden liegen. Es wird sich als nothwendig erweisen, auch die Fälle zu berücksichtigen, in denen die Pole von mehr als drei Systemen einer und derselben Geraden angehören, einmal weil dies bei Räderverbindungen oft vorkommt, dann aber namentlich, weil unendlich ferne Pole stets als auf einer Geraden liegend anzusehen sind.

Zu einer übersichtlichen Gestaltung der Abhängigkeitsverhältnisse empfiehlt sich die Einführung des folgenden Begriffs:

5. Ein „Polzug“ sei eine Gruppe von Polen, deren jeder mit mindestens einem der übrigen einem und demselben Systeme angehört. Ein Polzug von s Systemen besitzt also mindestens $s-1$ Pole.

Bei unserer Bezeichnungsweise muss demnach ein beliebiger Pol des Polzugs wenigstens mit einem der übrigen eine Zahl gemeinschaftlich haben.

Liegen alle Pole eines Zuges in einem Punkte vereinigt, so soll der Zug ein punktueller Polzug heissen. Liegen alle Pole eines Zuges auf einer Geraden, so soll der Zug geradlinig heissen. Den Vereinigungspunkt im ersten Falle, bez. die Gerade des zweiten, bezeichnen wir, nach Analogie einer in der Geometrie der Lage verwendeten Namengebung, als Träger des Polzuges.

Man beweist dann die folgenden Sätze:

6. Liegen $i-1$ von den Polen eines Polzuges P_i von i Systemen in einem Punkte vereinigt, so liegen in diesem Punkte auch alle übrigen Pole dieser Systeme, oder, ein punktueller Polzug von i Systemen enthält die sämmtlichen Pole von je zweien dieser Systeme in seinem Träger vereinigt und besitzt $2(i-1)$ Constanten, oder zählt als $i-1$ einfache Pole.

Nehmen wir zum Beweise zunächst $i=3$, und die Pole 12, 13 vereinigt im Träger P an. Dann dreht sich sowohl σ_2 als σ_3 momentan um P in σ_1, d. h. auch die Relativbewegung von σ_2 gegen σ_3 ist eine Drehung um P, welcher demnach der Pol 23 ist. Die Allgemeingiltigkeit des Satzes folgt mittels des Schlusses von i auf $i+1$, indem wir seine Richtigkeit für die i Systeme $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_i$ voraussetzen. Geben wir von einem hinzutretenden Systeme σ_{i+1} den Pol $\sigma_{1, i+1}$, so ergiebt sich wie oben durch Benutzung des Poles $1k$, wo σ_k eines der i ersten Systeme ist, dass auch der Pol $k, i+1$ im Träger P liegt.

Der punktuelle Polzug einer Systemgruppe $\sigma_i \sigma_k \sigma_l \ldots$ sei durch $(ikl\ldots)$ bezeichnet.

7. Bilden $s-1$ Pole von s Systemen einen geradlinigen Polzug, so liegen auch die übrigen Pole von je zweien dieser s Systeme auf dem Träger des Zuges. Der Träger ist also Normalstrahl für die Bewegung von je zweien der Systeme. Jeder etwa auftretende punktuelle Polzug Pi zählt hierbei für $i-1$ einfache Pole.

Für $s=3$ ist der Satz richtig und man zeigt leicht wie oben mittels des Schlusses von s auf $s+1$, dass er allgemein gilt. Es sei nun ein geradliniger Polzug von $r > s-1$ Polen der s Systeme gegeben. Nehmen wir zur Bestimmung der Constantenzahl dieser Pole $s-1$ derselben, welche noch einen Zug bilden, was stets möglich sein muss, da durch diese Anzahl schon die Anwesenheit der übrigen $r-s+1$ Pole auf dem Träger bedingt ist, so folgt unmittelbar, dass die Angabe eines jeden dieser $r-s+1$ Pole nur der Angabe einer Constanten entspricht und die sämmtlichen r Pole sind daher $2(s-1)+r-s+1=s+r-1$ Constanten äquivalent. Hierbei ist jedoch zu bedenken, dass diese Constantenzahl nicht grösser als $3s-4$ sein darf, sofern starre Verbindung ausgeschlossen sein soll. Ist diese Zahl gerade erreicht, d. h. ist $s+r-1=3s-4$ oder $r=2s-3$, so ist die Polconfiguration dieser s Systeme durch die r Pole bestimmt. Mehr als $2s'-3$ Pole dürfen daher auch beliebigen s' dieser Systeme nicht angehören. Der letzte Satz erhält demnach jetzt die allgemeinere Fassung:

8. Sind r Pole eines geradlinigen Polzuges von s Systemen gegeben, und ist $s-1 \leqq r \leqq 2s-3$, gehören ferner nicht mehr als $2s'-3$ dieser Pole beliebigen s' der Systeme an, so liegen auch die übrigen Pole des Zuges auf dem durch die gegebenen bestimmten Träger und durch letztere r Pole sind $r+s-1$ Constanten bestimmt. Sind insbesondere $r=2s-3$ Pole gegeben, so ist jeder Pol der s Systeme bestimmt. Jeder punktuelle Polzug von i Systemen zählt hierbei für $i-1$ Pole.

Aus diesem Satze folgt insbesondere:*

9. Die momentane Bewegung von s Systemen ist durch Angabe von $2s-3$ unendlich fernen Polen bestimmt, sofern beliebigen s' Systemen nicht mehr als $2s'-3$ Pole angehören. Jeder punktuelle Polzug von i Systemen zählt hierbei für $i-1$ Pole.

Im Falle der Bestimmtheit aller Pole des geradlinigen Zuges geschieht die Construction der fehlenden Pole mit Hilfe des Burmester'schen

---

* Vergl. Grübler a. a. O. S. 213.

Satzes:* Liegen die sechs Pole von vier Systemen auf einer Geraden, so bilden je zwei Pole, welche kein System gemein haben, ein Punktpaar einer und derselben Involution. Diese Involution von je vieren der Systeme möge durch $J(k, l, m, n)$, wo die Klammer die Systemzahlen enthält, bezeichnet werden. Der Verlauf der Construction mag an einem Beispiele gezeigt werden. Gegeben seien auf einer Geraden die Pole

12, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 45, 67, 24, 56.

Wir haben $s = 7$, $r = 11 = 2s - 3$. Die Polconfiguration ist also bestimmt, da nicht mehr als $2s' - 3$ Pole beliebigen s' der Systeme angehören. Nun bestimmen

in $J(1245)$ die Paare 12, 45; 24, 15 und 14 den Pol 25
„ $J(1256)$ „ „ 12, 56; 16, 25 „ 16 „ „ 26
„ $J(1267)$ „ „ 12, 67; 17, 26 „ 16 „ „ 27
„ $J(12ik)$ „ „ $1i$, $2k$; $1k$, $2i$ „ 12 „ „ ik.

Im Falle mehrere solche „geradlinige Configurationen“ in der Configuration von n Systemen auftreten, haben jene nur dann keinen Pol gemeinschaftlich, wenn keine zwei der Configurationen mehr als höchstens ein System gemeinschaftlich haben. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Constantenzahl aller daher gleich der Summe der einzelnen geradlinigen Configurationen. In derselben Weise besitzen beliebige Configurationselemente als Constantenzahl die Summe der Constantenzahlen der einzelnen Elemente, so lange diese von einander unabhängig sind, d. h. so lange keins der Elemente in seiner Lage durch die übrigen beschränkt, oder gar bestimmt ist. Sind hingegen in Fig. 5 die Pole 51, 54, 61, 64 und der geradlinige Zug 12, 23, 34 gegeben, so bestimmen die ersten vier Pole den weitern 14, welcher auf dem geradlinigen Zuge liegen muss, sofern überhaupt Bewegung zwischen σ_1 und σ_4 möglich sein soll.** Der Träger des geradlinigen Zuges ist also von den vier übrigen Polen abhängig und die Pole 12, 23, 34 repräsentiren nur $6 - 1 = 5$ Constante, da wegen des Pols 14 nach Angabe von zweien, etwa 12, 23, der dritte 34 auf dem dann bestimmten Träger liegen muss. Die Gesammt-Constantenzahl der gegebenen Elemente ist somit $4.2 + 5 = 13$; die Polconfiguration ist nicht bestimmt; erst eine willkürliche Annahme von einem der unbestimmten

* Vergl. „Kinematik“ S. 436. Herr Burmester gewinnt diesen Satz in etwas anderer Fassung durch Betrachtung einer Sonderlage des Watt'schen Mechanismus. Ich erlaube mir darauf hinzuweisen, dass diese Beziehung zwischen den Polen eine unmittelbare Folge der Thatsache ist, dass die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits von einem Centrum seiner Ebene aus durch sechs Strahlen einer Involution projicirt werden. Hieran kann im Grenzfalle von vier unendlich nahen Seiten des Vierseits nichts geändert werden.

** Derartige Widersprüche dürfen nicht von der Betrachtung ausgeschlossen werden, wir erledigen diese Vorkommnisse jedoch erst im folgenden Paragraphen.

Pole, etwa 24*, gestattet eine eindeutige Bestimmung der weitern 25*26* 13*35*36*, wie in der Figur theilweise angedeutet ist; 13* ist insbesondere der sechste Involutionspunkt zu 12, 34; 23, 14; 24*.

Derartige Bestimmungsstücke müssen ausgeschlossen werden, wenn es sich um die Angabe übersichtlicher Kriterien für die Bestimmtheit der Polconfiguration handelt. Wir nennen die Bestimmungsstücke von einander unabhängig, wenn keins derselben in seiner Lage durch die übrigen weiter beschränkt ist, als es durch die geradlinigen Polzüge, denen es etwa angehört, bedingt ist, und insbesondere die Träger der geradlinigen Polzüge unabhängig von den nicht auf ihnen liegenden Polen sind.

Die bisherige Entwickelung gipfelt dann in dem folgenden Resultat:

10) Sind als von einander unabhängige Stücke zur Bestimmung der Polconfiguration von n Systemen gegeben: p Normalstrahlen, P_i punktuelle Polzüge von i Systemen, welche keinem geradlinigen Polzuge angehören, endlich k geradlinige Polzüge von r_k Polen und s_k Systemen, und haben keine zwei dieser geradlinigen Züge mehr als ein System gemeinschaftlich, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Bestimmtheit der Configuration gegeben durch die Gleichung

$$p + 2\sum_i P_i(i-1) + \sum_k k(r_k + s_k - 1) = 3n - 4.$$

$$s_k - 1 \leqq r_k \leqq 2s_k - 3,$$

sofern der Werth des für die Bestimmungsstücke von beliebigen n' dieser Systeme gebildeten Ausdrucks obiger Gleichung $\leqq 3n' - 4$ ist.

Sind zwei oder mehr Systeme zweien geradlinigen Configurationen gemeinschaftlich, so liegen die sämmtlichen Pole jener Systeme im Schnittpunkte der Träger vereinigt. Haben demnach mehr als zwei geradlinige Configurationen zwei oder mehr Systeme gemeinschaftlich, so müssen sich ihre Träger in einem und demselben Punkte schneiden. Dieser Punkt ist dann Träger eines punktuellen Polzuges, welcher den sämmtlichen Configurationen angehört, aber natürlich nur einmal bei der Bestimmung der Constantenzahl gezählt werden darf, sofern er, was wir voraussetzen, gegeben ist, da andernfalls die Träger nicht von einander unabhängig wären. Der letzte Satz versagt seine Dienste und wir müssen eine andere Zählweise einführen. Wir zählen zunächst jeden P_i, mag er geradlinigen Zügen angehören oder nicht, als $2(i-1)$ Constanten. Bilden dann r Pole von s Systemen einen geradlinigen Zug, so zählen $r - s + 1$ von ihnen nur als je eine Constante (vergl. S. 230) und diese Zahl ist daher zu subtrahiren.

Wir haben daher umfassender:

10a) Sind als von einander unabhängige Bestimmungsstücke der Polconfiguration von n Systemen p Normalstrahlen, P_i punktuelle Polzüge von i Systemen gegeben und treten unter diesen k geradlinige Polzüge von r_k Polen und s_k Systemen auf, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Bestimmtheit der Polconfiguration, dass

$$p + 2\sum_i P_i (i-1) - \sum_k k (r_k - s_k + 1) = 3n - 4$$
$$s_k - 1 \leqq r_k \leqq 2s_k - 3.,$$

sofern der Werth des für beliebige n' dieser Systeme gebildeten Ausdrucks obiger Gleichung $\leqq 3n' - 4$ ist.

Einige Beispiele erscheinen zur Erläuterung nicht überflüssig.

Gegeben seien von der Polconfiguration der Systeme $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{11}$ der geradlinige Polzug

12, 23, 34, 45, 51, 46, 67, 78, 82, 39, 92 und die Pole
1 10, 6 10, 9 10, 10 11, 7 11.

Nach 10) haben wir für $p = 0$, $P_2 = 5$, $g_k = 1$, $r_k = 11$, $s_k = 9$, $n = 11$; als Bedingung der Bestimmtheit der Configuration

$$2.5 + (11 + 9 - 1) = 3.11 - 4,$$

und diese ist erfüllt, da jede Seite der Gleichung den Werth 29 hat.

Gegeben seien die geradlinigen Polzüge

(123), 14, 24, 34, 45
(123), 16, 17, 28, 39, 26, 78, 19

und die Pole 1 10, 5 10, 8 11, 9 11 der Configuration der elf Systeme $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{11}$. Es ist $p = 0$. Nach 10a) haben wir $P_3 = 1$, $P_2 = 15$.

In jedem geradlinigen Polzuge zählt der P_3 als zwei Pole. Demnach ist im ersten Polzuge $r_k = 6$, $s_k = 5$, also $r_k - s_k + 1 = 2$, und im zweiten Polzuge $r_k = 9$, $s_k = 7$, also $r_k - s_k + 1 = 3$, und die zu erfüllende Bedingung ist

$$2(2 + 15) - (2 + 3) = 3.11 - 4.$$

Da jede Seite der Gleichung den Werth 29 hat, ist die Configuration bestimmt.

§ 3. Polconfigurationen mit todten Systemgruppen. Todtlagen kinematischer Ketten.

Wir betrachten nunmehr solche Bestimmungsstücke, welche auf Widersprüche mit den für Polzüge gefundenen Gesetzen führen. Systemgruppen, welche in ihren Polen derartige Widersprüche zeigen, können sich dann nur momentan wie starre Systeme verhalten, so dass der Pol von je zweien Systemen gänzlich unbestimmt ist. Eine Unbestimmtheit der Bewegung tritt hierbei im Allgemeinen* nicht ein, wenn die Constantenzahl die richtige $3n - 4$ für n Systeme ist, wir haben nur den auf Seite 221 als noch zu-

* Vergl. S. 254 am Schlusse.

lässig hingestellten Fall vor uns, in welchem auf n_1 Systeme $3(n_1 - 1)$ Constanten entfallen. Andererseits können mehrere Systeme sich wie ein einziges starres System verhalten, ohne dass die ganze Polconfiguration durch die gegebenen Stücke bestimmt wäre.

Wir nehmen als einleitendes Beispiel für $n = 3$, zur Bestimmung der Polconfiguration den punktuellen Zug 12, 23 und den nicht durch seinen Träger gehenden Normalstrahl $\overline{13}$ an. Da der Pol 13 einmal im Träger des Zuges, andererseits auf $\overline{13}$ liegen muss, was der Angabe von $2 + 1 = 3$ Constanten entspricht, so verhalten sich σ_1 und σ_3 momentan wie ein starres System. Die Sache gestaltet sich anschaulich nach Bildung der zugehörigen Gelenkkette, in der zur Wahrung der Allgemeinheit der Polzug nicht als bleibendes Gelenk gewählt werden möge. Wir geben vielmehr 12 durch $A_1 A_2$, $B_1 B_2$; 23 durch $C_2 C_3$, $D_2 D_3$ und $\overline{13}$ durch $E_1 E_3$. Fällt nun (Fig. 6) 12 auf 23, so bewegen sich σ_1 und σ_3 momentan wie ein einziges starres System in σ_2 um den Pol 12, 23. Die gegebenen Bestimmungsstücke zählen als $2.2 + 1 = 5$ Constanten und die Kette ist in der That zwangläufig. Für eine Nachbarlage wird der Pol in ganz bestimmter Weise durch $\overline{13}$ auf der Verbindungslinie von 12 und 23 verzeichnet. Drehen sich andererseits $\sigma_1 \sigma_3$ dauernd um einen festen Punkt 12, 23 in σ_2, so ist zwar momentan die Bewegung genau so wie vorhin, aber noch mehr, $\sigma_1 \sigma_3$ verhalten sich jetzt dauernd wie ein starres System σ_{13}. Es ist ganz gleichgiltig, wo man den Pol 13 auf $\overline{13}$ wählen mag. In der That zählt auch dieser Pol, wenn man ihn statt des Normalstrahles $\overline{13}$ gegeben denkt, wie dieser nur als eine Constante, da dann ein geradliniger Polzug von drei Systemen und drei Polen mit der Constantenzahl $3 + 3 - 1 = 5$, derselben Zahl wie vorhin, gegeben ist.

Auch die Figur 5 gehört hierher, wenn die Bedingung, dass 14 auf dem Träger des geradlinigen Zuges liege, unerfüllt gelassen wird. Dann sind die Bestimmungsstücke von einander unabhängig und enthalten 14 Constanten, so dass die Polconfiguration der sechs Systeme bestimmt ist. σ_1 und σ_4, und infolge dessen auch σ_5 und σ_6 bilden ein einziges starres System σ_{1456}. In 12 liegen die Pole 24, 25, 26, in 34 die Pole 31, 35, 36. Auf $\sigma_1 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6$ entfallen jetzt neun statt acht Constanten.

Als Beispiel einer nicht völlig bestimmten Configuration geben wir den geradlinigen Polzug 12, 23, 34, 45 und den nicht auf seinem Träger liegenden Pol 15, d. h. zehn Constanten, während zur völligen Bestimmtheit der Configuration der fünf Systeme elf Constanten erforderlich wären. Nichtsdestoweniger verhalten sich $\sigma_1 \sigma_5$ momentan wie ein starres System, da der Pol 51 nach Satz 8) auf dem Träger des Polzugs liegen müsste, und somit auf diese beiden Systeme 3 Constanten entfallen.

Wir schreiten nunmehr in der allgemeinen Entwickelung fort und denken in einer Kette eine Gruppe von Gliedern als vorhanden, welche sich während der Relativbewegung der Kette momentan wie ein starres System

verhalten muss. Eine Relativbewegung kann dann in keiner Weise durch das Wirken von Kräften an Gliedern der bezeichneten Gruppe eingeleitet werden, ganz einerlei, ob die Kette im Uebrigen zwangläufig ist oder nicht. Insbesondere kann keine Bewegung erzielt werden, wenn in dem Getriebe, welches aus dieser Kette durch Feststellen eines Gliedes der ausgezeichneten Gruppe entsteht, irgend ein anderes Glied derselben zum Angriffsgliede einer Kraft gewählt wird. Man sagt, dass ein Getriebe, welches dieses Verhalten zeigt, sich in einer Todtlage befinde. Aus unseren Entwickelungen folgt, dass aus einer Kette im Allgemeinen eine Reihe von Getrieben in Todtlagen abgeleitet werden kann, sobald eine einzige nachgewiesen ist. Um diese sämmtlich gleichzeitig zu umfassen und den Begriff der Kraft bei einer Definition auszuschliessen, was vom kinematischen Standpunkt aus zu fordern ist, definiren wir die Todtlage an der kinematischen Kette wie folgt:

Eine kinematische Kette befindet sich in einer Todtlage, wenn die Kette Gliedergruppen enthält, von denen jede sich während einer unendlich kleinen Relativbewegung wie ein starres System verhalten muss. Das geometrische Kennzeichen einer solchen **„todten Gruppe“** besteht in einem Widerspruche, welchen die Lage eines Pols von irgend zweien, der Gruppe angehörenden Systemen gegenüber den durch die andern Glieder bereits bestimmten Polen zeigt, wodurch auf die Relativbewegung der todten Gruppe mehr Constanten entfallen, als zur Bestimmtheit ihrer Polconfiguration nothwendig ist.

Auf diesem allgemeinen Kennzeichen fussend, geben wir noch einige Bildungsweisen von Todtlagen, beschränken uns jedoch auf zwangläufige Ketten.

Man ziehe durch den Pol 12 zweier Glieder $\sigma_1 \sigma_2$ einer zwangläufigen Kette $\varkappa$ (in Fig. 7 das Gelenkviereck $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$) einen Normalstrahl und wähle auf ihm in σ_1 den Punkt A_1, in σ_2 den Punkt B_2. Solche zwei Punkte sind als Punktpaar stationärer Entfernung zu bezeichnen, weil sich diese Entfernung während einer unendlich kleinen Bewegung nicht ändert. Man nehme jetzt eine zweite Kette λ, das Gelenk $\sigma_5 \sigma_6$, und wähle in σ_5 den Punkt A_5, in σ_6 den Punkt B_6 so, dass $A_5 B_6 = A_1 B_2$, aber A_5 und B_6 in λ kein Punktpaar stationärer Entfernung bilden. Eine Vereinigung von $A_1 B_5$ und ebenso von $A_2 B_6$ in je einem Gelenkpunkte macht diese bez. zu den Polen 15, 26 und den gewählten Normalstrahl zum Träger des geradlinigen Polzuges 15, 26, 12 der neuen Kette $(\varkappa\lambda)$. Da im Widerspruche mit 7) der Pol 56 nicht auf jenem Träger liegt, so befindet sich die gebildete Kette $(\varkappa\lambda)$ in einer Todtlage mit der todten Gruppe λ. Wiederholungen des Verfahrens führen auf weitere todte Gruppen $\mu\nu\ldots$, sofern man entweder durch 12, oder andere Pole von $\varkappa$, Normalstrahlen

zieht, auf ihnen Punktpaare stationärer Entfernungen annimmt und in diesen die Ketten μ, $\nu \ldots$, wie oben auseinandergesetzt wurde, anschliesst.

Ein eigenthümliches Verhalten zeigt die Kette $(\varkappa\lambda)$, wenn die Entfernungen der gewählten Punktpaare beide gleich Null sind und daher die Pole 15, 26 sich decken. Dann treten zwei geradlinige Züge, nämlich 15, 26, 12 und 15, 26, 56 auf und jede der Kette $\varkappa$ und λ muss sich wie ein starres System verhalten, $(\varkappa\lambda)$ unterscheidet sich durch nichts von einem einfachen Gelenk, so lange nicht durch relative Drehung von $\varkappa$ gegen λ um den Gelenkpunkt 15, 26 die Träger der beiden geradlinigen Polzüge sich vereinigen. In diesem Augenblicke existirt wieder nur ein geradliniger Zug 12, 15, 26, 56, aber die Constantenzahl wird durch sein Auftreten um 1 erniedrigt und die Kette ist in der That in diesem Augenblicke nicht zwangläufig, weil ersichtlich unabhängig von einander die Glieder von $\varkappa$ sowohl, als diejenigen von λ unter sich Relativbewegungen vollziehen können.*

§ 4. Allgemeine Kennzeichen der Zwangläufigkeit kinematischer Ketten.

Die Angabe eines Normalstrahles für den ganzen Verlauf der Bewegung entspricht dem Vorhandensein eines höheren, nicht zwangläufigen Elementenpaares in der Kette.

Ein bleibender punktueller Polzug P_i, dessen Träger im Endlichen liegt, wird durch ein i-faches Gelenk vertreten, d. h. durch ein Gelenk, um dessen Achse sich i Systeme drehen. Liegt der Träger im Unendlichen, so tritt an die Stelle des Gelenkes das i-fache Richtpaar, längs dessen Gleitlinie sich die i Systeme gegen einander verschieben, und der unendlich ferne Punkt der Normalen zur Gleitlinie ist der Träger des punktuellen Polzuges. Da nun alle unendlich-fernen Punkte der Ebene als auf einer Geraden liegend zu denken sind, so ist ein von Richtpaaren herrührender Polzug stets ein geradliniger.

Andere bleibende geradlinige Polzüge treten auf, wenn die Achsen mehrerer Räder sämmtlich in einer Ebene und in einem und demselben Gliede σ_1 liegen. Sind dann die Räder durch $\sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_n$ bezeichnet, so liegen die $n-1$ Pole 12, 13, 14...1n stets auf einer Geraden und nach 7) befindet sich auch der Pol der Bewegung von je zweien dieser Räder auf besagter Geraden. Meistens ist dann der Pol im Berührungspunkt der Radprofile gelegen, wie bei den in Fig. 8 dargestellten Reibrädern $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$, deren Achsen in der Ebene der Figur durch die Pole 12, 13, 14 vertreten sind. Es ist dann bei der Fesstellung der Constantenzahl gleichgiltig, ob man alle gegebenen Pole, nämlich 12, 23, 13, 34 14 des geradlinigen Zuges zählt, und diesen mit $5 + 4 - 1 = 8$ Constanten in Rechnung zieht —, oder ob man nur die drei Achsenpunkte mit $3.2 = 6$ Constanten zählt,

* In einfachster Weise zeigt dieses Verhalten das Galloway'sche Getriebe, ein Gliederviereck mit zwei Paaren gleicher benachbarter Seiten, sofern die Gelenkpunkte, welche ungleiche Seiten verbinden, sich decken.

und von den beiden andern nur die Normalstrahlen $\overline{23}$, $\overline{34}$ mit je einer Constanten berücksichtigt, was ebenfalls die Gesammtzahl von $2.3+2=8$ Constanten ergiebt. Der Einwand, dass die Normalstrahlen hier nicht zu zählen seien, weil sie, als mit dem Träger des Zuges vereinigt liegend, auf diesem keinen Pol verzeichnen können, wird hinfällig durch die Erwägung, dass in Folge besonderer Eigenthümlichkeiten (Reibung, Zähne) die Profilcurven gezwungen sind, auf einander zu rollen. Sähe man von diesen Besonderheiten ab, so zählten die Normalstrahlen in der That nicht, jedes Rad könnte sich unabhängig von den beiden übrigen bewegen, eine Annahme, die gänzlich unzulässig wäre.

Die Kette ist nun zwangläufig, wenn ihre Polconfiguration bestimmt ist, und wir haben daher aus 10a) das folgende Kriterium:

11) Eine n-gliedrige kinematische Kette enthalte p nicht zwangläufige höhere Elementenpaare, P_i i-fache Gelenke und Richtpaare; die Richtpaare bilden insbesondere (auf der unendlich fernen Geraden) k Polzüge von r_k Polen und s_k Systemen, wobei jedes i-fache Richtpaar für $i-1$ Pole zu zählen ist. Die Kette ist dann zwangläufig, wenn

$$p+2\sum_i P_i\,(i-1)-\sum_k k\,(r_k-s_k+1)=3n-4$$

$$s_k-1\leqq r_k\leqq 2s_k-3,$$

und der Werth des für beliebige n' der Glieder gebildeten Ausdrucks linker Hand in obiger Gleichung $\leqq 3n'-4$ ist.*

Das Eintreten von Todtlagen ist bereits im vorigen Paragraphen erörtert. Giebt andererseits das Auftreten eines punktuellen oder geradlinigen Polzugs während der Bewegung zu einer Verminderung der Constantenzahl Veranlassung, so ist in einem solchen Augenblick die Kette nicht zwangläufig, die $3\,n-4$ Normalstrahlen, denen die gegebenen Elemente äquivalent sind, gehören dann einer Γ^n an. (Vergl. S. 231, Fig. 5.)

---

* Herr Grübler gelangt a. a. O. S. 221, Gl. 13) zu einer der obigen ganz ähnlichen Bedingungsgleichung, in der sich statt der $\sum_k k\,(r_k-s_k+1)$ eine Zahl γ, diejenige der von einander unabhängigen Gleitvielseite, befindet. Die Bestimmung von γ wird an einigen Beispielen mit Hilfe eines geometrischen Verfahrens erläutert. An Stelle der obigen Ungleichungen treten die Forderungen: „1. Dass in den Ketten keine geschlossenen Gliedergruppen mit einem Gelenke auftreten und 2. die binären, nur Prismenelemente (Richtelemente nach der oben benutzten Bezeichnung) enthaltenden Glieder keine Gleitlinie ausschliesslich gemein haben.“ Eine geschlossene Gliedergruppe $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_m$ ist vorhanden, wenn σ_1 mit σ_2, σ_2 mit $\sigma_3\ldots$, σ_{m-1} mit σ_m, σ_m mit σ_1 direct durch Gelenke oder Richtpaare 12, 23...m1 verbunden sind. Sind nun 12, 23, 34. .$m-1$ m Richtpaare, ist m1 das einzige Gelenk, so wird der ersten Forderung nicht genügt. Nach den Ergebnissen der vorliegenden Untersuchung bilden 12, 23,... $m-1$ m einen geradlinigen bleibenden Zug von $m-1$ Polen und m Systemen, und der Pol m1 müsste entgegen der Annahme auf dem Träger des Zuges, der unendlich fernen Geraden liegen. Auf $\sigma_1\sigma_m$

Wie in diesem Falle gewisse ausgezeichnete Pole bestimmt werden können, soll später gezeigt werden.

Hier ist auch der Ort, zu zeigen, wie sich Müller-Breslau's Figur F' bei Sonderlagen der Kette verhält.*

Folgende drei Fälle sind zu unterscheiden:

1. Alle Punkte von F' sind im Endlichen gelegen, und keine zwei Gerade $A_i A_i'$ und $B_i B_i'$ (S. 228) decken sich. Dann sind alle Pole eindeutig bestimmt, die Annahme $A_i A_i' \parallel B_i B_i'$ würde nur auf einen unendlich fernen Pol führen.

Ist insbesondere ein Theil f' von F' dem ihm entsprechenden f von F ähnlich, so bilden die zugehörigen Glieder von F eine todte Gruppe, welcher das festgestellte Glied nicht angehört, und der Aehnlichkeitspunkt von f und f' ist der, allen Gliedern der todten Gruppe gemeinschaftliche Pol in Bezug auf das feste Glied.

2. Neben endlich fernen Ecken von F' (unter denen jedenfalls die zu Gelenkpunkten eines Nachbargliedes vom festgestellten gehörenden Ecken sind, dem man behufs Construction von F' eine beliebige endliche Geschwindigkeit ertheilte) möge F' noch unendlich ferne Ecken aufweisen. Dann treten neben endlichen Geschwindigkeiten unendlich grosse auf, oder, da es nur auf Geschwindigkeits-Verhältnisse ankommt, — während die Geschwindigkeit etlicher Glieder unendlich klein ist, bewegen sich andere mit endlichen Geschwindigkeiten. Erstere bilden also eine todte Gruppe, der das festgestellte Glied angehört; die Annahme jeder endlichen Geschwindigkeit eines dem festgestellten benachbarten Gliedes war unzulässig,

---

entfallen demnach drei Constanten und diese Systeme verhalten sich daher dauernd wie ein einziges. — Liege andererseits eine sechsgliedrige Kette $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_6$ vor mit den Gelenken 12, 23, 34, 41 und den Richtpaaren 25, 56, 64; so sind σ_5 und σ_6 binäre Glieder, welche nur Richtpaare enthalten und welchen überdies die Gleitlinie 56 ausschliesslich gemein ist. Dies widerspricht der zweiten Grübler'schen Forderung. Die Gleichung 11) ist durch $7.2 = 3.6 - 4$ erfüllt. Nichtsdestoweniger bilden $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ eine starre Gruppe, da der Pol 24 im Endlichen gelegen ist, derselbe aber auch dem Polzuge der Richtpaare angehören müsste und somit auf $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ $8 + 1 = 9$ statt höchstens $3.4 - 4 = 8$ Constanten entfallen. Soweit besteht also vollständige Uebereinstimmung zwischen den auf gänzlich verschiedenen Wegen gewonnenen Resultaten. Aber es können auch noch in anderer Weise bleibende todte Gruppen auftreten. Z. B. enthalte eine achtgliedrige Kette $\sigma_1 \ldots \sigma_8$ die Gelenke 17, 18, 68, 67 und die Richtpaare 12, 23, 24, 35, 34, 45, 65. Sie ist zwangläufig, weil $2.11 - (7 - 6 + 1) = 3.8 - 4$. Binäre, nur Richtpaare enthaltende Glieder treten gar nicht auf, aber die Glieder $\sigma_1 \sigma_7 \sigma_6 \sigma_8$ bilden dennoch eine bleibende todte Gruppe, da der Pol 16 im Endlichen liegt, er aber andererseits sich auf dem Träger des unendlich fernen Polzuges der Richtpaare befinden müsste. Auf $\sigma_1 \sigma_7 \sigma_6 \sigma_8$ entfallen, wie im vorigen Beispiel, neun Constanten.

* Sofern Richtpaare vorhanden sind, muss man nach S. 228 natürlich erst F^* bilden, und die Entwickelung des Textes bezieht sich dann auf $F^{*\prime}$.

man wird vielmehr die jetzt gekennzeichnete todte Gruppe als ein starres System betrachten und dann auf eine im Endlichen verlaufende Figur F' kommen müssen.

Als wesentliches Ergebniss haben wir demnach das folgende:

12) Besitzt die Figur F' unendlich ferne Ecken, so ist das Getriebe in einer Todtlage, und nur von denjenigen Gliedern aus, deren Knoten solchen Ecken entsprechen, kann durch Wirken einer Kraft Bewegung eingeleitet werden.

3. Mehrere Linienpaare, wie $A_i A_i'$, $B_i B_i'$ decken sich. Dann ist der Pol des Gliedes σ_i in Bezug auf das festgestellte unbestimmt, sofern nur die Bewegung während eines Zeitelementes berücksichtigt wird.

Zur Erledigung des Falles 3) bedarf es der Heranziehung der Bewegung während eines folgenden Zeitelementes oder der Krümmungseigenschaften, zu deren Untersuchung wir uns jetzt wenden.

§ 5. Die Bewegung von n Systemen während zweier aufeinander folgender Zeitelemente.

Die Polconfiguration ist ein vollständiges geometrisches Bild der Relativbewegung, welche n Systeme während eines Zeitelementes vollziehen können. In Folgendem soll eine Figur angegeben werden, welche mit derselben Vollständigkeit die Bewegung während zweier auf einander folgender Zeitelemente wiedergiebt. Als hierzu geeignete Elemente bieten sich für je zwei Systeme die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte von Curvenpaaren dar, welche bei der Relativbewegung jener zwei Systeme im Verhältnisse der Enveloppen zu einander stehen. Die Punkte eines solchen Paares entsprechender Krümmungsmittelpunkte werden wir stets durch denselben grossen lateinischen Buchstaben bezeichnen, dem wir die Systemzahl als untern Zeiger anhängen. $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ wären also zwei Paare der Bewegung von σ_1 in Bezug auf σ_2. Die bekanntlich hierdurch begründete quadratische Verwandtschaft bezeichnen wir durch V^{12}. Sind zu einem Punkte A_i von σ_i die entsprechenden $A_k A_l A_m$ bez. in $\sigma_k \sigma_l \sigma_m$ gegeben, so entsprechen sich natürlich im Allgemeinen $A_k A_l A_m$ nicht unter einander, und es bedarf zur einwurfsfreien Bezeichnung der Angabe der Verwandtschaft, welche durch obere Zeiger bewirkt werde, so dass also die letzten Punkte folgendermassen zu bezeichnen wären: $A_i^{ik,\, il,\, im}, A_k^{ik}, A_l^{il}, A_m^{im}$. Die oben angehängten Zeiger deuten also nur an, in welcher Weise ein Punkt augenblicklich benutzt wird, und werden hin und wieder fortgelassen, sobald keine Unbestimmtheit dadurch entstehen kann.

Von besonderer Wichtigkeit sind drei Punkte dreier Systeme $\sigma_i \sigma_k \sigma_l$, welche sich paarweise in jeder der Verwandtschaften V^{ik}, V^{kl}, V^{li} entsprechen und als Tripel entsprechender Krümmungsmittelpunkte bezeichnet werden sollen.

Ein Tripel wäre durch $A_i^{ik, il}$, $A_k^{ki, kl}$, $A_l^{li, lk}$ oder, wenn überhaupt nur die Bewegung der Systeme $\sigma_i \sigma_k \sigma_l$ betrachtet wird, durch $A_i A_k A_l$ zu bezeichnen.

Da die charakteristische Eigenschaft zweier Punkte $A_i A_k$ dahin ausgesprochen werden kann, dass ihre Entfernung sich während zweier auf einander folgender Zeitelemente nur um eine unendlich kleine Grösse 2ter Ordnung ändert, so können in solchen zwei Punkten die Systeme $\sigma_i \sigma_k$ gelenkig durch ein neues System mit einander verbunden werden, ohne dass die Relativbewegung während jener beiden Zeitelemente dadurch irgendwie beeinflusst würde. Sind insbesondere $3n-4$ solcher Paare von Krümmungsmittelpunkten der Relativbewegung von n Systemen gegeben, und gehören höchstens $3s-4$ Paare beliebigen s jener Systeme an, so erhält man nach S. 222 eine zwangläufige kinematische Kette, sobald nur jedes System zwei Gelenkpunkte aufweist und eine Sonderlage, welche eine augenblickliche Unbestimmtheit der Polconfiguration bedingen würde, ist nicht vorhanden, sobald nur die $3n-4$ Normalstrahlen, auf welchen die Paare liegen, keiner Γ^n angehören. Da diese Kette die Bewegung der n Systeme momentan vollständig wiedergiebt, so können wir sagen:

13) Die Bewegung von n starren Systemen während zweier aufeinander folgender Zeitelemente ist durch Angabe von $3n-4$ Paaren entsprechender Krümmungsmittelpunkte bestimmt, sofern s beliebigen Systemen höchstens $3s-4$ dieser Paare angehören, jedes System mindestens zwei von einander getrennte Punkte aufweist, und die Normalstrahlen der Paare keiner Γ^n angehören.

Ein Tripel verhält sich hiernach genau wie ein Gliederdreieck; d. h. das Tripel ist während beider Zeitelemente starr, wenn die Punkte nicht in gerader Linie liegen, — oder es ist nur während eines Zeitelementes starr, und kann während des andern eine unendlich kleine Bewegung vollziehen, wenn die Tripelpunkte auf einer Geraden liegen, das Tripel ein „geradliniges" ist. Natürlich kann sich ein geradliniges Tripel auch während mehrerer Zeitelemente selbst dauernd starr verhalten, aber es liegt hierzu keine zwingende Nothwendigkeit vor. Der grossen Tragweite wegen, welche das soeben Erkannte für spätere Entwickelungen besitzt, fassen wir das Ergebniss noch einmal zusammen:

14) Die Punkte eines Tripels kann man während zweier, aufeinander folgender Zeitelemente als einem einzigen starren Systeme angehörend betrachten, wenn die Punkte ein Dreieck mit Winkeln von endlicher Grösse bilden. Für ein geradliniges Tripel ist diese Annahme im Allgemeinen nur für ein Zeitelement zulässig.

Geradlinige Tripel sind deshalb besonders beachtenswerth, weil sie stets reell vorhanden sind. Es gilt nämlich der folgende Satz:

15) Bewegen sich drei starre Systeme beliebig in einer Ebene, so giebt es im Allgemeinen auf der Verbindungslinie ihrer Pole ein einziges Tripel; die Punkte desselben bilden mit den Polen sechs Punkte in Involution, und zwar ist dem Pole von je zweien der Systeme der Tripelpunkt des dritten zugeordnet.

Der Beweis zerfällt in zwei Theile: 1. wird gezeigt, dass, wenn es überhaupt ein Tripel giebt, dieses jedenfalls die im Satze angegebene Lage besitzt, und 2. wird aus der Eigenschaft dieser Lage eine stets mögliche eindeutige Construction des Tripels abgeleitet, womit dann sein Vorhandensein nachgewiesen ist.

Seien in allgemeinster Weise V_{12} und V_{23} durch je zwei Paare* gegeben und sei von V_{13} ein Paar bekannt; dann ist nach 13) die Bewegung während zweier Zeitelemente, d. h. auch V^{13} bekannt. Anstatt diese Elemente sofort zum Beweise zu benutzen, construiren wir zunächst zu einem Punkte $T_2^{12,23}$ der Geraden $\overline{12,23}$ die entsprechenden T_1^{12}, T_3^{23} und ziehen dann Fig. 9 (woselbst die oberen Zeiger fehlen) die fünf Paare

$$A_1^{12}A_2^{12},\ T_1^{12}T_2^{12},\ B_2^{23}B_3^{23},\ T_2^{23}T_3^{23},\ C_1^{13}C_3^{13},$$

welche genau dasselbe, wie die gegebenen leisten, heran. Durch gelenkige Verbindung der Punkte jedes der Paare, die wir in Zukunft immer bewirkt denken, entsteht, wie es der Fall sein muss, eine zwangläufige Kette. Bilden die Punkte $T_1^{12}T_2^{12,23}$, T_3^{23} nun ein Tripel, so muss die Kette nach 14) auch dann noch eine unendlich kleine Bewegung vollziehen können, wenn diese drei Punkte in einem und demselben starren Systeme σ_4 liegend gedacht werden. Dann sind aber $T_1 T_2 T_3$ bez. die Pole 14, 24, 34; und nach dem schon einmal auf S. 231 benutzten Burmester'schen Satze sind

$$14,\ 23;\quad 34,\ 12;\quad 24,\ 13$$

Paare einer Involution, womit die erste Hälfte des Beweises geführt ist. Gleichzeitig folgt, dass die Geraden A_1A_2, B_2B_3, C_3C_1 ein Dreieck PQR bilden, so zwar, dass die Verbindungslinien der Ecken desselben mit den Tripelpunkten sich in einem Punkte S schneiden.

Um nun zweitens zu zeigen, dass das Tripel immer vorhanden ist, seien in Fig. 10 auf der Polgeraden ausser den Polen 12, 23, 31 die Paare $A_1^{12}A_2^{12}$, $B_2^{23}B_3^{23}$ entweder gegeben oder aus den gegebenen Bestimmungsstücken von $V^{12}V^{23}$ construirt. Dann bestimmt man das Tripel in eindeutiger Weise wie folgt: Man ziehe ein Dreieck PQR, dessen Seiten PQ, QR, RP bez. durch 12, 23, 31 gehen, ziehe ferner PA_1, QA_2 und schneide dieselben mit einander in U_{12}. Ebenso sei U_{23} der Schnittpunkt von QB_2, RB_3. Dann bestimmen die Geraden $U_{12}\,12$ und $U_{23}\,23$ einen Punkt S und SP, SQ, SR

* Wenn jetzt und in Zukunft kurz von „Paaren" die Rede ist, so sind immer Paare entsprechender Krümmungsmittelpunkte gemeint.

treffen die Polgerade in den gesuchten Tripelpunkten $T_1 T_2 T_3$. Dass $T_1 T_2$ sich in V^{12}, $T_2 T_3$ sich in V^{23} entsprechen, folgt aus bekannten Constructionen. Dass aber $T_1 T_2 T_3$ insbesondere ein Tripel bilden, ergiebt sich durch Annahme beliebiger Paare von $V^{12} V^{23} V^{31}$ auf den Seiten PQ, QR, RP, wodurch Fig. 9 entsteht. Man erhält nun stets dasselbe Tripel, wie man auch PQR wählen mag, denn die Figur, welche irgend einer anderen Annahme $P^* Q^* R^*$ entspricht, steht zur ersten in centrischer Collinear-Verwandtschaft mit der Polgeraden als Collineations-Achse, und das sich ergebende Tripel $P^* Q^* R^*$ muss folglich mit dem ersten identisch sein. Damit ist der vollständige Beweis von 15) erbracht.

Ist nun insbesondere PQR ein Tripel, nennen wir es (Fig. 11) $A_1 A_2 A_3$ und nehmen das Tripel auf der Polgeraden $T_1 T_2 T_3$ hinzu, so sind die Geraden $S\,12$, $S\,23$, $S\,31$ die Aronhold'schen Collineations-Achsen der Tripelstrahlen $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ in Bezug auf die Polgerade. Das heisst:

16) Bewegen sich drei starre Systeme in einer Ebene, so gehen die Aronhold'schen Collineations-Achsen, welche den Strahlen eines Tripels, dessen Ecken nicht in gerader Linie liegen, in Bezug auf die Polgerade zugeordnet sind, durch einen Punkt. Kennt man daher von den drei quadratischen Verwandtschaften der Systeme zwei, so ist auch die Collineations-Achse der dritten in Bezug auf ein Strahlenpaar, bestehend aus der Polgeraden und einem Tripelstrahle, bestimmt; auf dem Tripelstrahle kennt man überdies ein Punktpaar, und kann daher auch die dritte Verwandtschaft construiren.*

* Die Sätze 15) und 16) habe ich bereits in der Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins, Bd. 36, Jahrg. 1890, S. 192 flg., bewiesen, aber die umgekehrte Reihenfolge beobachtet. Nimmt man das Vorhandensein eines nicht geradlinigen Tripels an, so ergiebt sich leicht die behauptete des geradlinigen auf der Polgeraden. Denn die übergeschlossene Kette der Fig. 11 kann dann, und nur dann zwei auf einander folgende unendlich kleine Bewegungen ausführen, wenn $A_1 T_1$, $A_2 T_2$, $A_3 T_3$ durch einen Punkt S gehen, und zwar verhält sich bei der ersten $T_1 T_2 T_3$ wie ein starres System σ_4, dessen Pol in Bezug auf das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ der Punkt S ist. Nach Vollendung dieser Bewegung bleibt dann noch eine zweite in Folge der möglichen unendlich kleinen Relativbewegung von $T_1 T_2$, $T_2 T_3$, $T_3 T_1$ übrig. Nun giebt es zwar in jedem Augenblick nicht geradlinige Tripel in endlicher Anzahl, da aber die Construction eines solchen im Allgemeinen sehr schwierig sein dürfte, so bemühte ich mich, einen von diesen Gebilden völlig freien Beweis für 15) zu finden. Uebrigens ist 16) inzwischen von Herrn Burmester (Prager technische Blätter 1890, Heft 2), 15) in specieller Fassung von Herrn Grübler (Riga'sche Ind.-Zeitung 1891, S. 61) bewiesen worden. Beide Arbeiten machen von dem Begriffe der Geschwindigkeiten Gebrauch und enthalten wichtige metrische Beziehungen. Die oben gegebene Construction des Tripels auf der Polgeraden und ihre Anwendung auf 17) theilte ich Herrn Grübler im September 1890 mit. (Vergl. die Note auf S. 63 von dessen Arbeit, sowie die dort gegebene Construction der Wendepunkte.)

Die beiden letzten Sätze ermöglichen die Bestimmung der V^{ik} in allen denkbaren Fällen. Drehen sich drei Systeme dauernd um die Ecken eines starren Dreiecks, so ist dieses natürlich stets ein Tripel für die Relativbewegung der drei ersten Systeme. Kennt man, wie dies meistens der Fall ist, zwei der Verwandtschaften, so liefert der Satz 16) die dritte. Wie man auch sonst zum Ziel gelangt, ist a. a. O. an einer Reihe von Beispielen gezeigt worden. Enthält hingegen die Kette keine starren Dreiecke, so führt der Satz 15) besser zum Ziel. Man löst insbesondere unter Anwendung der auf S. 241 und 242 gegebenen Construction die Aufgabe:

17) Sind (Fig. 12) zur Bestimmung von $V^{12} V^{23} V^{31}$ dreier bewegter Systeme $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ zwei der Verwandtschaften durch je zwei Paare gegeben, und kennt man von der dritten ein Paar, so suche man zur Bestimmung der dritten das zweite nothwendige Paar.

Es mögen vorliegen:

$$C_1^{12} C_2^{12},\ D_1^{12} D_2^{12},\ E_2^{23} E_3^{23},\ F_2^{23} F_3^{23},\ G_1^{13} G_3^{13}.$$

Man bestimme nach der Bobillier'schen Construction zwei im Uebrigen willkürlich wählbare Paare $A_1^{12} A_2^{12}$, $B_2^{23} B_3^{23}$ auf der Polgeraden, dann weiter nach S. 241 und 242, Fig. 10, das geradlinige Tripel $T_1 T_2 T_3$ und besitzt damit in den Punkten $T_1 T_3$ ein Paar von V^{13}, womit diese bestimmt ist.

Würde $G_1 G_3$ mit der Geraden 12, 23 susammenfallen, so wäre 13 unbestimmt und die Construction auf dem angegebenen Wege undurchführbar. (Vergl. S. 248, Fig. 1.)

Wir ziehen aus den abgeleiteten Sätzen noch einige Folgerungen, welche sich später als nützlich erweisen werden. Zunächst folgt aus der S. 241 und 242 Fig. 10 angegebenen Construction:

18) Sind für die Relativbewegung dreier Systeme die drei Pole und zwei quadratische Verwandtschaften auf der Polgeraden gegeben, so ist auf dieser Geraden auch die dritte Verwandtschaft eindeutig bestimmt.

Aus diesem Satze fliesst dann der allgemeinere:

19) Ist die Polconfiguration einer Reihe bewegter Systeme $\sigma_i \sigma_k \sigma_l \sigma_m \ldots$ gegeben und kennt man V^{ik}, V^{il}; V^{mk}, V^{ml}, so ist auch V^{kl} construirbar.

Denn nach 18) kann man auf jeder der Polgeraden $\overline{ikl}$, $\overline{mkl}$ ein Paar von V^{kl} bestimmen.

Schreiten wir nunmehr zur Betrachtung der Bewegung von $n > 3$ Systemen, so erhalten wir als Figur, welche diese Bewegung während zweier auf einander folgender Zeitelemente darstellt, die Polconfiguration mit ihren $\frac{n.(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$ Polgeraden, sofern auf jeder derselben noch das geradlinige Tripel angegeben ist. Für $n = 4$ sind diese Tripel noch von einander unabhängig, man kann zwei Punkte jedes Tripels willkürlich wählen, und

den dritten als sechsten Involutionspunkt construiren; und durch die $2.4 = 8$ Paare, welchen die gegebenen Punkte offenbar äquivalent sind, muss auch dem Satze 13) zufolge die Bewegung bestimmt sein.

Bei fünf und mehr Systemen hingegen sind die Tripel von einander abhängig. Am einfachsten leuchtet dies ein durch die Erwägung, dass durch jeden Pol dann mehr als zwei Polgerade hindurch gehen, und je zwei Paare von Krümmungsmittelpunkten aus Tripeln zur nämlichen Rollcurven-Tangente führen müssen. Im Folgenden wird zwar die Construction besagter Figur in übersichtlicher Weise aus geeigneten Bestimmungsstücken gezeigt, aber es ist mir nicht gelungen, auf einfache Art das Abhängigkeitsverhältniss der $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ Involutionen von einander auszudrücken, wodurch ein wesentlicher Fortschritt begründet sein würde.

Sei noch einmal hervorgehoben: Genau so, wie die Polconfiguration ein Bild der Relativbewegung von n starren Systemen während eines Zeitelementes giebt, wird diese Bewegung während eines weiteren Zeitelementes durch Hinzufügung des Tripels auf jeder der Polgeraden dargestellt, sobald $n > 3$ ist. Die hierdurch definirte Figur möge durch Φ^n bezeichnet sein.

Es ist sehr leicht, eine Φ^n allgemeinster Natur zu construiren. Man denke hierzu eine Polconfiguration von n Systemen gezeichnet, und bilde, wie oben angegeben, Φ^4 von vier Systemen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$. Sind dann $T_1 T_2$ zwei sich entsprechende Punkte von V^{12} der Geraden $\overline{125}$, so kann man den sechsten Involutionspunkt T_5 zu 12 und den Punktpaaren 15, T_2, 25 T_1 als Tripelpunkt des Tripels der Bewegung von $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_5$ wählen. Ebenso schaffe man sich die Tripel $U_2 U_3 U_5$ auf $\overline{235}$ und $R_3 R_1 R_5$ auf $\overline{315}$. Diese Annahmen müssen dann, wie eine einfache Constantenzählung zeigt, alle V^{ik} der fünf Systeme bestimmen. Man hat bereits von V^{15} die beiden Paare $T_1 T_5$ und $R_1 R_5$ und ebenso von V^{25} und V^{35} zwei Paare. Dann kann man aber nach Satz 19) aus $V^{14} V^{15}$, $V^{24} V^{25}$ (oder $V^{34} V^{35}$) die noch fehlende V^{45} construiren. Nach diesem Verfahren kann man ersichtlich in derselben Weise von einer Φ^{n-1} zu einer Φ^n gelangen.

Aber auch aus Bestimmungsstücken, welche nicht auf Polgeraden gegeben sind, lässt sich eine übersichtliche Bildungsweise von Φ^n herleiten. Seien z. B. gegeben $V^{12} V^{13} V^{14} \ldots V^{1n}$ durch je zwei Paare, von jeder der $V^{23} V^{34} V^{45} \ldots V^{n-1,n}$ hingegen kenne man nur ein Paar. Diese $2(n-1) + n - 2 = 3n - 4$ Paare sind von einander unabhängig, genügen den Anforderungen von 13). Die zugehörige Kette ist leicht zu zeichnen*), und die Figur erscheint überflüssig; andererseits darf auch die Herstellung der Polconfiguration als erledigt angesehen werden, da sie keine nennenswerthen Schwierigkeiten bietet. Man erhält nun nach 18) aus $V^{12} V^{13}$ und dem

*) Für $n = 4$ entsteht Fig. 27 der auf S. 242 angeführten Burmester'schen Arbeit, wenn man das Glied 7 beseitigt.

Pole 23 das Tripel $T_1 T_2 T_3$ auf der Polgeraden $\overline{123}$, und damit in dem Paar $T_2 T_3$ das zur vollständigen Bestimmung von V^{23}, ausser dem gegebenen, nothwendige Paar. In derselben Weise gewinnt man zu $V^{34} V^{45} \dots V^{n-1,n}$ je ein zweites Paar, womit diese Verwandtschaften vollständig bestimmt sind. Am umständlichsten wird nun jedenfalls die Bestimmung von V^{2n}, da σ_2 und σ_n gegenüber irgend zwei andern Gliedern am meisten Zwischenglieder aufweisen. Allmählich fortschreitend, erhält man nach 19) aus

$V^{12} V^{14}$, $V^{32} V^{31}$ die Verwandtschaft V^{24}, dann aus
$V^{12} V^{15}$, $V^{42} V^{45}$ „ „ V^{25}, „ „
$V^{12} V^{16}$, $V^{52} V^{56}$ „ „ V^{26}, „ „
. . . .

endlich aus

$V^{12} V^{1n}$, $V^{n-1,2} V^{n-1,n}$ „ V^{2n}.

Die Gruppe

$$\begin{array}{c} V^{12} V^{13} V^{14} \dots V^{1n} \\ V^{23} V^{24} \dots V^{2n} \end{array}$$

ermöglicht dann [wieder nach 19)] die Bestimmung der beliebigen V^{ik} aus $V^{1i} V^{1k}$, $V^{2i} V^{2k}$.

§ 6. Bestimmung der V^{ik} in Todtlagen.

Besondere Ueberlegungen werden nothwendig, wenn eine Kette todte Gruppen enthält und die Verwandtschaft der Krümmungsmittelpunkte eines Systems einer solchen Gruppe in Bezug auf eines der übrigen Systeme bestimmt werden soll.

Wir betrachten zunächst folgenden einfachen Fall:

In Fig. 13 bilden die Glieder $\sigma_2 \sigma_6 \sigma_3 \sigma_4$ ein Gelenkviereck, in welchem P und A_1 (letzteren als Punkt von σ_4 betrachtet) kein Punktepaar stationärer Entfernung sind. Für das Gliederpaar $\sigma_1 \sigma_5$ ist diese Entfernung hingegen stationär, wenn man P als σ_5 angehörend betrachtet.

Die Kette ist demnach (S. 235) in einer Todtlage und $\sigma_2 \sigma_6 \sigma_3 \sigma_4$ bilden eine todte Gruppe. Die drei Systeme $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ drehen sich um das starre Dreieck $A_1 A_2 A_3$, man kennt V^{12} und V^{23} und würde im Allgemeinen nach Satz 16) V^{13} finden. Im vorliegenden Falle liegt jedoch der Pol 13 in A_1 und $A_1 A_3$ ist daher die Rollcurventangente t_{13} der Bewegung von σ_1 in Bezug auf σ_3. Aus demselben Grunde ist die zweite durch A_1 gehende Dreiecksseite die Tangente t_{12}. Folglich liegen die beiden durch 12 bez. 13 gehenden Collineations-Achsen des Satzes 16) vereinigt mit der Polgeraden, und der Schnittpunkt aller drei ist der Pol 23, d. h. der Inhalt des Satzes wird illusorisch. Man erhält jedoch auch in diesem Falle noch ein Paar zur Bestimmung von V^{13} durch die Bemerkung, dass die im Pole 23 sich deckenden Punkte von σ_2 und σ_3 dort während zweier aufeinander folgender Zeitelemente vereinigt bleiben. Verhält sich doch während einer un-

endlich kleinen Bewegung der Kette die todte Gruppe wie ein starres System und es tritt also erst während des zweiten Zeitelementes eine Relativbewegung von σ_2 gegen σ_3 ein. Es ist demnach gestattet, σ_2 und σ_3 im Pole durch ein Gelenk verbunden zu denken, auch wenn es sich um zwei auf einander folgende Bewegungen handelt. Construirt man demnach zu 23 als Punkt C_2^{12} den entsprechenden C_1^{12}, so entsprechen sich diese beiden Punkte auch als $C_3^{13} C_1^{13}$, und dies Paar bestimmt, da t_{13} bekannt, V^{13}. Die übrigen V^{ik} sind dann leicht zu bestimmen.

Wir geben der Wichtigkeit dieser besonderen Beziehung wegen dem Ergebnisse die folgende allgemeine Fassung:

20) Zwei beliebige Glieder $\sigma_i \sigma_k$ einer todten Gruppe kann man in ihrem Pole ik durch ein Gelenk verbunden denken, sofern die Untersuchung sich auf höchstens zwei auf einander folgende Zeitelemente erstreckt. Kennt man nun V^{il}, wo σ_l der todten Gruppe nicht angehört, so construire man zu ik den entsprechenden Punkt von σ_l in V^{il}, und diese beiden Punkte entsprechen sich dann auch in V^{kl}.

Eine etwas andere Form nimmt dieser Satz an, wenn Nachbarglieder der todten Gruppe und der übrigen Glieder in Betracht kommen.

Zur Erzielung möglichster Kürze des Ausdrucks nennen wir die Gelenkpunkte, in denen die todte Gruppe den übrigen Gliedern angeschlossen ist, die „Anschlusspunkte“ und die sie enthaltenden Glieder die „Anschlussglieder“. Ist dann σ_p ein Anschlussglied, das nicht der todten Gruppe angehört, so sei daran erinnert, dass in seinem Anschlusspunkte alle Pole von Gliedern der todten Gruppe in Bezug auf σ_p vereinigt liegen. Z. B. liegen im Punkte A_1 oder 14 der Figur 13 auch die Pole 12, 13, 16.

Von den beiden im Gelenkpunkte il verbundenen Gliedern σ_i und σ_l gehöre σ_i der todten Gruppe, σ_l dieser Gruppe nicht an. V^{il} ist ausgeartet, jedem der beiden in il liegenden Punkten von σ_i und σ_l entsprechen die sämmtlichen Punkte des jedesmaligen anderen Systems und umgekehrt, — jedem beliebigen Punkte der Ebene, mag man ihn zu σ_i oder σ_l rechnen, entspricht stets der Pol il.

Ist nun σ_k irgend ein System der todten Gruppe, so entspricht insbesondere dem Pole ik, wenn man ihn in σ_i liegend denkt, auch il in der Verwandtschaft V^{il}. Mit il liegt kl vereinigt; folglich ist das nach 20) gewonnene Punktpaar von V^{kl} der Pol kl und ein ihm entsprechender Punkt. Dieser letztere liegt aber bekanntlich auf der Rollcurven-Tangente t_{kl}.

Satz 20) nimmt demnach die folgende specielle Form an:

20a) Sind $\sigma_i \sigma_l$ zwei im Gelenkpunkte il mit einander verbundene Anschlussglieder, und gehört σ_i der todten Gruppe, σ_l derselben nicht an; ist ferner σ_k ein beliebiges, nicht σ_l gelenkig angeschlossenes Glied der todten Gruppe, so liegt der

Pol kl mit il vereinigt und die Verbindungslinie ik, il oder ik, kl ist die Rollcurven-Tangente t_{kl} der Bewegung von σ_k in Bezug auf σ_l.

Diese beiden Sätze erweisen sich in allen verwickelten Fällen als ausreichend zur Bestimmung der verschiedenen V^{ik}. Das Auftreten mehrerer todten Gruppen braucht nicht besonders untersucht zu werden, da die Sätze 20) und 20a) unabhängig davon sind, ob diejenigen Glieder, welche einer fixirten todten Gruppe nicht angehören, ihrerseits noch solche Gruppen aufweisen oder nicht. Die Gesammtheit aller dieser Glieder bezeichen wir als „bewegliche Gruppe", insofern sie in Bezug auf die todte Gruppe, und im Allgemeinen auch unter sich, Relativbewegungen ausführen können. Eine Ausnahme wäre dann nur die auf S. 236 als möglich nachgewiesene Kette, welche sich wie ein zweigliedriges Gelenk verhält und die uns hier deshalb nicht interessirt.

Wir beschränken uns auf die Behandlung eines Beispiels, welches in gewisser Hinsicht allgemeine Eigenschaften zeigt. In der durch Fig. 14 dargestellten Todtlage einer Kette ist $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ die bewegliche Gruppe $\varkappa$, $\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8$ die todte Gruppe λ, wie man nach Construction des Poles 13 sofort erkennt. (Vergl. S. 235.) Es kann sich hier nur um die Bestimmung der Verwandtschaft eines Systemes von $\varkappa$ in Bezug auf eins von λ handeln und zwar sind folgende, wesentlich von einander verschiedene Aufgaben möglich. Gesucht werde:

a) V^{17} eines Anschlussgliedes σ_1 von $\varkappa$ und eines nicht gelenkig mit ihm verbundenen Anschlussgliedes σ_7 von λ;

b) V^{16} eines Anschlussgliedes σ_1 von $\varkappa$ und eines Nicht-Anschlussgliedes σ_6 von λ;

c) V^{47} eines Nicht-Anschlussgliedes σ_4 von $\varkappa$ und eines Anschlussgliedes σ_7 von λ;

d) V^{46} von zwei Nicht-Anschlussgliedern.

Lösung von:

a) Man bestimme in V^{13} zu A, als σ_3 angehörend betrachtet, den entsprechenden Punkt in σ_1. Diese Punkte bilden dann auch ein Paar von V^{17}. Nach 20a) ist die Gerade $\overline{15,\ 57}$ oder $\overline{17,\ 57}$ die Rollcurven-Tangente t_{17} und damit hat man die zur Bestimmung von V^{17} nothwendigen Stücke gewonnen.

b) Man bestimme, wie soeben gezeigt, V^{17}; darauf zum Pole 67, als Punkt von σ_7 betrachtet, den ihm in V^{17} entsprechenden von σ_1 und hat damit nach 20) ein Paar von V^{16}. Andererseits ist nach 20a) die Gerade $\overline{15,\ 56}$ die Tangente t_{16}, womit V^{16} bestimmt ist.

c) A und B bilden ein Paar von V^{47}.* Ist dann nach a) V^{17} bestimmt, so kann man zu C, als Punkt von σ_1 betrachtet, den ihm ent-

* Im Allgemeinen würde man zum Anschlusspunkte von σ_7 erst den ihm entsprechenden von σ_4 in V^{47} construiren müssen.

sprechenden in V^{17} construiren, und diese Punkte bilden auch ein Paar von V^{47}, d. h. man besitzt deren zwei, wie zur Bestimmung von V^{47} nothwendig ist.

d) Man construire nach c) V^{47} und V^{45}, nämlich die Verwandtschaften des gegebenen Gliedes von $\varkappa$ in Bezug auf zwei Anschlussglieder von λ, welche verschiedenen Anschlusspunkten angehören. Man bestimme ferner die Pole dieser beiden Glieder in Bezug auf das gegebene von λ, also die Punkte 67, 65. Der Punkt 67, als σ_7 angehörig betrachtet, und der ihm in V^{47} entsprechende Punkt bilden dann nach 20) ein Paar von V^{46}, und ebenso 65 und der ihm in V^{45} entsprechende das nothwendige zweite Paar von V^{46}.

§ 7. Mehrdeutig bestimmte Pole. Verzweigungslagen.

Sind $3n-4$ Normalstrahlen einer Γ^n gegeben, so sind ihnen unendlich viele Polconfigurationen einbeschreibbar, und die Bewegung während des einen Zeitelementes ist unbestimmt. In diesem Falle giebt es, sofern die n Systeme einer zwangläufigen Kette angehören, für je zwei etlicher Systeme eine endliche Anzahl von Polen, um welche insbesondere zwei consecutive Bewegungen stattfinden. Jeder Systempunkt eines der beiden Systeme beschreibt dann im anderen eine Curve mit vielfachem Punkte und die Normalen der einzelnen Zweige dieses Punktes sind nach jenen ausgezeichneten Polen gerichtet. Eine solche „Verzweigungslage" der Kette tritt also ein, wenn die $3n-4$ Paare entsprechender Krümmungsmittelpunkte, welche nach 13) die Φ^n bestimmen, auf $3n-4$ Normalstrahlen einer Γ^n liegen.

Dann kann für eine unendlich kleine Bewegung zweier Glieder σ_i und σ_k der Pol ik auf $\overline{ik}$ willkürlich gewählt werden und die Bestimmung der besonderen Pole erfordert die Heranziehung der V^{ik}, wie sich zeigen wird.

Die Lösung der allgemeinen Aufgabe scheint mit bedeutenden Schwierigkeiten verknüpft zu sein, mir ist sie nur für $n=3$ gelungen.*

Seien, genau wie in der Aufgabe 17) Fig. 12, zur Bestimmung der Bewegung von $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ die Paare

$$C_1^{12}C_2^{12},\ D_1^{12}D_2^{12},\ E_2^{23}E_3^{23},\ F_2^{23}F_3^{23},\ G_1^{13}G_3^{13}$$

gegeben, von denen aber (Fig. 1) $G_1^{13}G_3^{13}$ auf der Polgeraden $\overline{123}$ liege. Dann ist 13 nicht als Schnitt der Geraden $G_1^{13}G_3^{13}$ mit $\overline{12,\ 23}$ bestimmt, die fünf Normalen gehören nach S. 235 einer Γ^3 an. Man construire, wie

* Für $n=2$, dem durchschlagenden Kurbelgetriebe, gab Aronhold die Lösung in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preussen 1872, Bd. 51, S. 140. Sind A_1A_2, B_1B_2 die gegebenen Paare einer Geraden, so giebt es zwei Pole 12_α, 12_β, die Doppelpunkte der Involution A_1B_2, B_1A_2.

in 17), zunächst auf der Polgeraden die Paare $A_1^{12} A_2^{12}$, $B_2^{23} B_3^{23}$ und hat damit auf dieser Geraden die folgenden Elemente:

$$12,\ 23,\ A_1^{12} A_2^{12},\ B_2^{23} B_3^{23},\ G_1^{13} G_3^{13}.$$

Innerhalb dieses linearen Gebietes wähle man den Punkt $X_2^{12,23}$ beliebig und bestimme X_1^{12}, X_3^{23}. Ist nun $X_1 X_2 X_3$ ein Tripel, so ist der Pol 13 als sechster Punkt der durch $X_3\,12$, $X_1\,23$, X_2 gegebenen Involution bestimmt. Man nenne diesen, im Allgemeinen falschen Pol, 13* und construire aus 13*, $G_1^{13} G_3^{13}$ zu X_3 den entsprechenden Punkt X_1^{13*}. Nur wenn X_1^* mit X_1 zusammenfiele, wäre die Annahme, dass $X_1 X_2 X_3$ ein Tripel sei, richtig. Thatsächlich hingegen beschreiben bei veränderlichem X_2 die Punkte $X_1 X_1^*$ projective Reihen, da ihre gegenseitige Zuordnung eindeutig ist, und die Doppelpunkte dieser Reihen, $T_1^\alpha T_1^\beta$ sind Tripelpunkte zweier Tripel $T_1^\alpha T_2^\alpha T_3^\alpha$, $T_1^\beta T_2^\beta T_3^\beta$; ihnen sind dann schliesslich die beiden Pole $13^\alpha 13^\beta$ in eindeutiger Weise zugeordnet. Dieselben können reell oder imaginär getrennt, oder reell vereinigt sein.

Die soeben erledigte Aufgabe lässt sich dahin verallgemeinern, dass an Stelle der Gelenkvierecke mit den Gegengliedern $\sigma_1 \sigma_2$, $\sigma_2 \sigma_3$ allgemeine zwangläufige Ketten treten, die sich natürlich nicht in Verzweigungslagen befinden dürfen. Man kann dann genau wie oben die bisher offene, nicht zwangläufige Verbindung durch das Glied $G_1 G_3$ zwangläufig schliessen, und erhält eine Verzweigungslage, wenn $G_1 G_3$ auf der Polgeraden $\overline{123}$ liegen, sofern wieder in σ_1 und σ_3 das Glied $G_1 G_3$ angeschlossen ist.

Besonders hervorgehoben zu werden verdient, dass durch obige Entwickelung nur V^{13} auf der Polgeraden bestimmt ist, da man ausserhalb dieser Geraden gar kein Paar von V^{13} kennt. Dass andererseits die Gelenkkette aber zwangläufig ist, liegt in dem Umstande begründet, dass die durch Gelenkpunkte gegebenen Paare nicht nur während zweier auf einander folgender Zeitelemente, sondern während des ganzen Verlaufes der Bewegung constante Entfernung von einander behalten. Wie nun die Polbestimmung schon die Betrachtung von drei auf einander folgenden Lagen der Kette nothwendig macht, so würde die Bestimmung aller V^{ik} noch die Heranziehung einer vierten nothwendig machen. Beim durchschlagenden Kurbelgetriebe stehen der Symmetrie der Figur wegen in der Verzweigungslage die Tangenten in den zweideutig bestimmten Polen senkrecht zur Geraden, welche die vier Gelenkpunkte enthält, und daher sind in diesem besonderen Falle die quadratischen Verwandtschaften ohne weitere Hilfsmittel zu bestimmen. Auf andere einfache Fälle der Art werden wir später kommen.*

* Vergl. auch die Figur 14 meiner Arbeit a. a. O. Ich bemerke, dass der Schluss jener Arbeit sich nur auf diese Figur bezieht, und die V^{ik} nur dann bestimmt sind, wenn die Punkte jedes Paares bleibende Gelenke sind oder mindestens in drei auf einander folgenden Zeitelementen stationäre Entfernung haben, was dort nicht mit der nöthigen Schärfe hervorgehoben ist.

Die Schwierigkeit, welche die Polconstruction der allgemeinen Verzweigungslage für $n > 3$ bietet, ist wesentlich in dem Umstande begründet, dass auch nicht eine einzige quadratische Verwandtschaft gegeben ist, von der ausgehend man geradlinige Tripel herleiten könnte. Die Gliederzahl der zugehörigen Gelenkkette, nämlich $n + (3n - 4) = 4(n - 1)$ wächst mit zunehmenden n ja auch sehr schnell, ist für $n = 4$ schon 12 (vergl. Fig. 4), so dass die meistens auftretenden Getriebe von diesen Sckwierigkeiten unberührt bleiben.

Specielle Verzweigungslagen, wie sie häufig vorkommen, und welche der Behandlung verhältnissmässig leicht zugänglich sind, kann man sich folgendermassen entstanden denken: Man nehme eine Kette $\varkappa$, das Gelenkviereck $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ in Fig. 15, und bestimme ein Punktpaar $A_1 B_3$ stationärer Entfernung. Ebenso bestimme man in einer anderen Kette λ, dem Gliederviereck 5 6 7 8, ein Punktpaar $A_5 B_7$ ebenso grosser stationärer Entfernung und schliesse, wie in der Figur geschehen, A_1 gelenkig an A_5, B_3 gelenkig an B_7. Die neugebildete Kette befindet sich dann in einer Verzweigungslage, weil die Polgeraden $\overline{15, 57}$, $\overline{13, 37}$, als deren Schnitt im Allgemeinen der Pol 17 gefunden würde, sich decken. In Folge dessen ist jeder Pol eines Gliedes von $\varkappa$ in Bezug auf eins von λ (mit Ausnahme der Anschlusspunkte 15, 37) in der neugebildeten Kette $(\varkappa\lambda)$ unbestimmt oder, besser gesagt, mehrdeutig bestimmt. Wir construiren nun, behufs Ermittelung von 17, in V^{57} zu A_5^{57} den entsprechenden A_7^{57}.

Dieses Punktpaar darf auch als $A_1^{17} A_7^{17}$ bezeichnet werden, da A_1 und A_5 während des ganzen Verlaufs der Bewegung vereinigt bleiben. Ebenso construire man zu B_3^{13} den entsprechenden B_1^{13} und bedenke, dass dieselben ebenfalls ein Paar $B_7^{17} B_1^{17}$ bilden.

Diese beiden Paare $A_1^{17} A_7^{17}$, $B_1^{17} B_7^{17}$ bestimmen aber nach Aronhold's Construction die gesuchten Pole $17^\alpha 17^\beta$ als Doppelpunkte einer Involution, von der $A_1 B_7$, $B_1 A_7$ zwei Punktpaare sind. Die Ermittelung der übrigen Pole geht dann linear vor sich, man erhält zwei Polconfigurationen. Jeder Punkt eines Systemes von $\varkappa$ beschreibt in einem beliebigen System von λ einen Doppelpunkt seiner Bahn.

Schliesst man nun in derselben Weise eine dritte Kette μ, das Gelenkviereck $\sigma_9 \sigma_X \sigma_{XI} \sigma_{XII}$ in Fig. 16, an λ, so hat die Kette $(\varkappa\lambda\mu)$ $2^2 = 4$ Polconfigurationen.

Der Gang des Verfahrens zur Polbestimmung ist leicht zu übersehen. Innerhalb $(\varkappa\lambda)$ und $(\lambda\mu)$ dürfen wir alle Pole als bestimmt voraussetzen; es handelt sich also nur noch um Festlegung eines Poles zweier Systeme, von denen das eine $\varkappa$, das andere μ angehört, z. B. von 19. Gegeben ist 69; als gefundene Pole sind zu betrachten 18^α, 18^β; 89^γ, 89^δ. Bei der weiteren Verwendung dieser Pole ist sehr zu beachten, dass nie zwei Pole aus verschiedenen der Reihen $\alpha\beta$ oder $\gamma\delta$, sondern nur aus $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$ benutzt werden dürfen, denn nur die Reihen

der letzten Reihenpaare sind von einander unabhängig. Folglich sind die Linien

$$\overline{16^\alpha, 96};\quad \overline{16^\beta, 96};\quad \overline{18^\alpha 98^\gamma};\quad \overline{18^\alpha 98^\delta};\quad \overline{18^\beta 98^\gamma};\quad \overline{18^\beta 98^\delta}$$

Configurationsgerade und man findet, mit leicht verständlicher Bezeichnung, als Schnittpunkt

von $\overline{16^\alpha, 96}$ und $\overline{18^\alpha, 98^\gamma}$ den Pol $19^{\alpha\gamma}$,
„ $\overline{16^\alpha\ 96}$ „ $\overline{18^\alpha\ 98^\delta}$ „ „ $19^{\alpha\delta}$,
„ $\overline{16^\beta\ 96}$ „ $\overline{18^\beta\ 98^\gamma}$ „ „ $19^{\beta\gamma}$,
„ $\overline{16^\beta\ 96}$ „ $\overline{18^\beta\ 98^\delta}$ „ „ $19^{\beta\delta}$.

Die n-malige Wiederholung des angewendeten Bildungsverfahrens würde auf eine Kette mit 2^{n-1} Polconfigurationen führen, welche alle durch wiederholte Construction der Doppelpunkte quadratischer Involutionen, neben linearen Constructionen, zu bestimmen wären.

Wir kehren noch einmal zur Fig. 15 zurück und setzen insbesondere voraus, dass das in $\varkappa$ gewählte Punktpaar stationärer Entfernung $A_1 B_3$ ein Paar entsprechender Krümmungsmittelpunkte sei. Dann entsprechen in V^{17} dem Punkte A_1 zwei verschiedene Punkte, d. h. die Involution hat vereinigte Doppelpunkte $17^\alpha 17^\beta$ in A_1. Da dieser Fall also den Uebergang zwischen reellen und imaginären Polconfigurationen darstellt, so wird er auch geeignet zur Aufstellung von Kriterien für diese beiden Arten sein. Für ein Punktpaar stationärer Entfernung ist diese entweder ein Maximum oder ein Minimum, und nur wenn die Punkte ein Paar entsprechender Krümmungsmittelpunkte sind, tritt weder das Eine, noch das Andere ein, wenn nicht überdies die Punkte Bahnen mit stationären Krümmungskreisen beschreiben u. s. w., — Sonderfälle, die wir als nicht eintretend voraussetzen. Wie nun eine einfache Ueberlegung zeigt, kann man sagen:

Die Pole sind nur dann reell und getrennt, wenn die stationäre Entfernung der Anschlusspunkte in jeder der Theilketten $\varkappa$ und λ ein Maximum, oder in jeder ein Minimum ist.

Denn nur in diesem Falle ist endliche Bewegung möglich, hingegen nur eine unendlich kleine unbestimmte, wenn in einer Kette die Entfernung ein Maximum, in der andern ein Minimum ist, ein Zeichen, dass die besondern Pole, um welchen die zweite Bewegung erfolgen kann, imaginär sind.

Man erhält nun das gesuchte Kriterium für die verschiedenen Charaktere, welche ein Punktpaar $A_i B_k$ stationärer Entfernung hiernach haben kann, folgendermaassen: Man construire zu B_k den Punkt B_i und denke σ_i für den Augenblick fest. Dann beschreibt B_k einen unendlich kleinen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt B_i ist. Je nachdem also B_i innerhalb oder ausserhalb der Strecke $A_i B_k$ liegt, wird diese Entfernung abnehmen oder wachsen, d. h.:

Um über den Charakter eines Punktpaares stationärer Entfernung zu entscheiden, construire man zu einem dieser Punkte den ihm entsprechenden Krümmungsmittelpunkt, je

nachdem dieser $\frac{\text{innerhalb}}{\text{ausserhalb}}$ der gegebenen Strecke liegt, ist diese ein $\frac{\text{Maximum}}{\text{Minimum}}$.

Wir gehen jetzt noch einen Schritt weiter und nehmen an, dass sowohl in $\varkappa$, als in λ die Anschlusspunkte entsprechende Krümmungsmittelpunkte seien. Dann reduciren sich die beiden Punktpaare der Involution auf ein einziges; die Involution ist also unbestimmt und um jeden Punkt ihres Trägers sind zwei aufeinander folgende unendlich kleine Bewegungen von σ_1 gegen σ_7 möglich. Zur Bestimmung derjenigen Pole, um welche insbesondere drei solcher Bewegungen möglich sind, reicht die quadratische Verwandtschaft nicht mehr aus. Zieht man noch in Betracht, dass die oben gestreiften Besonderheiten der Krümmungsmittelpunkte auch hier eintreten können, so leuchtet ein, dass zu einer einigermassen abschliessenden Behandlung selbst dieses einfachen Falles noch ausserordentlich viel fehlt.

Ganz eigenthümlich verhält sich die Kette $(\varkappa\lambda)$ der Fig. 15, wenn in $\varkappa$ sowohl als in λ die beiden Punkte stationärer Entfernung sich decken, oder, was dasselbe ist, diese Entfernung gleich Null ist. Man wähle dementsprechend in $\varkappa$ $A_1 B_3$ als sich deckend, und desgleichen in λ $A_5 B_7$, doch mögen die Pole 13, 57 von der Wahl ausgeschlossen sein. Dann liegen in $(\varkappa\lambda)$ die Pole 15, 37 auf einander. Befinden sich nun die drei Punkte 57, (15, 37), 13 nicht in gerader Linie, so hat man die auf S. 236 erörterte Todtlage; $\varkappa$ und λ verhalten sich wie starre Systeme so lange, bis die erwähnten drei Punkte in Folge der Relativbewegung von $\varkappa$ gegen λ um den Punkt (15, 37) in eine Gerade rücken, und in diesem Augenblick tritt die Verzweigungslage ein. (15, 37) ist natürlich jetzt einer der gesuchten Pole, etwa 17^α. In der That ergiebt sich das auch aus der allgemeinen Entwickelung, da hier $A_1 B_7$ vereinigt liegen, und daher dieser Punkt, der ein Doppelpunkt der durch $A_1 B_7$, $B_1 A_7$ gegebenen Involution ist. Der andere Doppelpunkt, d. h. der Pol 17^β, ist dann der von 17_α durch B_1 und A_7 harmonisch getrennte Punkt. In 17^β findet eigentliche Berührung der im Allgemeinen dort nicht mit einer Singularität behafteten Rollcurven von $\sigma_1 \sigma_7$ statt; in 17^α hingegen besitzen diese Rollcurven beide einen isolirten Punkt, wie ihn jeder Gelenkpunkt darstellt. Die 17^α zugewiesene Bewegung lässt $\varkappa$ und λ so lange in Starrheit verharren, bis nach Drehung um 180^0 von $\varkappa$ gegen λ abermals 57, (15, 37), 13 in eine Gerade rücken und dadurch eine andere Verzweigungslage entsteht, welche Relativbewegungen innerhalb $\varkappa$ und λ zulässt.

Auf den Specialfall des Galloway'schen Getriebes wurde schon S.236 in einer Note hingewiesen. Bekanntlich besitzt die Rollcurve jedes der kürzern Schenkel im Pole 17^α (sofern wir unsere Bezeichnung beibehalten) einen Doppelpunkt mit reellen Zweigen, aber diese Thatsache widerspricht keineswegs dem oben behaupteten Auftreten eines isolirten Punktes.

Denn die Berührung der Rollcurven längs eines jener reellen Zweige der Singularität entspricht eine ganz andere, eine im Allgemeinen nicht auftretende Todtlage, in der die kürzern Schenkel zwar eine Gerade bilden, aber einen gestreckten Winkel mit einander einschliessen.*

Eine ganz andere Bildungsweise von Verzweigungslagen ist diese: Man wähle in einer Kette λ eine Reihe von Punktpaaren nicht stationärer Entfernung und schliesse in jedem derselben λ andere Ketten $\varkappa$, μ, $\nu \ldots$ in Punktpaaren stationärer Entfernung der letzten Ketten gelenkig an. Dann bildet λ in der neuen Kette $(\lambda\varkappa\mu\nu\ldots)$ eine todte Gruppe, aber die Glieder jeder der Ketten $\varkappa\mu\nu\ldots$ können unendlich kleine Relativbewegungen vollziehen, so zwar, dass während eines Zeitelementes die Bewegung eines Gliedes aus irgend einer dieser Ketten in Bezug auf ein Glied aus einer beliebigen andern ganz unbestimmt ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung erhellt auch aus der früheren Bildungsweise, da in $(\varkappa\lambda)$ jedes Punktpaar der todten Gruppe λ als Punktpaar stationärer Entfernung aufzufassen ist, weil sich während eines Zeitelementes die ganze Gruppe λ wie ein starres System verhält. Es sind also die Ketten $(\varkappa\lambda)$ und μ wirklich in Punktpaaren stationärer Entfernung an einander geschlossen und dies behält Geltung für $\nu \ldots$

Die Anzahl der Möglichkeiten, welche sich hinsichtlich der Bestimmung mehrdeutiger Pole darbieten, ist hier ausserordentlich gross, so dass eine erschöpfende Behandlung kaum durchführbar sein möchte. Wir beschränken uns daher auf ein Beispiel:

In Fig. 17 sei λ das Gelenkviereck $\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6$, $\varkappa$ und μ seien bez. die Gliederpaare $\sigma_1\sigma_8$, $\sigma_2\sigma_7$. Dann handelt es sich um die Bestimmung der mehrdeutigen Pole 12, 28, 78, 71. Zur Bestimmung von 12 etwa ermittele man zunächst nach dem auf S. 247 unter b) angegebenen Verfahren $V^{16}\,V^{23}$; bestimme dann zum Pole 26, indem man ihn als Punkt B_6^{16} betrachtet, den entsprechenden B_1^{16}. Diese Punkte bilden dann auch ein Paar $B_2^{12}\,B_1^{12}$. Ebenso liefert die Bestimmung des zu 13, oder A_3^{23}, entsprechenden A_2^{23} ein Paar $A_1^{12}A_2^{12}$. Die Pole $12^\alpha\,12^\beta$ sind dann wieder die Doppelpunkte der Involution $A_1\,B_2$, B_1A_2. Die Bestimmung jedes der drei anderen Pole kann genau so durchgeführt werden, wird aber besser unter Benutzung der gefundenen Pole linear vollzogen.

Wir beschliessen unsere Untersuchungen mit der Darlegung nachstehenden Falles, in welchem nicht allein die mehrdeutigen Pole, sondern auch die mehrdeutigen quadratischen Verwandtschaften mit unseren Hilfsmitteln bestimmt werden können. Liegen **alle** Gelenkpunkte einer Gelenkkette auf einer Geraden, dann ist diese Symmetrie-Achse des ganzen Gebildes, und die Rollcurventangenten stehen daher sämmtlich senkrecht zu jener Geraden, dem „**Träger der Gelenkpunkte**", wie wir sie im Anschlusse an das über geradlinige Polzüge Gesagte nennen wollen. Die auftretenden Involutionen schreiben wir wieder wie auf S. 231,

* Vergl. Burmester „Kinematik" Bd. I, § 130, insbesondere S. 309.

haben aber jetzt zu bedenken, dass, wenn Pole insbesondere Krümmungsmittelpunkte sind, in den Doppelpunkten der Involution mehrere Pole vereinigt liegen. Sind z. B. bei dem durchschlagenden Kurbelgetriebe der auf einander folgenden Glieder $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$, die Gelenkpunkte 12, 23, 34, 41, so sind die Pole 13, 24 vereinigt, was wir durch eine Klammer andeuten wollen, und zwar erhält man $[13, 24]^\alpha$, $[13, 24]^\beta$ als Doppelpunkte der durch die Punktpaare 12, 34; 23, 14 bestimmten Involution. In Folge ihrer besondern Bedeutung als Krümmungsmittelpunkte wird auch die Anzahl der Pole kleiner als $2n-3$, der auf S. 230 Satz 8 zur Bestimmung der Bewegung von n Systemen als nothwendig gefundenen Zahl sein. Die wahre Zahl wird sich vielmehr aus den allgemeinen Zwanglaufbedingungen der Gelenkketten ergeben, da nach einer geringen Bewegung die Verzweigungslage beseitigt ist. Man kann in der That aus jeder Gelenkkette eine andere ableiten, deren sämmtliche Gelenkpunkte momentan in einer Geraden liegen, wenn man die gegebene Kette auf einen Träger projicirt, und die Projectionen der Gelenkpunkte, welche einem und demselben Gliede angehören, auch jetzt starr mit einander verbunden denkt. Ist die ursprüngliche Kette zwangläufig, so ist es auch die abgeleitete, denn Glieder- und Gelenkzahlen sind überall dieselben. Der Deutlichkeit wegen stellen die folgenden Figuren Ketten dar, deren Gelenkpunkte nur näherungsweise in gerader Linie liegen, die Untersuchung hingegen bezieht sich stets auf die durch Projection abgeleitete Verzweigungslage.

In Fig. 18 sind von der Involution

$J(1234)$ gegeben 12, 34; 23, 41 u. man findet $[13,24]^\alpha$, $[13,24]^\beta$ oder kurz $[13,24]^{\alpha,\beta}$
von $J(2356)$ „ 23, 56; 26, 35 „ „ „ $[25,36]^\gamma$, $[25,36]^\delta$ „ „ $[25,36]^{\gamma,\delta}$

Daraus folgt dann in linearer Weise aus:

$12, 36^{\gamma,\delta}$; $13^{\alpha,\beta}, 26$; 23 die Bestimmung von $16^{\alpha\gamma,\, \alpha\delta,\, \beta\gamma,\, \beta\delta}$.

Die Bewegung von σ_1 gegen σ_6 ist also (wie diejenige von σ_2 gegen σ_5) vierdeutig. Die übrigen Pole ergeben sich, wie 16, leicht durch lineare Construction sechster Involutionspunkte. Fällt 12 auf 34, 35 auf 26, so vertreten $12, 36^\gamma$ und $13^\alpha 26$ nur ein einziges Punktpaar; 16 ist ganz unbestimmt. $\sigma_1 \sigma_4$, $\sigma_2 \sigma_3$, $\sigma_5 \sigma_6$ verhalten sich bez. wie drei starre Systeme σ_{14}, σ_{23}, σ_{56}, welche nur durch zwei Gelenke verbunden sind, wenn man σ_{14} um $(12, 34, 13^\alpha)$, σ_{56} um $(26, 35, 36^\gamma)$ gegen σ_{23} dreht. Die Kette ist also nicht mehr zwangläufig. D. h. beim Passiren einer Wechsellage kann die Eigenschaft der Zwangläufigkeit verloren gehen.*

Auch in den folgenden Ketten ist nur derjenige Pol bestimmt, dessen Ermittelung die grössten Schwierigkeiten bietet.

---

* Herr Grübler gelangt a. a. O. S. 192 zu dem entgegengesetzten Resultat. Durch Fortsetzung des im Schlusssatze des § 3, S. 236 des Vorliegenden angegebenen Verfahrens kann man sich solche „Zwitterketten" noch allgemeinerer Natur herstellen, indem man an $(\varkappa\lambda)$ die Kette μ, an diese ν u. s. w. schliesst. Ob die Kette $(\varkappa\lambda\mu\nu\ldots)$ eine Zwitterkette allgemeinster Natur sei, das lasse ich vorläufig dahingestellt.

In Fig. 19 handle es sich um den Pol 18.

Man erhält

in $J(1234)$ aus $12, 34$; $23, 14 \ldots [13, 24]^{\alpha, \beta}$
„ $J(2356)$ „ $23, 56$; $35, 26 \ldots [25, 36]^{\gamma, \delta}$
„ $J(1456)$ „ $14, 56$; $16, 45 \ldots [15, 46]^{\varepsilon, \zeta}$
„ $J(3578)$ „ $35, 78$; $58, 37 \ldots [38, 57]^{\eta, \vartheta}$

und hat damit alle Pole in Bezug auf σ_3 und σ_5.

Nun ist nützlich zu bemerken, dass, wenn die Polgruppe aller Systeme in Bezug auf zwei derselben vorliegt, wie hier also

$$\begin{matrix} 31, & 32, & 34, & 35, & 36, & 37, & 38 \\ 51, & 52, & 54, & & 56, & 57, & 58; \end{matrix}$$

man den beliebigen Pol ik in

$J(35ik)$ aus $3i, 5k$; $3k, 5i$; 35 linear erhält. (Vergl. auch S. 228.)

Insbesondere ergiebt sich in

$J(3518)$ aus $13^{\alpha, \beta}, 58$; $38^{\eta, \vartheta}, 15^{\varepsilon, \zeta}$; 35
jeder der acht Pole $18^{\alpha\eta\varepsilon,\, \alpha\eta\zeta,\, \alpha\vartheta\varepsilon,\, \alpha\vartheta\zeta,\, \beta\eta\varepsilon,\, \beta\eta\zeta,\, \beta\vartheta\varepsilon,\, \beta\vartheta\zeta}$.

Die soeben behandelte Kette kann man aus einem Gliederpaar $\sigma_1 \sigma_2$, durch successiven Anschluss der weitern Paare $\sigma_3 \sigma_4$, $\sigma_5 \sigma_6$, $\sigma_7 \sigma_8$ aufbauen. Bei allen in derartiger Weise hergestellten Ketten ist die Polbestimmung einfach, da man stets leicht die Pole aller Glieder in Bezug auf zwei derselben erhält. Wir schliessen der vorigen Kette, um dies zu zeigen, gleich zwei weitere Gliederpaare $\sigma_9 \sigma_X$, $\sigma_{XI} \sigma_{XII}$ an (Fig. 20), da erst bei der Gliederzahl zwölf eine neue Ueberlegung nothwendig wird. Das Glied σ_5 tritt hier mit jedem der übrigen in einem Gelenkviereck auf und man erhält daher alle Pole der Form $5k$.

Bei σ_3 fehlt eine derartige Verbindung mit σ_{XII}, aber es liefern direct:

$J(3578)$ aus $35, 78$; $58, 37 \ldots [38, 57]^{\lambda, \mu}$,
$J(8\,X\,XI\,XII)$ aus $8\,X, XI\,XII$; $8\,XI, X\,XII \ldots [8\,XII, X\,XI]^{\pi \varrho}$,
$J(58\,9\,X)$ aus $59, 8\,X$; $58, 9\,X \ldots [5\,X, 8\,9]^{\sigma, \tau}$,

und dann weiter in

$J(38\,9\,XII)$ aus $38^{\lambda, \mu}, 9\,XII$; $8\,XII^{\pi, \varrho}, 3\,9$; $89^{\sigma, \tau}$,
die acht Pole $3\,XII^{\lambda\pi\sigma,\, \lambda\pi\tau,\, \lambda\varrho\sigma,\, \lambda\varrho\tau \ldots \mu\varrho\tau}$,

womit alle Pole in Bezug auf σ_5 und σ_3 bekannt sind. Die verwickeltste Bewegung gegen einander haben σ_1 und σ_{XII}. Wir bestimmen zur Gewinnung von $1\,XII$ in

$J(5\,XII\,8\,X)$ aus $58, X\,XII$; $8\,XII^{\pi, \varrho}, 5\,X^{\sigma, \tau}$; $8\,X \ldots 5\,XII^{\pi\sigma,\, \pi\tau,\, \varrho\sigma,\, \varrho\tau}$,

haben weiter bereits gefunden $13^{\alpha\beta}$, $15^{\varepsilon\zeta}$. Wie man sieht, sind die acht Pole $3\,XII$ paarweise den vier Polen $5\,XII$ zugeordnet, während die Polgruppen 13, 15 von jenen und von einander unabhängig sind. Da nun die Construction von $1\,XII$ aus den jetzt gefundenen Polen $13, 5\,XII$ $15, 3\,XII$; 35 linear vor sich geht, erhält man $8 . 2 . 2 = 32$ Pole $1\,XII$.

Man sieht, wie sich hiernach durch Ausgang von zwei mittleren Gliedern, nach beiden Richtungen bis zu den Endgliedern die Polbestimmung durchführen lässt, sofern der Anschluss von Gliederpaaren noch weiter fortgesetzt wird.

Bezüglich anderer Ketten der vorliegenden Classe sei bemerkt, dass man auch dann stets die Construction durchführen kann, wenn es gelingt, die gegebene Kette in Theilketten derart zu zerlegen, dass jede einzelne aus Gliederpaaren aufgebaut werden kann. Denn das auf S. 250 auseinandergesetzte Verfahren gilt auch dann noch, wenn in den einzelnen Ketten $\varkappa \lambda \mu \ldots$ die Pole mehrdeutig sind, sobald, wie bei der vorliegenden Classe thatsächlich der Fall, nur die V^{ik} ausserdem bestimmt sind.

Wie man in besonderen Fällen zum Ziele gelangt, auch wenn bei einer gegebenen Kette keine der beiden obigen Voraussetzungen zutrifft, mag an dem Beispiele der Fig. 12 gezeigt werden. Liegen die sämmtlichen Gelenkpunkte in einer Geraden, so ergeben sich aus den beiden auftretenden Gelenkvierecken unmittelbar die zweideutigen Pole $12^{\alpha,\beta}$, $23^{\gamma,\delta}$.

Jeder der Combinationen $12^{\alpha}\,23^{\gamma}$, $12^{\alpha}\,23^{\delta}$, $12^{\beta}\,23^{\gamma}$, $12^{\beta}\,23^{\delta}$ entsprechen nun nach Heranziehung von $G_1 G_3$ zwei Pole 13, deren Bestimmung genau so, wie auf S. 248 und 249 gezeigt wurde, vorzunehmen ist. Folglich ist die Bewegung von σ_1 gegen σ_3 acht-deutig und die acht Pole sind durch viermalige Construction der Doppelpunkte projectiver Reihen zu bestimmen.

Hannover, den 5. Juli 1891.

XVII.

Ueber das Virial der Kräfte.

Von

N. N. Pirogow

in Petersburg.

---

§ 1. Die Virialgleichung.

Es sei ein beständiges*, conservatives N Theilchen-System gegeben; die Differentialgleichungen der Bewegung irgend eines der Theilchen des Systems sind:

$$1)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

wenn m dessen Masse, x, y, z dessen Coordinaten zur Zeit t, und X, Y, Z die Componenten der Resultante sämmtlicher auf dasselbe zur Zeit t wirkenden Kräfte, bedeuten. Demnach ist auch:

$$2)\qquad mx\frac{d^2x}{dt^2}=xX,\quad \text{u. s. f.};$$

nun ist aber:

$$3)\qquad \frac{d^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}{dt^2}=\frac{d\left(x\frac{dx}{dt}\right)}{dt}=x\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\quad \text{u. s. f.},$$

so dass wir die Gleichungen 1) auch so schreiben können:

$$4)\qquad \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}m\frac{d^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}{dt^2}-\frac{1}{2}xX,\quad \text{u. s. f.}$$

Es sei s die Geschwindigkeit des betrachteten Theilchens zur Zeit t und ϱ dessen Abstand vom Coordinaten-Anfange zu derselben Zeit t, so dass:

$$5)\qquad s^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

und:

$$6)\qquad \varrho^2=x^2+y^2+z^2.$$

---

* Ich mache von den in meiner Abhandlung: „Ueber das Gesetz Boltzmann's" im Repertorium d. Phys. von Exner, Bd. 27, eingeführten Bezeichnungen ohne weitere Erläuterung Gebrauch.

Die drei Gleichungen 4) zu einander addirt geben:

$$7) \qquad \frac{1}{2} m s^2 = \frac{1}{2} m \frac{d^2\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)}{dt^2} - \frac{1}{2}(xX + yY + zZ).$$

Nun ist aber

$$8) \qquad K_t = \frac{1}{2} m s^2$$

die kinetische Energie des Theilchens m zur Zeit t; die Grösse

$$9) \qquad B_t = -\frac{1}{2}(xX + yY + zZ)$$

nennt R. Clausius das Virial der auf das Theilchen m zur Zeit t wirkenden Kräfte. Es sei τ eine beliebig lange Zeitperiode; die Mittelwerthe der die Gleichung 7) bildenden Grössen während der Zeit τ nehmend, werden wir erhalten:

$$10) \qquad \frac{1}{\tau}\int_0^\tau K_t \, . \, dt = \frac{1}{2}\frac{m}{\tau}\left[\left(\frac{d^2\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)}{dt^2}\right)_\tau - \left(\frac{d^2\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)}{dt^2}\right)_0\right] + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau B_t \, . \, dt,$$

da das gegebene System ein beständiges ist, so hat die Grösse

$$\frac{1}{2} m \left[\left(\frac{d^2\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)}{dt^2}\right)_\tau - \left(\frac{d^2\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)}{dt^2}\right)_0\right]$$

für alle möglichen und noch so grossen Werthe von τ stets einen endlichen und innerhalb gewisser Grenzen liegenden Werth; demnach ist die Grösse:

$$\frac{1}{2}\frac{m}{\tau}\left[\left(\frac{d^2\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)}{dt^2}\right)_\tau - \left(\frac{d^2\left(\frac{\varrho^2}{2}\right)}{dt^2}\right)_0\right]$$

für hinreichend grosse Werthe von τ beliebig klein, und die Gleichung 10) verwandelt sich für eine hinreichend lange Zeitperiode τ in die Virialgleichung des betrachteten Theilchens, welche so lautet:

$$11) \qquad \frac{1}{\tau}\int_0^\tau K_t \, . \, dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau B_t \, . \, dt,$$

das heisst: die mittlere kinetische Energie eines jeden Theilchens eines beständigen, conservativen N Theilchen-Systems während einer hinreichend langen Zeitperiode τ ist dem mittleren Virial der auf dasselbe während der Zeit τ wirkenden Kräfte gleich.

Schreiben wir für ein jedes der N Theilchen des Systems seine Virialgleichung hin und addiren alle diese Gleichungen, so erhalten wir die Virialgleichung des Systems für die hinreichend lange Zeitperiode τ, welche so lautet:

12) $$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum K_t \,.\, dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum B_t \,.\, dt,$$

wenn die Summation auf alle N Theilchen des Systems erstreckt ist; somit ist die mittlere kinetische Energie eines jeden beständigen, conservativen N Theilchen-Systems während einer hinreichend langen Zeitperiode τ dem mittleren Virial der auf die Theilchen dieses Systems während dieser Zeit τ wirkenden Kräfte gleich.

Ist das gegebene System ein beständiges, isolirtes, conservatives System, welche aus einer sehr grossen Anzahl N sich bewegender Theilchen besteht und im stationären Zustande sich befindet, so ist die kinetische Energie des Systems eine constante, von der Zeit unabhängige Grösse; constant ist auch das Virial der auf die Theilchen des Systems wirkenden conservativen Kräfte. Bezeichnen wir mit X, Y, Z die Componenten der Resultante sämmtlicher auf irgend ein Theilchen dieses Systems zu irgend einer Zeit t wirkenden Kräfte, mit x, y, z die Coordinaten dieses Theilchens zu dieser selben Zeit t und mit K die constante, von der Zeit unabhängige mittlere kinetische Energie sämmtlicher Theilchen des Systems, so ist:

13) $$-\frac{1}{2}\sum(xX + yY + zZ) = NK$$

die Summation auf alle N Theilchen des Systems erstreckt. Diese Gleichung besteht für alle Zeitmomente t, die zur Zeitperiode, während welcher das System im stationären Zustande sich befindet, gehören.

Wir haben alle möglichen beständigen, isolirten, conservativen N Theilchen-Systeme in zwei Classen von Systemen eingetheilt*: also zur ersten Classe gehörig solche Systeme rechnend, die aus Theilchen bestehen, auf welche fernewirkende interparticuläre und äussere Kräfte wirken; zur zweiten Classe gehören Systeme, die aus Theilchen bestehen, auf welche nur nahewirkende interparticuläre Kräfte wirken und von den äusseren Kräften nur ein gleichmässiger, zur äusseren Grenzfläche des Systems normaler Druck. Obwohl die nahewirkenden Kräfte nur als ein specieller Fall der fernewirkenden angesehen werden dürfen, so ist doch eine solche Classification der Systeme zweckmässig, da die Theorie der Systeme zweiter Classe bei Weitem die einfachste ist; es sind nämlich diese Systeme im stationären Zustande, wenn sie einfache sind, in dem ganzen von ihnen eingenommenen Raume (eine sehr dünne zur äusseren Grenzfläche des Systems unmittelbar anliegende Schicht ausgenommen, die wir als zu dem das System umgebenden äusseren Mittel, welches auf dasselbe den äusseren Druck ausübt, gehörig ansehen) gleichartig (isotrop), und wenn sie susammengesetzte sind, so bestehen sie aus einigen isotropen zusammensetzenden Systemen.

* Vergl. § 4 meiner l. c. Abhandlung.

Die Virialgleichung der Systeme zweiter Classe, wenn sie als „ganze Körper“ aufgefasst, weder eine fortschreitende noch eine rotirende Bewegung haben, ist eine Zustandsgleichung dieser Systeme, da sie die wechselseitige Beziehung der drei Parameter, von denen der stationäre Zustand dieser Systeme abhängt, angiebt, so dass dieser Zustand schon durch zwei dieser Parameter vollständig bestimmt ist. Bekanntlich sind Druck, Volumen und Temperatur (die sich als eine gewisse Function der kinetischen Energie der Systeme erweist) diese drei Parameter.

Ist P der äussere, gleichmässige und zur äusseren Grenzfläche des Systems normale Druck und V der vom Systeme eingenommene Raum, so ist, wie Herr van der Waals gezeigt hat*, $\frac{3}{2}PV$ das Virial der im Raume V wirkenden äusseren Druckkräfte. Bezeichnen wir mit B das Virial der auf die Theilchen eines Systems zweiter Classe wirkenden interparticulären Kräfte, so ist:

$$\frac{3}{2}PV + B = NK \tag{14}$$

die Virialgleichung dieses Systems, welche auch als dessen Zustandsgleichung angesehen werden kann, wenn B und K als Functionen des Volumens und der Temperatur des Systems bekannt sind. Bekanntlich wird die Zustandsgleichung eines Systems auch als eine Gleichung der thermodynamischen Fläche des Systems bezeichnet.

In der gegenwärtigen Abhandlung wollen wir die Zustandsgleichungen einiger einfacheren Systeme zweiter Classe entwickeln, solcher nämlich, die zur ersten Kategorie der zweiten Gruppe dieser Classe von Systemen nach unserer Classification gehören, und folglich aus Elementartheilchen bestehen, die aus sich niemals complexe Theilchen bilden. Der Kürze wegen wollen wir alle solche Systeme einatomige Gase nennen.

Das einfachste dieser Systeme ist das sogenannte ideale Gas oder ein System, bestehend aus einer sehr grossen Anzahl N sich bewegender materieller Punkte, die auf einander nur in unendlicher Nähe wirken. Da B, das Virial der interparticulären Kräfte, für dieses System $= 0$ ist, so ist:

$$\frac{3}{2}PV = NK \tag{15}$$

die Viralgleichung desselben. Da die mittlere kinetische Energie der Theilchen des idealen Gases als Maass der Temperatur T des Gases angesehen wird, so können wir, die Constante R durch

$$RT = \frac{2}{3}NK \tag{16}$$

bestimmend, diese Gleichung auch so schreiben:

---

* van der Waals: „Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes“, deutsch von Roth. 1881. Seite 8.

$$PV = RT, \tag{17}$$

es ist dies die Zustandsgleichung des idealen Gases oder das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz. Diese Gleichung gilt für alle möglichen Zustände des Gases und für alle möglichen Werthe der Grössen P, V, T. Wenn als Einheit des Druckes der Druck einer Atmosphäre, als Einheit der Temperatur, der Grad der centesimalen Scala, und als Einheit des Volumens das Volumen des aus N Theilchen bestehenden idealen Gases bei $P = 1$ und $T = 273^0$, gewählt werden, so ist R dem Ausdehnungs- (resp. Spannungs-) Coefficienten des idealen Gases gleich, $= 1/273 = 0{,}003663$ also.

§ 2. Die stationäre Raumvertheilung der Theilchen.

Es sei ein System gegeben, bestehend aus zwei Theilchen (materiellen Punkten) m_1 und m_2, welche innerhalb eines vollkommen gleichartigen Raumes V sich frei herum bewegen, so dass die Wahrscheinlichkeit davon, dass eines dieser Theilchen innerhalb irgend eines Raumelementes dx, dy, dz sich befindet, gleich dx, dy, dz/V ist. Den Raum V theilen wir durch eine imaginäre Fläche in zwei einander ganz gleiche Räume V_1 und V_2 (die aber keineswegs auch gleichgeformt zu sein brauchen). Wir wollen nun die Bewegungen dieses Systems während einer sehr langen Zeitperiode τ verfolgen: $p_0\tau$ sei die Zeit, während welcher die Anzahl der sich im Raume V_1 befindenden Theilchen $= 0$ ist; $p_1\tau$ sei die Zeit, während welcher im Raume V_1 sich ein Theilchen befindet, und $p_2\tau$ sei die Zeit, während welcher beide Theilchen des Systems sich zugleich in V_1 vorfinden; es ist klar, dass $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ ist. Da der Raum V vollkommen gleichartig ist und da V_1 genau gleich $\frac{1}{2}V$ ist, so ist die Zeit, während welcher das Theilchen m_1 sich in V_1 befindet, gleich $\frac{1}{2}\tau$. Während der Hälfte dieser Zeit $\frac{1}{2}\tau$ wird aber auch das Theilchen m_2 sich in V_1 vorfinden, so dass $p_2 = \frac{1}{4}\tau$ ist. Ebenso werden wir finden, dass beide Theilchen sich gleichzeitig in V_2 während der Zeit $\frac{1}{4}\tau$ befinden, während welcher die Anzahl der sich in V_1 befindenden Theilchen $= 0$ ist. Es ist somit:

$$p_0 = \frac{1}{4}, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Ganz ebenso finden wir, dass, wenn ein System gegeben ist, welches aus drei Theilchen besteht, die sich frei in einem gleichartigen Raume herumbewegen, welcher in drei gleiche Theile getheilt ist, und wenn p_0, p_1, p_2, p_3 die Wahrscheinlichkeiten bedeuten, dass in einem dieser Raumtheile gleichzeitig 0, 1, 2, 3 Theilchen sich vorfinden, dass:

$$p_0 = \frac{8}{27}, \quad p_1 = \frac{12}{27}, \quad p_2 = \frac{6}{27}, \quad p_3 = \frac{1}{27}. \tag{2}$$

Für ein System von vier Theilchen, die sich in einem gleichartigen Raume frei herum bewegen, welcher in vier gleiche Theile getheilt ist, sind:

$$3)\quad p_0 = \frac{81}{256},\quad p_1 = \frac{108}{256},\quad p_2 = \frac{54}{256},\quad p_3 = \frac{12}{256},\quad p_4 = \frac{1}{256}.$$

Schliesslich für ein System von N Theilchen, die sich in einem gleichartigen Raume frei herum bewegen, welcher in N gleiche Raumtheile oder „Zellen“ durch imaginäre Flächen getheilt ist, werden wir finden, dass:

$$4)\quad \begin{cases} p_0 = \dfrac{(N-1)^N}{N^N}, & \cdots\cdots\cdots \\ p_1 = \dfrac{(N-1)^{N-1}}{N^N}\cdot\dfrac{N}{1}, & p_{N-3} = \dfrac{(N-1)^3}{N^N}\cdot\dfrac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}, \\ p_2 = \dfrac{(N-1)^{N-2}}{N^N}\cdot\dfrac{N(N-1)}{1.2}, & p_{N-2} = \dfrac{(N-1)^2}{N^N}\cdot\dfrac{N(N-1)}{1.2}, \\ p_3 = \dfrac{(N-1)^{N-3}}{N^N}\cdot\dfrac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3} & p_{N-1} = \dfrac{N-1}{N^N}\cdot\dfrac{N}{1}, \\ \cdots\cdots\cdots & p_N = \dfrac{1}{N^N}. \end{cases}$$

Die Zahlen p_0, p_1, p_2, ... sind die Wahrscheinlichkeiten davon, dass in einer der „Zellen“, in welche der vom Systeme eingenommene Raum eingetheilt ist, gleichzeitig 0, 1, 2, ... Theilchen des Systems sich vorfinden; so dass, wenn τ eine sehr lange Zeitperiode ist, in jeder dieser Zellen während der Zeiten $p_0\tau$, $p_1\tau$, $p_2\tau$, ... gleichzeitig sich 0, 1, 2, ... Theilchen vorfinden werden. Es ist auch klar, wenn N, die Zahl der unter einander gleicher Zellen (die aber nicht auch gleichgeformt zu sein brauchen), in die der vom Systeme eingenommene Raum getheilt ist, eine sehr grosse Zahl ist, so werden sich in $p_0 N$ dieser Zellen sich gar keine Theilchen vorfinden, in $p_1 N$ derselben zu je einem Theilchen, in $p_2 N$ Zellen zu je zwei Theilchen u. s. f. Ist N eine sehr grosse Zahl, so sind die Zahlen mit grossen Indices sehr klein; ist N so gross, dass man den Bruch $1/N$ und dessen höhere Potenzen vernachlässigen darf, so ist:

$$p_0 = 1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \cdots = e^{-1},$$

wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist. Ganz ebenso werden wir finden, dass:

$$5)\quad \begin{cases} p_0 = e^{-1} \quad\;\; = 0{,}36788 & p_4 = e^{-1}/4! = 0{,}01533 \\ p_1 = e^{-1} \quad\;\; = 0{,}36788 & p_5 = e^{-1}/5! = 0{,}00306 \\ p_2 = e^{-1}/2! = 0{,}18394 & p_6 = e^{-1}/6! = 0{,}00051 \\ p_3 = e^{-1}/3! = 0{,}06131 & \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Die soeben behandelte Aufgabe lässt sich verallgemeinern: Es sei ein System, aus N Theilchen bestehend, gegeben, die in einem gleichartigen Raume sich frei herum bewegen, welcher in n unter einander gleiche „Zellen“

durch imaginäre Flächen getheilt ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass in diesem Falle die Ausdrücke 4) so zu schreiben sind:

$$6)\begin{cases} p_0 = \dfrac{(n-1)^N}{n^N} = 1 - \dfrac{N}{n} + \dfrac{N(N-1)}{1.2}\cdot\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}\cdot\dfrac{1}{n^3} + \cdots, \\ p_1 = \dfrac{N}{1}\cdot\dfrac{(n-1)^{N-1}}{n^N} = \dfrac{N}{n}\left\{1 - \dfrac{N-1}{n} + \dfrac{(N-1)(N-2)}{1.2}\cdot\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{(N-1)(N-2)(N-3)}{1.2.3}\cdot\dfrac{1}{n^3} + \cdots\right\}, \\ p_2 = \dfrac{N(N-1)}{1.2}\cdot\dfrac{(n-1)^{N-2}}{n^N} = \dfrac{N(N-1)}{1.2}\cdot\dfrac{1}{n^2}\left\{1 - \dfrac{N-2}{n} + \dfrac{(N-2)(N-3)}{1.2}\cdot\dfrac{1}{n^2} - \cdots\right\} \\ p_3 = \dfrac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}\cdot\dfrac{(n-1)^{N-3}}{n^N} = \dfrac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}\cdot\dfrac{1}{n^3}\left\{1 - \dfrac{N-3}{n} + \dfrac{(N-3)(N-4)}{1.2}\cdot\dfrac{1}{n^2} - \cdots\right\} \end{cases}$$

u. s. f.

Das Verhältniss N/n wollen wir der Kürze wegen mit ε bezeichnen, so dass $N = \varepsilon n$ ist. Sind N und n sehr grosse Zahlen, so dass man die Brüche $1/N$ und $1/n$ und ihre höheren Potenzen vernachlässigen darf, so gehen die Ausdrücke 6) über in:

$$7) \qquad p_0 = e^{-\varepsilon}, \quad p_1 = \varepsilon e^{-\varepsilon}, \quad p_2 = \frac{\varepsilon^2}{2!} e^{-\varepsilon}, \quad p_3 = \frac{\varepsilon^3}{3!} e^{\cdot 3}, \text{ u. s. f.;}$$

die Zahlen p_0, p_1, p_2, ... bestimmen die stationäre Vertheilung der Theilchen des Systems in dem von ihm eingenommenen Raume. Vertheilungen, die gleichmässiger sind als diejenige, die durch diese Zahlen bestimmt wird, sind ebenso wenig stabil wie Vertheilungen, die noch ungleichmässiger sind.

Wenn von den n Zellen, in welche der vom Systeme eingenommene Raum eingetheilt ist, ν Zellen für die Theilchen des Systems undurchdringlich sind, so werden die Wahrscheinlichkeiten p_0, p_1, p_2, ... davon, dass in einer der durchdringlichen Zellen 0, 1, 2, ... Theilchen zugleich sich vorfinden, auch noch durch die Ausdrücke 7) bestimmt, wenn in diesen Ausdrücken

$$8) \qquad \varepsilon = N/(n-\nu)$$

gesetzt wird. Ist ω der Rauminhalt einer jeden der n Zellen, so ist $n\omega = V$ der vom Systeme eingenommene Raum und $\nu\omega$ der für die Bewegung der Theichen undurchdringliche Raum. Es ist klar, dass das Vertheilungsgesetz der Theilchen im Raume von der Vertheilung des für dieselben undurchdringlichen Raumes $\nu\omega$ ganz unabhängig ist, so dass dieser Raum $\nu\omega$ auch z. B. aus N gleichen und gleichgeformten Zellen ω_0 bestehen kann; auch können diese N undurchdringlichen Zellen ω_0 sich frei im Raume V frei herum bewegen; die Zahl ε wird hierbei durch den Ausdruck:

$$9) \qquad \varepsilon = N\omega/(V - N\omega_0)$$

bestimmt.

§ 3. Das vollkommene Gas.

Zur Kategorie von Systemen, die wir kurzweg als einatomige Gase bezeichnet haben, gehört auch das sogenannte vollkommene Gas oder

ein System, bestehend aus einer sehr grossen Anzahl N sich bewegender, vollkommen harter, elastischer Kugeln. Da die bei den Zusammenstössen der Theilchen dieses Systems wirkenden Abstossungskräfte momentane Kräfte sind und die Stossdauer unendlich klein ist, so ist auch für dieses System B, das Virial der interparticulären Kräfte $= 0$ und folglich das Virial der äusseren Druckkräfte der kinetischen Energie des Systems gleich.

Es sei P der Druck und V das Volumen des Gases. Da die Theilchen des Systems (die Kugeln) selbst einen Theil des Raumes V einnehmen und der von jedem der Theilchen eingenommene Raum für die übrigen Theilchen undurchdringlich ist, so ist das Wirkungsfeld der äusseren Druckkräfte kleiner als V und etwa $V - b_1$ gleich, wo b_1 eine gewisse Function des von den Theilchen selbst eingenommenen Raumes ist, so dass die Virialgleichung des vollkommenen Gases die Form

$$1) \qquad \frac{3}{2} P(V - b_1) = NK$$

hat. Es bestehe das gegebene System aus gleich grossen Kugeln und es sei ϱ der Durchmesser einer jeden dieser Kugeln. Wenn um die Mittelpunkte dieser Kugeln mit dem Halbmesser ϱ Sphären beschrieben werden, so sind das (nach Clausius) Wirkungssphären der Theilchen des vollkommenen Gases. Da eine jede dieser Sphären für die Mittelpunkte der übrigen Theilchen undurchdringlich ist, so ist b_1 der von den Wirkungssphären der Theilchen des Systems eingenommene Raum, und $V - b_1$ ist der für die Bewegung der Theilchen freie Raum, das Wirkungsfeld der äusseren Druckkräfte. Wären keine Zusammenstösse vorhanden und würden die Wirkungssphären der Theilchen sich niemals berühren und schneiden, so wäre b_1 gleich $N \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \varrho^3$. Da aber eine gewisse Anzahl dieser Sphären stets einander theilweise decken, so ist $b_1 < N \cdot \frac{4}{3} \pi \varrho^3$. Die Betrachtungen, die wir im vorigen Paragraphen angestellt haben, ermöglichen es, den genauen Werth von b_1 (oder von $V - b_1$) für jeden Werth der Dichte des Gases zu finden.*

Wir theilen den Raum V in n einander gleiche Zellen; der Inhalt einer jeden Zelle sei $= \frac{4}{3} \pi \varrho^3$, so dass $V = n \cdot \frac{4}{3} \pi \varrho^3$ ist. Wir haben gesehen (§ 2), dass, wenn im Raume V, von dem ein Theil $N\omega_0$ undurchdringlich ist, sich N Theilchen frei herum bewegen, die Anzahl der Zellen, die frei von Theilchen sind, wenn der Zustand des Systems stationär ist, gleich $p_0 n$ ist. Die übrigen $(1 - p_0) n$ Zellen enthalten eine jede mindestens ein Theilchen; da der Inhalt einer jeden der Zellen dem Inhalte der Wirkungssphären der Theilchen gleich ist, so sind jene $(1 - p_0) n$ Zellen

* Es ist dies eine Aufgabe, deren Lösung wir weiter unten geben, und die bereits schon von Herrn van der Waals gestellt worden ist; vergl. l. c. Seite 55.

vollständig von den Wirkungssphären der Theilchen erfüllt und der von den $p_0 n$ Zellen eingenommene Raum $p_0 n \cdot \frac{4}{3}\pi\varrho^3$ ist der für die Bewegung der Theilchen freie Raum, das Wirkungsfeld der äusseren Druckkräfte.

Nun ist aber:

2) $$p_0 n \cdot \frac{4}{3}\pi\varrho^3 = Ve^{-\varepsilon},$$

wenn mit ε die Grösse

3) $$\varepsilon = N \cdot \frac{4}{3}\pi\varrho^3/(V - N\omega_0)$$

bezeichnet ist. Zwar ist die Wirkungssphäre eines Theilchens für die Mittelpunkte der übrigen Theilchen undurchdringlich, aber sie ist es nicht für die Theilchen (die Kugeln) selbst; so kann es geschehen, dass einige Theilchen zugleich theilweise die Wirkungssphäre eines Theilchens erfüllen und es kann geschehen, dass der Inhalt derjenigen Theile dieser Wirkungssphäre, die von anderen Theilchen eingenommen sind, gerade $= \frac{1}{6}\pi\varrho^3$, dem Inhalte eines der Theilchen des Systems gleich ist. Es ist klar, dass in diesem Falle wir berechtigt sind, zu sagen, dass in der Wirkungssphäre des betrachteten Theilchens sich noch ein ganzes Theilchen befindet. Es ist somit der undurchdringliche Raum $N\omega_0$ der Summe der Inhalte regelmässiger Dodekaeder, die um sämmtliche Theilchen des Systems (die Kugeln) umschrieben sind, gleich.

Nun ist der Inhalt ω_0 eines regelmässigen Dodekaeders, welches um eine Sphäre, deren Durchmesser ϱ ist, umschrieben ist, bekanntlich:

4) $$\omega_0 = \frac{25}{2}\varrho^3\sqrt{\frac{13}{10} - \frac{29}{50}\sqrt{5}},$$

bezeichnen wir der Kürze wegen mit ν die Zahl:

5) $$\nu = 6{,}03814,$$

so ist:

6) $$\frac{4}{3}\pi\varrho^3 = \nu\,\omega_0.$$

Der Ausdruck 3) kann somit so geschrieben werden:

7) $$\varepsilon = N\nu\,\omega_0/(V - N\omega_0)$$

und die Virialgleichung des vollkommenen Gases ist:

8) $$\frac{3}{2}PV.e^{-\varepsilon} = NK.$$

Wir wollen der Kürze wegen die Constante $N\omega_0$ mit b bezeichnen; es ist also b der kleinstmögliche Raum, den das gegebene Gas bei $K = 0$, oder $P = \infty$ einnehmen kann, und die Virialgleichung des Gases ist:

9) $$\frac{3}{2}PV.e^{-\nu b(V-b)} = NK.$$

Da man die mittlere kinetische Energie der Theilchen des vollkommenen Gases als Maass der Temperatur T des Gases ansehen darf, so können wir die Gleichung 9), die Constante R durch

$$10) \qquad RT = \frac{2}{3} NK$$

bestimmend, auch so schreiben:

$$11) \qquad PV = RT . e^{-\nu b/(V-b)};$$

es ist dies die Zustandsgleichung des vollkommenen Gases. Diese Gleichung gilt für alle möglichen Zustände des Gases und für alle möglichen Werthe der Grössen P, V, T; das heisst für alle Werthe von P und T von 0 bis ∞ und für alle Werthe von V, von b bis ∞. P ist eine lineare Function von T und (für ein constantes V) der Temperatur T proportional, so dass die Stochoren (oder Stopyknen) des vollkommenen Gases (wie beim idealen Gase) gerade Linien sind, welche die V-Achse schneiden. Die thermodynamische Fläche des vollkommenen Gases wird durch eine Gerade erzeugt, welche zur V-Achse senkrecht ist und sie schneidet: in der Anfangslage läuft sie der P-Achse parallel in der Entfernung $V = b$ über denselben, dann gleitet ihr Schnittpunkt mit der V-Achse längs dieser Achse von $V = b$ bis $V = \infty$ hin, während die Gerade selbst sich um einen rechten Winkel dreht.

Wählen wir als Einheit des Druckes, den Druck einer Atmosphäre, als Einheit der Temperatur, den Grad der centesimalen Scala und als Einheit des Volumens, das Volumen des idealen Gases, welches auch aus N Theilchen besteht, bei $P = 1$ und $T = 273^0$, so ist die Constante R dem Ausdehnungs- (resp. Spannungs-) Coefficienten des idealen Gases gleich. Bezeichnen wir mit R_p den Spannungs-Coefficienten des vollkommenen Gases, so finden wir dass:

$$12) \qquad R_p = R \cdot \frac{T}{P} \cdot \frac{dP}{dT} = R,$$

das heisst: der Spannungscoefficient des vollkommenen Gases ist für alle Zustände des Gases contstant und dem Spannungscoefficienten des idealen Gases gleich. Für R_v, den Ausdehnungscoefficienten des vollkommenen Gases finden wir folgenden Ausdruck:

$$13) \qquad R_v = R \cdot \frac{T}{V} \cdot \frac{dV}{dT} = \frac{R}{1 + V . \nu b / (V-b)^2},$$

so dass (wie beim Wasserstoff bei gewöhnlichen Temperaturen) für alle Zustände des vollkommenen Gases $R_v < R_p$ ist. Die Grösse PV/RT, welche beim idealen Gase constant und $= 1$ ist, ist für alle Zustände des vollkommenen Gases > 1.

Die Dichte D (dass heisst die Zahl der Theilchen in der Raumeinheit) des vollkommenen Gases ist bei gleichem Druck und Temperatur

stets kleiner als die Dichte D_0 des idealen Gases, und um so kleiner, je grösser die Theilchen (die Kugeln) des Gases sind; es ist nämlich:

$$14)\qquad D = D_0 . e^{-\nu b/(V-b)}.$$

Wir haben die Zustandsgleichung des vollkommenen Gases unter der Voraussetzung abgeleitet, dass alle Theilchen des Gases (die Kugeln) gleich gross sind; sie wird wohl aber auch für Gase ihre Geltung beibehalten, welche aus Kugeln verschiedener Grösse bestehen, wenn unter b der kleinstmögliche Raum, den so ein gemischtes Gas bei $T = 0$ oder $P = \infty$ annehmen kann, verstanden wird.

§ 4. Mehratomige Gase.

Bevor wir zur Theorie unvollkommener Gase schreiten, müssen wir ein Paar Hilfssätze entwickeln. Ein mehratomiges Gas ist ein System, welches aus einer sehr grossen Anzahl N von complexen Theilchen einer beständigen Zusammensetzung (auch mehratomige Molecüle genannt) besteht. Auf jedes Elementartheilchen, aus welchen diese complexe Theilchen bestehen, wirken Kräfte, sowohl solche, die von den übrigen Elementartheilchen, welche mit ihm dasselbe complexe Theilchen bilden, ausgehen (intraparticuläre oder intramoleculäre Kräfte), als solche, die von anderen complexen Theilchen ausgeübt werden (interparticuläre oder intermoleculäre Kräfte). Bezeichnen wir mit P den Druck, mit V das Volumen des Gases und mit V' das Wirkungsfeld der äusseren Druckkräfte; es sei B das Virial der interparticulären und B' das der intraparticulären Kräfte; endlich sei NK die kinetische Energie der translatorischen Bewegung der complexen Theilchen oder der interparticulären Bewegung (einer Bewegung also, die zum Schwerpunkte des Systems relativ ist) und NK' die kinetische Energie der intraparticulären Bewegung (einer Bewegung also, die zu den Schwerpunkten der einzelnen complexen Theilchen relativ ist); so ist

$$1)\qquad \frac{3}{2} PV' + B + B' = N(K + K')$$

die Virialgleichung des gegebenen mehratomigen Gases im stationären Zustande. Es sei b das Virial der intraparticulären Kräfte, die innerhalb irgend eines der complexen Theilchen wirken, so dass $B' = \Sigma b$, die Summation auf alle N complexen Theilchen des Systems erstreckt, ist; bezeichnen wir mit $\bar{b}$ den Mittelwerth der Grösse b für alle N Theilchen des Systems, so ist auch:

$$2)\qquad B' = \Sigma b = N\bar{b}.$$

Verfolgen wir aber die Bewegungen irgend eines der complexen Theilchen während einer sehr langen Zeit, so werden wir finden, dass der Mittelwerth des Virials der in ihm während dieser Zeit wirkenden intraparticulären Kräfte auch $= \bar{b}$ ist; denn ist N eine sehr grosse Zahl und

ist der Zustand des Systems stationär, so haben die einzelnen Theilchen zu irgend welcher Zeit ganz dieselben Zustände, als irgend eines derselben während einer sehr langen Zeit; im Raume wiederholt sich das, was sonst in der Zeit geschieht. Ebenso finden wir, dass, wenn k die kinetische Energie der inneren, zum Schwerpunkte des Theilchens relativen Bewegung irgend eines der complexen Theilchen ist, und wenn $\bar{k}$ den Mittelwerth der Grössen k für alle N Theilchen des Systems bedeutet, dass:

$$3)\qquad NK' = \Sigma k = N\bar{k}$$

ist; auch ist $\bar{k}$ die mittlere kinetische Energie der inneren Bewegung irgend eines der complexen Theilchen des Systems während einer sehr langen Zeit. Nun ist aber ein jedes complexes Theilchen einer beständigen Zusammensetzung, als ein selbststängiges System aufgefasst, ein beständiges conservatives System, für welches also die Virialgleichung giltig ist; es ist somit für jedes complexe Theilchen des Systems:

$$4)\qquad \bar{b} = \bar{k}$$

und folglich auch:

$$5)\qquad B' = NK',$$

so dass die Gleichung 1) sich in:

$$6)\qquad \frac{3}{2}PV' + B = NK$$

verwandelt; das heisst: die Summe der Viriale der äusseren Druckkräfte und der interparticulären Kräfte ist der kinetischen Energie der translatorischen Bewegung der complexen Theilchen gleich und die Virialgleichung des mehratomigen Gases hat somit ganz die Form der Virialgleichung des einatomigen Gases.

Es sei ein System gegeben, bestehend aus einer sehr grossen Anzahl N von Theilchen, auf welche nahewirkende interparticuläre Kräfte wirken. Da solche Kräfte nur innerhalb sehr kleiner Wirkungssphären von der Null verschiedene Werthe haben, so erfüllen die Wirkungssphären der Theilchen des Systems, wenn dessen Dichte nicht allzugross ist, nur einen Theil des vom Systeme eingenommenen Raumes, welchen Theil man als das Wirkungsfeld der interparticulären Kräfte bezeichnen kann; der übrige Theil des vom Systeme eingenommenen Raumes ist der freie Raum. Das Eindringen eines Theilchens in die Wirkungssphäre eines anderen nennen wir einen Zusammenstoss beider Theilchen. Die Stossdauer der Theilchen des betrachteten Systems ist, wenn auch eine sehr kleine, aber eine endliche Zeitdauer. Theilchen, in deren Wirkungssphären sich keine anderen Theilchen befinden, nennen wir freie Theilchen, und Theilchen, in deren Wirkungssphären sich eines oder mehrere andere Theilchen vorfinden, sind im Zustande des Zusammenstosses begriffen. Das gegebene System, wenn dessen Dichte nicht allzugross ist, besteht aus einer gewissen Anzahl von freien Theilchen und einer gewissen

Anzahl von Theilchengruppen oder Gruppen, welche aus zwei, drei, vier oder einer grösseren Anzahl von Theilchen, die im Zustande des Zusammenstosses begriffen sind, bestehen. Ist der Zustand des gegebenen Systems stationär, so sind die Zahlen der freien Theilchen und Theilchengruppen constante, von der Zeit unabhängige Zahlen; aber für verschiedene Dichten und Temperaturen des Systems haben diese Zahlen verschiedene Werthe.

Herr L. Natanson* beweist folgenden Satz: die mittlere kinetische Energie der translatorischen Bewegung (oder der Schwerpunktsbewegung) der Theilchengruppen ist der mittleren kinetischen Energie der translatorischen Bewegung freier Theilchen gleich. Einfacher lässt sich dieser Satz so beweisen: es seien m_1 und m_2 die Massen zweier Theilchen oder Theilchengruppen, s_1 und s_2 die Geschwindigkeiten ihrer Schwerpunkte vor dem Beginn des Zusammenstosses und φ der Winkel, den die Richtungen dieser Geschwindigkeiten mit einander bilden; es seien $f_1(s_1) \,.\, ds_1$ und $f_2(s_2) \,.\, ds_2$ die Wahrscheinlichkeiten der Geschwindigkeiten s_1 und s_2, bei der im Systeme bestehenden stationären Geschwindigkeitsvertheilung. Sind alle Richtungen der Geschwindigkeiten der Theilchen und Theilchengruppen gleich wahrscheinlich, so ist bekanntlich $\frac{1}{2} \sin\varphi \,.\, d\varphi$ die Wahrscheinlichkeit des Winkels φ; so dass die Wahrscheinlichkeit davon, dass die Massen m_1 und m_2 die Geschwindigkeit s_1 und s_2 haben, deren Richtungen mit einander den Winkel φ bilden, gleich

$$7) \qquad \frac{1}{2} f_1(s_1) \,.\, ds_1 \,.\, f_2(s_2) \,.\, ds_2 \,.\, \sin\varphi \,.\, d\varphi$$

ist. Die Geschwindigkeit S der translatorischen Bewegung der beiden Massen m_1 und m_2 gemeinsammen Schwerpunkts ist die Resultante der Geschwindigkeiten $m_1 s_1/(m_1 + m_2)$ und $m_2 s_2/(m_1 + m_2)$, wenn beide zugleich diesem Schwerpunkte ertheilt werden, so dass

$$8) \qquad (m_1 + m_2)^2 S^2 = m_1^2 s_1^2 + m_2^2 s_2^2 + 2 m_1 m_2 s_1 s_2 \,.\, \cos\varphi$$

ist; ist S_0^2 der Mittelwerth von S^2, so ist

$$9) \quad (m_1 + m_2)^2 S_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)^2 \int' f_1(s_1) \,.\, ds_1 \int' f_2(s_2) \,.\, ds_2 \int_0^\pi S^2 \,.\, \sin\varphi \,.\, d\varphi,$$

wo die mit $'$ bezeichneten Integrale auf alle im Systeme, während es sich im stationären Zustande befindet, vorkommenden Werthe der Geschwindigkeiten s_1 und s_2 erstreckt sind. Statt S^2 dessen Werth aus 8) hereinsetzend und bedenkend, dass

$$10) \qquad \int' f_1(s_1) \,.\, ds = \int' f_2(s_2) \,.\, ds_2 = 1$$

und

* L. Natanson: „Kinetische Theorie unvollkommener Gase.“ Wiedemann's Annalen, 1888, Bd. 33.

$$11)\qquad \frac{1}{2} m_1 \int s_1{}^2 . f_1(s_1) . ds_1 = \frac{1}{2} m_2 \int f_2(s_2) . ds_2 = K,$$

wenn K die mittlere kinetische Energie der translatorischen Bewegung freier Theilchen bedeutet, dass endlich

$$12)\qquad \int_0^\pi \cos\varphi . \sin\varphi . d\varphi = 0, \quad \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\varphi . d\varphi = 1,$$

so geht der Ausdruck 9) über in:

$$13)\qquad \frac{1}{2}(m_1 + m_2) S_0{}^2 = K,$$

was zu beweisen war.

Es ist hier auch am Orte, noch den folgenden Satz zu begründen: ist K die mittlere kinetische Energie der translatorischen Bewegung (einer Bewegung also, die zum Schwerpunkte des Systems relativ ist) der Theilchen eines Systems, welches sich im stationären Zustande befindet und aus gleichartigen Theilchen besteht, so ist $2K$ die mittlere kinetische Energie ihrer relativen Bewegung. Ist bei dem gegebenen Zustande des Systems $f(s).ds$ die Wahrscheinlichkeit der Geschwindigkeit s, so ist

$$14)\qquad \frac{1}{2} f(s_1) . ds_1 . f(s_2) . ds_2 . \sin\varphi . d\varphi$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgend zwei Theilchen des Systems gleichzeitig die Geschwindigkeiten s_1 und s_2 haben, deren Richtungen mit einander den Winkel φ bilden; die relative Geschwindigkeit ω dieser Theilchen wird durch

$$15)\qquad \omega^2 = s_1{}^2 + s_2{}^2 - 2 s_1 s_2 . \cos\varphi$$

bestimmt; so dass, wenn Ω^2 das mittlere Quadrat der relativen Geschwindigkeit irgend zweier Theilchen des Systems bedeutet, so ist

$$16)\qquad \Omega^2 = \frac{1}{2}\int f(s_1) . ds_1 \int f(s_2) . ds_2 \int_0^\pi \omega^2 . \sin\varphi . d\varphi;$$

die Ausdrücke 10), 11), 12) und 15) berücksichtigend, werden wir leicht finden, dass

$$17)\qquad \frac{1}{2} m \Omega^2 = 2K$$

ist. Es lässt sich dieser Satz auch so beweisen: da die mittlere kinetische Energie der zum Schwerpunkte des Systems relativen Bewegung irgend eines Theilchens m während einer sehr langen Zeit $= K$ ist, so ist die mittlere kinetische Energie der zum Theilchen m relativen Bewegung des Schwerpunkts des Systems während dieser Zeit $= NK$; und da die kinetische Energie der zum Schwerpunkte des Systems relativen Bewegung sämmtlicher Theilchen auch $= NK$ ist, so ist $2NK$ die kinetische Energie der zum Theilchen m relativen Bewegung sämmtlicher Theilchen des Systems und folglich ist $2K$ die mittlere kinetische Energie der relativen Bewegung dieser Theilchen.

§ 5. Theilchenaggregate.

Ein eingehendes Studium der Systeme der betrachteten Kategorie, solcher nämlich, die aus Elementartheilchen bestehen, welche niemals aus sich complexe Theilchen bilden, verlangt ihre Eintheilung in zwei Arten von Systemen:

1. Systeme, die aus Theilchen bestehen, auf welche nur interparticuläre Abstossungskräfte wirken, so dass, wenn $\varphi(r)$ ihr Wirkungsgesetz ist, $\varphi(r)$ für alle r, die kleiner als der Halbmesser ihrer Wirkungssphären sind, eine negative, ihr Zeichen nicht wechselnde Grösse ist. Zu dieser Art von Systemen gehört auch das sogenannte vollkommene Gas.

2. Systeme, die aus Theilchen bestehen, auf welche auch interparticuläre Anziehungskräfte wirken, so dass, wenn $\varphi(r)$ ihr Wirkungsgesetz ist, $\varphi(r)$ für alle r, die kleiner als der Halbmesser ihrer Wirkungssphären sind, eine entweder positive oder ihr Zeichen ein oder mehrere Male wechselnde Grösse ist. Zu dieser Art von Systemen gehören wahrscheinlich alle natürlichen einatomigen Gase und Dämpfe.

Wir haben gesehen (§ 4), dass alle Systeme der betrachteten Kategorie aus freien Theilchen und Theilchengruppen bestehen. Theilchengruppen oder Gruppen von im Zustande des Zusammenstosses begriffenen Theilchen kommen in Systemen beider Arten (nur das vollkommene Gas ausgenommen) vor, und bilden sich auch bei den höchsten Temperaturen und den schwächsten Drucken aus; aber ausser dieser Theilchengruppen kommen in den Systemen der zweiten Art bei genügend starken Drucken und niedrigen Temperaturen auch noch Theilchenaggregate oder complexe Theilchen vor.

Theilchengruppen und Theilchenaggregate sind wesentlich von einander verschiedene Gebilde; die Hauptunterschiede lassen sich so formuliren: 1. Theilchengruppen, wie schon erwähnt, kommen in Systemen beider Arten bei allen Drucken und Temperaturen vor, und sind, als selbstständige Systeme betrachtet, zufällige Systeme*; die kinetische Energie ihrer inneren Bewegung ist grösser als das Potential der in ihnen wirkenden Kräfte; sie zerfallen von selbst ohne Mitwirkung der übrigen Theilchen des Systems. Theilchenaggregate können nur in Systemen der zweiten Art bei genügend niederen Temperaturen und starken Drucken sich bilden; als selbstständige Systeme betrachtet, sie sind beständige Systeme; die kinetische Energie ihrer inneren Bewegung ist kleiner als das Potential der in ihnen wirkenden Kräfte; sie zerfallen nur, wenn in Folge ihrer Zusammenstösse mit anderen Theilchen des Systems die kinetische Energie ihrer inneren Bewegung bis zur Grösse des Potentials der in ihnen wirkenden Kräfte anwächst. 2. Wie schon erwähnt (Natanson's Theorem), ist die mittlere kinetische Energie der translatorischen Bewegung der Theilchen-

* Vergl. § 1 meiner Abhandlung: „Ueber das Gesetz Boltzmann's".

gruppen der mittleren kinetischen Energie der translatorischen Bewegung freier Theilchen gleich. Die mittlere kinetische Energie der translatorischen Bewegung der Theilchenaggregate ist (nach dem Maxwell'schen Gesetz für gemischte Gase) der mittleren kinetischen Energie der translatorischen Beweguug der übrigen Theilchen des Systems (die keine Theilchenaggregate bilden, solche aber, die Theilchengruppen bilden, mit inbegriffen) gleich, so dass, wenn auf die Theilchen des Systems ausschliesslich nur interparticuläre Anziehungskräfte wirken, oder, wenn solche nur vorwiegen, die mittlere kinetische Energie der translatorischen Bewegung der Theilchenaggregate grösser als die mittlere kinetische Energie der translatorischen Bewegung der Theilchengruppen ist.

Wie schon erwähnt, kommen die Theilchengruppen in Systemen beider Arten bei allen möglichen Temperaturen und Drucken vor. Die Theilchenaggregate können nur in Systemen der zweiten Art bei genügend niederen Temperaturen und starken Drucken sich ausbilden, so dass die ganze thermodynamische Fläche dieser Systeme durch eine Curve in zwei Gebiete getheilt werden kann; im Gebiete rechts von dieser Curve besteht das System ausschliesslich aus einzeln sich bewegenden Theilchen (und Theilchengruppen); im Gebiete links kommen auch Theilchenaggregate oder complexe Theilchen einer zufälligen Zusammensetzung vor. Diese Curve, aus weiter unten näher zu erörternden Gründen, nennen wir die Maximal-Spannungscurve des übersättigten Dampfes. Die Curve $(BCAT_c)$ der beigegebenen Figur (§ 7) ist die Projection dieser Curve auf die $(V_1 T)$ Ebene.

Vorläufig können wir die Bedingungen des Entstehens und Bestehens der Theilchenaggregate noch nicht formuliren; nichts desto weniger zeigen folgende Betrachtungen, dass in den Systemen der zweiten Art die Theilchenaggregate nur bei hinlänglich niederen Temperaturen entstehen und bestehen können, während ihr Bestehen bei hinlänglich hohen Temperaturen unmöglich ist. Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dass die mittlere kinetische Energie der relativen Bewegung der Theilchen eines Systems im stationären Zustande der mittleren kinetischen Energie ihrer translatorischen Bewegung proportional ist. Demnach wächst bei steigender Temperatur auch die mittlere kinetische Energie der relativen Bewegung der Theilchen eines Systems, so dass die Wahrscheinlichkeit des Entstehens und die mittlere Dauer des Bestehens der Theilchenaggregate abnehmen muss. Selbstverständlich können in Systemen, welche aus Elementartheilchen bestehen, bei Zusammenstössen von nur zwei Theilchen keine Zwei-Theilchenaggregate sich bilden. Aber bei gleichzeitigen Zusammenstössen von drei Theilchen (innerhalb von Drei-Theilchengruppen also), mag die Temperatur des Systems eine noch so hohe sein, kann es immer geschehen, dass die relative Geschwindigkeit zweier der zusammenstossenden Theilchen so sehr abnimmt, dass diese zwei Theilchen ihre weitere Bewegung zusammen, als ein Zwei-

Theilchenaggregat, vollführen. Ist aber die Temperatur des Systems hinlänglich hoch, so ist die mittlere Dauer des Bestehens eines solchen Zwei-Theilchenaggregats der mittleren Dauer zwischen je zwei auf einander folgenden Zusammenstössen einzeln sich bewegender Theilchen gleich. Die mittlere kinetische Energie der translatorischen Bewegung solcher Zwei-Theilchenaggregate wird demnach, vor dem Eintreten des Zerfalls der Aggregate, keine Zeit haben, einen der mittleren kinetischen Energie einzeln sich bewegender (und Theilchengruppen bildender) Theilchen gleichen Werth anzunehmen; und wird (nach dem Theoreme Natanson's) der mittleren kinetischen Energie der freien Theilchen gleich bleiben. Theilchenaggregate also, deren mittlere Dauer des Bestehens nicht grösser als die mittlere Dauer zwischen je zwei auf einander folgenden Zusammenstössen einzeln sich bewegender Theilchen ist, können auf den Zustand des Systems nur einen solchen Einfluss ausüben wie Theilchengruppen; wir werden sie auch als Theilchengruppen behandeln. Diejenigen Temperaturen und Drucke, bei denen solche Theilchenaggregate entstehen, deren mittlere Dauer des Bestehens grösser als die mittlere Dauer zwischen je zwei auf einander folgenden Zusammenstössen einzeln sich bewegender Theilchen ist, bilden das Gebiet der thermodynamischen Fläche des Systems, welches von der Maximal-Spannungscurve des übersättigten Dampfes begrenzt wird; und T_c, die grösste dieser Temperaturen, ist die wahre kritische Temperatur des Systems.

Drei-Theilchenaggregate können nur in Gruppen, welche aus vier gleichzeitig zusammenstossenden Elementartheilchen bestehen, sich bilden; daher ist die Bildung aus einzeln sich bewegenden Theilchen der Drei-Theilchenaggregate viel weniger wahrscheinlich als die Bildung von Zwei-Theichenaggregaten. Besteht aber das System aus ganz gleichartigen* Theilchen M (solche Systeme wollen wir vorzüglich im Auge behalten), so ist die Bildung der Drei-Theilchenaggregate M_3 aus einzeln sich bewegenden Theilchen M und Zwei-Theilchenaggregaten M_2 sogar wahrscheinlicher, als die Bildung der Zwei-Theilchenaggregate M_2 aus einzeln sich bewegenden Theilchen M; denn die Wechselwirkung der Aggregate M_2 und der Theilchen M, bei der Gleichartigkeit aller dieser Theilchen, muss nothwendig

* Das gewöhnlich Antozon genannte Gas, welches aus einzeln sich bewegenden Sauerstoffatomen O besteht, kann nicht als ein System aus ganz gleichartigen Theilchen bestehend angesehen werden; denn, obgleich alle Atome O unter einander identisch sind, so können sie sich doch, wie es scheint, in zwei verschiedenen Zuständen befinden; denn sonst müsste die Wechselwirkung von O_2 und O_2 stärker als die von O und O sein, während in Wirklichkeit die Wechselwirkung von O und O viel stärker als die von O_2 und O_2 ist. In einem Systeme, aus gleichartigen Elementartheilchen bestehend, können nur complexe Theilchen einer zufälligen Zusammensetzung oder Theilchenaggregate entstehen. In Systemen, welche aus heterogenen Elementartheilchen bestehen, können auch complexe Theilchen einer beständigen Zusammensetzung oder mehratomige Molecüle sich bilden.

grösser als die Wechselwirkung der Theilchen M und M sein; und das Aggregat M_3 kann noch bestehen, wenn die relativen Geschwindigkeiten der dasselbe bildenden Theilchen so gross sind, dass das Aggregat M_2 schon zerfallen würde. Ebenso ist die Wechselwirkung der Aggregate M_2 und M_2 stärker als die Wechselwirkung von M_2 und M; die von M_3 und M_2 stärker als die von M_2 und M_2; u. s. f.

Wenn wir daher, von einem Zustande eines aus gleichartigen Theilchen M bestehenden Systems zweiter Art ausgehend, in welchem das System noch ausschliesslich aus einzeln sich bewegenden Theilchen M (und Theilchengruppen) besteht, bei constantem Volumen die Temperatur des Systems allmählich erniedrigen, so kommen wir schliesslich zu einem solchen Zustande des Systems, in welchem Aggregate M_2 sich zu bilden beginnen. Dieser Zustand des Systems ist aber ein labiler, denn die Aggregate M_2, sobald sie sich gebildet haben, treten sogleich zu complicirteren Aggregaten zusammen; der Zustand des Systems wird erst dann wieder stabil werden, wenn das System aus einzelnen Theilchen M und einem oder einigen Aggregaten M_n, die aus einer sehr grossen Anzahl n von Theilchen M zusammengesetzt sind (flüssige Tropfen), besteht. Diesen labilen Zustand des Systems bezeichnen wir als den Zustand des übersättigten Dampfes.* Temperaturen und Drucke, bei denen Gleichgewicht zwischen einzeln sich bewegenden Theilchen M und Aggregaten M_n besteht, bezeichnen auf der thermodynamischen Fläche des Systems eine Curve, die wir die Spannungscurve des gesättigten Dampfes nennen wollen. Die Curve $(DCAT_c)$ der beigegebenen Figur (§ 7) ist die Projection dieser Curve auf die $(V_1 T)$ Ebene. Der Punkt C, in welchem diese Curve die Maximal-Spannungscurve des übersättigten Dampfes schneidet, entspricht der Temperatur T_a, welche Herr Mendeleew sehr passend also absolute Siedetemperatur bezeichnet hat; T_a ist etwas kleiner als T_c. Das Gebiet der thermodynamischen Fläche, welches von Curven begrenzt wird, deren Projectionen (BC) und (DC) sind, entspricht den labilen Zuständen des übersättigten Dampfes.

---

* In Wirklichkeit ist es sehr schwer, den Zustand des übersättigten Dampfes zu realisiren, denn es ist sehr schwer, einen von in ihm suspendirten Staubtheilchen ganz freien Dampf zu erhalten und noch schwerer ist es einen Dampf von den Wänden des Gefässes, welches ihn enthält, zu isoliren. Es ist aber nicht unmöglich, dass in höheren Luftschichten, welche ganz staubfrei sind, grosse mit stark übersättigtem Wasserdampfe erfüllte Räume sich vorfinden. Der Zustand dieser Dampfmassen ist ziemlich stabil, denn sollte auch irgendwo eine Verflüssigung dieses Dampfes beginnen, so kann leicht um das Gebiet des gesättigten Dampfes herum eine Schicht überhitzten Dampfes sich ausbilden, welche den übersättigten Dampf vom Einflusse der Wassertropfen isolirt. Wenn aber ein zufälliger Windstoss schnell die Gebiete des gesättigten und des übersättigten Dampfes unter einander mischt, so sind alle Bedingungen des Entstehens einer Cyclone vorhanden.

Es war schon erwähnt, dass, wenn das gegebene System aus gleichartigen Theilchen M besteht, die Wechselwirkung der Aggregate M_2 und M_2 (bei gleichbleibender Entfernung der Schwerpunkte der auf einander wirkenden Gebilde) grösser als die Wechselwirkung der Theilchen M und M ist; die Wechselwirkung von M_3 und M_3 grösser als die von M_2 und M_2, u. s. f. Die mittlere Wechselwirkung der Aggregate kann aber mit der wachsenden Zahl der sie bildenden Theilchen nicht auch unbegrenzt zunehmen; denn zugleich mit dieser Zahl wachsen nicht allein die Massen der Aggregate, sondern auch die mittleren Entfernungen ihrer Schwerpunkte. Es seien M_p diejenigen Aggregate, für welche die mittlere Wechselwirkung den grössten Werth hat; es ist klar, dass die Zahl p für jedes gegebene System einen ganz bestimmten, von der Intensität und dem Gesetze der Wechselwirkung der Theilchen M abhängigen Werth haben wird; die mittlere Wechselwirkung noch complicirterer Aggregate ist weniger intensiv. Die Aggregate M_n, aus einer sehr grossen Anzahl n von Theilchen M bestehend, können selbst als aus Aggregaten M_x, aus einer kleineren und veränderlichen Anzahl x von Theilchen M bestehend, zusammengesetzt betrachtet werden. Somit kann es geschehen, dass bei gewissen Dichten des Systems die Aggregate M_n in Aggregate der mittleren Zusammensetzung M_q (wenn q eine gewisse Zahl, die grösser als p ist) zerfallen, und dieses Zerfallen bei einer niedereren Temperatur eintritt, als das Zerfallen der Aggregate M_q in einzelne Theilchen M. Die kleinste dieser Dichten ist die Dichte des gesättigten Dampfes bei der absoluten Siedetemperatur oder der Temperatur des Verschwindens (resp. des Erscheinens) des Meniscus.* Die grösste dieser Dichten ist die wahre kritische Dichte.

Für alle $T > T_e$ ist V eine eindeutige Function der Parameter P und T; das System hat nur einen stationären Zustand und besteht ausschliesslich aus einzeln sich bewegenden Theilchen (und Theilchengruppen). Für alle $T < T_e$ ist V eine zweideutige Function der Parameter P und T; für jedes gegebene Paar von Werthen von P und T kann das System zwei verschiedene stationäre Zustände haben, die von einander durch die Dichten des Systems sich unterscheiden: im Zustande der kleineren Dichte besteht

* Wenn ich nicht irre, waren es Samin und Wromblewsky, die zuerst bemerkt haben, dass das Verschwinden des Meniscus bei der sogenannten kritischen Temperatur noch kein Beweis dafür ist, dass die Flüssigkeit bei noch höheren Temperaturen nicht bestehen kann. Der bekannte Versuch des Herrn Cailletet mit der Jodlösung in flüssiger Kohlensäure scheint diese Meinung zu bestätigen. Sehr treffend ist auch die Bemerkung des Herrn W. Galitzine (Journ. d. russ. phys. chem. Ges. 1891) von der Unmöglichkeit des Erscheinens des Meniscus in der Mitte einer mit dem gesättigten Dampfe einer Flüssigkeit gefüllten, zugelötheten Röhre, wenn die Dichten der Flüssigkeit und des Dampfes bei der absoluten Siedetemperatur einander gleich wären; wäre dem auch nur näherungsweise so, so könnte ein Meniscus nur entweder ganz unten oder ganz oben in der Röhre sich ausbilden.

das System ausschliesslich aus einzeln sich bewegenden Theilchen (und Theilchengruppen); im Zustande der grösseren Dichte besteht das System aus complexen Theilchen einer zufälligen Zusammensetzung oder Theilchenaggregaten; nach der Analogie mit den physikalischen Körpern können diese Zustände als gasförmig und tropfbarflüssig bezeichnet werden. Bei der absoluten Siedetemperatur hat das System noch zwei verschiedene stationäre Zustände oder zwei verschiedene Dichten; bei höheren Temperaturen nimmt der Unterschied dieser beider Dichten ab; bei der wahren kritischen Temperatur werden diese beiden Dichten einander gleich, und bei noch höheren Temperaturen kann das System für jedes gegebene Paar Werthe der Parameter P und T nur eine Dichte haben.

In den beiden nächsten Paragraphen wollen wir die Zustandsgleichungen für einige specielle Systeme der betrachteten Kategorie entwickeln.

§ 6. Abstossungskräfte.

Obgleich die Systeme der ersten Art kein praktisches Interesse darbieten, so ist doch, wegen der Complicirtheit der Systeme der zweiten Art, ein eingehendes Studium ihrer Eigenschaften zu empfehlen. Wir wollen die Zustandsgleichung eines speciellen Systems der ersten Art entwickeln; es sei nämlich gegeben ein conservatives System, bestehend aus einer sehr grossen Anzahl N von Theilchen (materiellen Punkten), welche auf einander nach dem Gesetze $\varphi(r)$ wirken, welches für alle Werthe von r, von $r = 0$ bis $r = \infty$ durch:

$$1) \qquad \varphi(\nu) = -n\mu/r^{n+1}$$

bestimmt wird; wo μ eine willkürliche positive Grösse und n eine willkürliche positive Zahl > 1 bedeuten. Ist die Grösse μ so klein, dass für Werthe von r von derselben Ordnung wie die Dimensionen des vom Systeme eingenommenen Raumes, nicht allein die Grösse $-\varphi(\nu)$, sondern auch die Grösse $-N\varphi(\nu)$, sehr klein sind, so können wir diese Kräfte als nahewirkende uns ansehen.

Ist P der äussere Druck und V der vom Systeme eingenommene Raum, so ist $\frac{3}{2}PV$ das Virial der äusseren Druckkräfte, die im Raume V wirken. Bezeichnen wir mit $-B$ das Virial der interparticulären Kräfte, und mit K die mittlere kinetische Energie der translatorischen Bewegung der Theilchen des Systems, so ist

$$2) \qquad \frac{3}{2}PV - B = NK$$

die Virialgleichung des Systems.

Schon Herr van der Waals* hat bemerkt, dass das Virial der interparticulären Kräfte eines Systems, welches aus Theilchen besteht, die

* Vergl. van der Waals: „Die Continuität etc.“, deutsch von Roth, 1881, Seite 6.

auf einander nach dem Gesetze $\varphi(\nu)$ wirken, gleich $\frac{1}{2}\sum r \cdot \varphi(\nu)$ ist, wo die Summation auf die Wechselwirkungen sämmtlicher Paare von Theilchen zu erstrecken ist, eine jede Wechselwirkung aber nur einmal zählend, so dass:

$$3)\qquad \Sigma r . \varphi(\nu) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=N}\sum_{q=1}^{q=N} r_{pq} . \varphi(r_{pq})$$

ist; auch muss bemerkt werden, dass alle Glieder dieser Doppelsumme, für welche $p = q$ ist, der Null gleich zu setzen sind. Bezeichnen wir mit $\psi(\nu)$ die Function:

$$4)\qquad \psi(\nu) = \mu / r^n$$

und mit $\Sigma\psi(\nu)$ die Doppelsumme:

$$5)\qquad \Sigma\psi(\nu) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=N}\sum_{q=1}^{q=N}\psi(\nu_{pq}),$$

deren Glieder, für welche $p = q$ der Null gleich zu setzen sind, so erhalten wir:

$$6)\qquad -\Sigma r . \varphi(\nu) = n\Sigma\psi(\nu).$$

Bezeichnen wir mit Ψ_0 die Potentialenergie der freien Theilchen des Systems, welche für alle solche Theilchen einen und denselben Werth hat, so ist $N\Psi_0 + \Sigma\psi(\nu)$ offenbar die Potentialenergie des Systems; so dass, wenn ψ die mittlere Potentialenergie sämmtlicher Theilchen des Systems bedeutet,

$$7)\qquad N\Psi = N\Psi_0 + \Sigma\psi(\nu)$$

ist. Wenngleich auch in einem Systeme, dessen Dichte gross genug ist, freie Theilchen nicht vorkommen, so können wir doch ein jedes Theilchen des Systems, ohne dessen Energie und die auf dasselbe wirkenden interparticulären Kräfte zu ändern, indem wir nur auf eine passende Weise die Richtung seiner Geschwindigkeit abändern und das Theilchen durch die äussere Grenzfläche des Systems hindurch lassen, zu einem freien Theilchen machen, wenn es sich weit genug vom Systeme entfernt hat. Es hat demnach die Grösse K_0, die mittlere kinetische Energie der freien Theilchen des Systems für alle, noch so grossen Dichten des Systems einen ganz bestimmten Werth. Es ist auch:

$$8)\qquad K + \Psi = K_0 + \Psi_0,$$

auch haben wir:

$$9)\qquad B = -\frac{1}{2}\sum r . \varphi(\nu) = \frac{n}{2}\sum\psi(\nu) = \frac{n}{2}N(\Psi - \Psi_0)\,\frac{n}{2}N(K_0 - K).$$

Jetzt stellen wir uns vor, dass der ganze vom Systeme eingenommene Raum in N einander gleiche regelmässige Dodekaeder eingetheilt ist; es ist V/N der Inhalt eines jeden dieser Dodekaeder. Nur die Richtungen der Geschwindigkeiten der Theilchen des Systems auf eine passende Weise abändernd, wobei die Energie ihrer translatorischen Bewegung ihren Werth

unverändert beibehält, können wir es offenbar erreichen, dass alle Theilchen des Systems gleichzeitig Stellungen in den Mittelpunkten dieser Dodekaeder einnehmen; von den Theilchen des Systems in einer solchen Stellung sagen wir, sie seien in symmetrischer Stellung. Die Entfernung ϱ eines jeden Paares benachbarter Theilchen in symmetrischer Stellung ist die mittlere interparticuläre Entfernung (ϱ ist grösser als die Kante des sogenannten Elementarwürfels, welche zuweilen, wenn auch fälschlich, als mittlere interparticuläre Entfernung bezeichnet wird). Offenbar ist:

$$10)\qquad N \cdot \frac{4}{3}\pi\varrho^3 = \gamma V,$$

wenn γ eine durch den Ausdruck (5, § 3) definirte Zahl bedeutet; das Verhältniss also des Inhaltes einer Sphäre zum Inhalte eines regelmässigen Dodekaeders, welches um eine achtmal kleinere Sphäre umschrieben ist.

Bezeichnen wir mit Ψ' die mittlere potentielle Energie der Theilchen des Systems in symmetrischer Stellung und mit r' die Entfernung irgend eines Paares dieser Theilchen von einander, so ist

$$11)\qquad N\Psi' = N\psi_0 + \Sigma\Psi(r');$$

ist K' die mittlere kinetische Energie der Theilchen des Systems in symmetrischer Stellung, so ist auch:

$$12)\qquad K' + \Psi' = K_0 + \Psi_0 = K + \Psi.$$

Durch passende Abänderungen nur der Richtungen der Geschwindigkeiten der Theilchen des Systems können diese Theilchen gleichzeitig in die symmetrische Stellung gebracht werden; auch können diese Abänderungen derart sein, dass die Richtungen der Geschwindigkeiten der Theilchen, welche vor der Abänderung alle gleichwahrscheinlich waren, es auch in der symmetrischen Stellung der Theilchen bleiben. Denken wir uns diese Abänderungen durch gewisse zugegebene Kräfte vollführt, so ist demnach das Virial dieser zugegebenen Kräfte beständig gleich Null und diese Kräfte ändern den Widerstand des Systems dem äusseren Drucke nicht. Somit, wenn $-B'$ das Virial der interparticulären Kräfte für die symmetrische Stellung des Systems bedeutet, gilt auch die Gleichung:

$$13)\qquad \frac{3}{2}PV - B' = NK'.$$

Ganz so, wie früher, finden wir auch:

$$14)\quad B^1 = -\frac{1}{2}\sum r'.\varphi(r') = \frac{n}{2}\sum\psi(r') = \frac{n}{2}N(\Psi' - \Psi_0) = \frac{n}{2}N(K_0 - K'^0)$$

und die Gleichung 13) geht über in:

$$15)\qquad \frac{3}{2}PV - \frac{n}{2}NK_0 = NK'\left(1 - \frac{n}{2}\right);$$

nun kann aber die Gleichung 2) wegen 9) auch so geschrieben werden:

16) $$\frac{3}{2} PV - \frac{n}{2} NK_0 = NK\left(1 - \frac{n}{2}\right)$$

und folglich ist:

17) $$K' = K,$$

das heisst, die mittlere kinetische Energie der Theilchen in symmetrischer Stellung ist ihrer mittleren kinetischen Energie in allen möglichen Stellungen gleich. Wegen 12) ist auch:

18) $$\Psi' = \Psi.$$

Nun ist aber Ψ' die mittlere potentielle Energie der Theilchen in symmetrischer Stellung offenbar eine nur von V abhängige Grösse und hat bei einem constanten Werthe von V für alle möglichen Werthe von K einen und denselben Werth. Demnach hat das betrachtete System die merkwürdige Eigenschaft, dass die potentielle Energie des Systems eine von dessen Temperatur unabhängige Grösse ist.*

Befinden sich zur gegebenen Zeit alle Theilchen des Systems in symmetrischer Stellung, so sind um jedes Theilchen die übrigen Theilchen auf concentrischen Sphären vertheilt zu je zwölf Theilchen auf jeder Sphäre. Der Halbmesser der kleinsten dieser Sphären ist ϱ, der mittleren interparticulären Entfernung gleich; der Halbmesser der zweiten ist gleich der Summe aus dem Durchmesser einer Sphäre, welche um ein regelmässiges Dodekaeder umschrieben ist, in welches eine Sphäre mit dem Halbmesser ϱ eingeschrieben ist, und der Kante dieses Dodekaeders, folglich $= \varrho \,.\, 1{,}7074$; ebenso finden wir, dass der Halbmesser der dritten Sphäre $= 2\,\varrho$ ist, u. s. f. Auf diese Weise, wenn $r'_{1,q}$ die Entfernung des Theilchens m_1 von einem Theilchen m_q bei der symmetrischen Stellung des Systems ist, erhalten wir:

19) $$\Sigma\psi(r') = \frac{1}{2} N \sum_{q=2}^{q=N} \psi(r'_{1,q}) = N \,.\, \frac{6\mu}{\varrho^n}\left\{1 + \frac{1}{(1{,}7074)^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist ganz genau richtig, denn wie schon (§ 1) erwähnt wurde, die äusserste, unmittelbar an die äussere Grenzfläche des Systems anliegende Schicht, betrachten wir als dem äusseren Mittel, welches auf das System den äusseren Druck P ausübt, gehörig; so dass die potentielle Energie eines jeden Theilchens des Systems in symmetrischer Stellung einen für alle Theilchen (diejenigen ausgenommen, welche jene äusserste Schicht bilden) constanten Werth hat. Die in 19) vorkommende Reihe ist für alle $n > 1$ convergent, selbst wenn sie unendlich viele Glieder enthalten sollte; die Summe ihrer Glieder ist einer gewissen Zahl, die wir mit γ bezeichnen

---

* Es muss bemerkt werden, dass diese beiden Sätze: $K' = K$ und $\Psi' = \Psi$, nur für Systeme gelten, die aus Theilchen bestehen, welche auf einander nach dem Gesetze $\varphi(v) = \pm \mu / v^n$ wirken. Ist das Wirkungsgesetz ein anderes, so ist für Systeme der ersten Art $K' > K$ und $\Psi' < \Psi$, und für Systeme der zweiten Art $K' < K$ und $\Psi' > \Psi$.

wollen, gleich. Diese Zahl γ ist nur von n, also dem Wirkungsgesetze der Theilchen des Systems abhängig, nicht aber von dessen Zustande und somit für ein jedes gegebene System constant. Bezeichnen wir der Kürze wegen mit a' die Constante:

$$a' = 6 N \gamma \mu \left(N \cdot \frac{4\pi}{3\nu} \right)^{\frac{n}{3}}, \tag{20}$$

so können wir, wegen 10), 11) und 12) den Ausdruck 19) auch so schreiben:

$$\Sigma \psi(\nu') = N(\Psi' - \Psi_0) = N(K_0 - K') = a'/V^{\frac{n}{3}} \tag{21}$$

und die Gleichung 13) geht über in:

$$\frac{3}{2} P V - \frac{n}{2} a'/V^{\frac{n}{3}} = N K; \tag{22}$$

es ist dies die Virialgleichung des betrachteten Systems. Bezeichnen wir mit T die Temperatur des Systems*, so erhalten wir, die Constante R durch:

$$R T = \frac{2}{3} N K \tag{23}$$

bestimmend, und der Kürze wegen:

$$a = \frac{1}{3} n a' \tag{24}$$

setzend,

$$P V - a/V^{\frac{n}{3}} = R T \tag{25}$$

die Zustandsgeichung des betrachteten Systems. Diese Gleichung gilt für alle möglichen Werthe der Parameter P, V, T, das heisst für alle ihre Werthe von 0 bis ∞, und zeigt, dass das betrachtete System weniger compressibel ist, als das ideale Gas: für alle Zustände des Systems ist $PV/RT > 1$ (beim idealen Gase ist diese Grösse constant und $= 1$). Das betrachtete System ist für kleine V stärker und für grosse V weniger stark zusammendrückbar als ein vollkommenes Gas.

Da die betrachteten Systeme kein praktisches Interesse darbieten, so wollen wir ihre Zustandsgleichung nicht weiter discutiren: nur müssen wir auf eine sehr charakteristische Eigenschaft dieser Systeme (die auch allen Systemen der ersten Art eigen ist) hinweisen. Bei hinlänglich hohen Temperaturen gehören diese Systeme zur Gruppe von Systemen mit einer Herumbewegung der Theilchen**; es ist leicht einzusehen, dass bei

* Dass die Temperatur der Systeme, welche wir einatomige Gase genannt haben und welche ausschliesslich aus Elementartheilchen bestehen, der mittleren kinetischen Energie der translatorischen Bewegung ihrer Theilchen proportional ist, und bei einer passenden Wahl der Einheit dieser Energie gleich gesetzt werden darf, habe ich schon in meiner Abhandlung: „Die Grundlagen einer kinetischen Theorie mehratomiger Gase“ (Journ. d. russ. phys. chem. Ges. 1886) gezeigt. Einen strengeren Beweis dieses Satzes hoffe ich in einer meiner nächsten Arbeiten liefern zu können.

** Vergl. § 4 meiner Abhandlung: „Ueber das Gesetz Boltzmann's.“

hinlänglich niederen Temperaturen (und zwar um so niedrigeren, je grösser V, der vom Systeme eingenommene Raum ist) ändern sie ihren Charakter und verwandeln sich in starre Systeme oder Systeme ohne Herumbewegung der Theilchen. Sehr charakteristisch für diese Systeme ist die Isotherme $T = 0$; bei dieser Temperatur sind alle Theilchen in Ruhe und in symmetrischer Stellung; das Virial der interparticulären Abstossungskräfte ist mit dem Virial der äusseren Druckkräfte im Gleichgewicht. Wenn wir, von dem Zustande des Systems bei $T = 0$ ausgehend, dessen Temperatur allmählich erhöhen, so gerathen die Theilchen des Systems in Bewegung; diese Bewegung besteht aber aus Schwingungen der Theilchen um ihre Gleichgewichtslagen; mit zunehmender Temperatur nehmen auch die Amplituden dieser Schwingungen zu. Der Ausdruck 25) kann uns die Gleichung der Curve liefern, welche die thermodynamische Fläche des Systems in zwei Gebiete theilt, so dass im Gebiete rechts von ihr das System zur Gruppe von Systemen mit einer Herumbewegung, im Gebiete links zur Gruppe der Systeme ohne Herumbewegung ihrer Theilchen gehört.

§ 7. Anziehungskräfte.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen sind, einige wenige Zeichenänderungen ausgenommen, auch an ein specielles System der zweiten Art, vorausgesetzt, dass es keine Theilchenaggregate enthält*, anwendbar, nämlich an ein System, bestehend aus einer sehr grossen Anzahl N von Theilchen (materiellen Punkten), welche nach dem Gesetze $\varphi(r)$ auf einander wirken, welches für alle r von $r = 0$ bis $r = \infty$ durch:

$$1) \qquad \varphi(r) = n\mu / r^{n+1}$$

bestimmt wird, wo n eine willkürliche positive Zahl > 1 ist, und μ eine willkürliche, genügend kleine, positive Constante bedeutet; bei genügend kleinem μ können wir diese Kräfte als nahewirkende ansehen. Wie leicht ersichtlich, ist

$$2) \qquad PV + a/V^{\frac{n}{3}} = RT$$

die Zustandsgleichung dieses Systems, wenn a und R durch die Ausdrücke 20), 23) und 24) [§ 6] bestimmte Constanten sind.

Wir dürfen aber dieses System nicht als ein, im eigentlichen Sinne des Wortes, conservatives System ansehen, denn ist der von ihm ein-

* Sollten im Systeme Theilchenaggregate sich vorfinden, so ist es unmöglich, durch blose Richtungsänderungen der Geschwindigkeiten der Theilchen, alle diese Theilchen zugleich in die symmetrische Stellung zu bringen: um nämlich die Theilchenaggregate „zu zerreissen" ist ein gewisser Energieaufwand nöthig. Auch ist zu bemerken, dass K_0 die mittlere kinetische Energie der freien Theilchen eines Systems der zweiten Art, auch negative Werthe haben kann; ein negatives K_0 ist dem mittleren Energieaufwande, welcher, um ein Theilchen des Systems zu einem freien Theilchen zu machen, verbraucht werden muss, gleich.

genommene Raum endlich, so ist der Energievorrath dieses Systems unendlich gross, und wir müssen diesem Systeme, damit er einen endlichen Raum einnehme, einen unendlich grossen Energievorrath ertheilen. Daher wollen wir die Zustandsgleichung dieses Systems nicht weiter discutiren. Es sei gegeben ein conservatives System, bestehend aus einer sehr grossen Anzahl N sich bewegender, vollkommen harter, elastischer Kugeln, die einander mit einer der $n+1$ Potenz der Entfernungen ihrer Centra umgekehrt proportionalen Kraft anziehen; $\varphi(\nu)$, das Wirkungsgesetz der Theilchen dieses Systems, wird durch 1) bestimmt. Die Gleichung 2) mit der von uns bereits gefundenen [11), § 3] Zustandsgleichung des vollkommenen Gases combinirend, ist es leicht, die Zustandsgleichung auch dieses Systems zu finden.

Bezeichnen wir mit b die Summe der Inhalte regelmässiger Dodekaeder, die um sämmtliche Theilchen des Systems (die Kugeln) umschrieben sind, und der Kürze wegen mit ε die Grösse:

3) $$\varepsilon = \nu b/(V-b),$$

wo ν eine durch 5) [§ 3], bestimmte Zahl ist. Ist V der vom Systeme eingenommene Raum, so ist, wie wir schon (§ 3) gesehen haben, $Ve^{-\varepsilon}$ der für die Bewegung der Theilchen freie Raum; und das Virial der äusseren Druckkräfte, die im Raume $Ve^{-\varepsilon}$ wirken, ist $\frac{3}{2}PVe^{-\varepsilon}$. Dem Virial der interparticulären Kräfte $\varphi(\nu)$, die im Raume V wirken, können wir auch die Form $\frac{3}{2}P'V$ geben, wenn wir mit P' einen gewissen Druck, den sogenannten particulären Druck, bezeichnen. Es wird demnach $\frac{3}{2}P'Ve^{-\varepsilon}$ das Virial der interparticulären Kräfte $\varphi(\nu)$, die im Raume $Ve^{-\varepsilon}$ wirken, sein. Folglich ist

4) $$PV + a/V^{\frac{n}{3}} = RT \,.\, e^{\nu b/(V-b)}$$

die Zustandsgleichung des betrachteten Systems.

Diese Zustandsgleichung wollen wir etwas eingehender discutiren. Es ist leicht ersichtlich, dass das betrachtete System stärker zusammendrückbar ist, als das vollkommene Gas, welches aus gleich grossen Kugeln wie das betrachtete System besteht. Die Grösse PV/RT, welche wir der Kürze wegen mit G bezeichnen wollen, hat beim vollkommenen Gase für dieselben V und T grössere Werthe, als bei dem Systeme. Für $V=\infty$ und alle möglichen T bei dem Systeme (wie beim idealen Gase für alle möglichen V und T) ist $G=1$. Für abnehmende V und eine constante T nimmt die Grösse G im Allgemeinen ab und ist < 1; für alle Werthe von V und T, für welche $G < 1$ ist, ist das System stärker zusammendrückbar, als das ideale Gas. Bei weiter abnehmenden V und einer constanten T fährt die Grösse G fort abzunehmen, erreicht ein Minimum, und

nimmt dann zu, wird abermals $= 1$ und wächst unbegrenzt; für $V = b$ ist $G = \infty$.

Notiren wir für eine jede gegebene T denjenigen Werth von V, für welchen $G = min.$, so werden diese Werthe auf der thermodynamischen Fläche des Systems eine Curve bezeichnen, welche wir die Curve der kleinsten PV nennen wollen. Die Gleichung der Projection dieser Curve auf die (V, T) Ebene, wie leicht ersichtlich ist:

$$RT \, . \, e^{\nu b/(V-b)} = \frac{n}{3} a (V-b)^2 / \nu b \, . \, V^{1+\frac{n}{3}};$$

es ist dies die Curve (EF) der beigegebenen Figur. Es sind drei Fälle möglich: 1. Ist $n < 3$, so hat die Curve 5) nur einen Zweig, welcher sich durch die ganze thermodynamische Fläche von $V = b$, $T = 0$ bis $V = \infty$, $T = \infty$ hinzieht. 2. Ist $n = 3$, so hat die Curve 5) auch nur einen Zweig, welcher von $V = b$, $T = 0$ ausgehend, asymptotisch der Ordinate einer gewissen Temperatur T_1 sich nähert; für eine jede $T > T_1$ hat G kein Minimum, und nimmt von $G = 1$ für $V = \infty$ ununterbrochen und unbegrenzt zu; das System hat für diese Temperaturen den Charakter eines vollkommenen Gases; für eine jede $T < T_1$, von $G = 1$ für $V = \infty$ an, nimmt G anfangs ab, erreicht ein Minimum und nimmt dann ununterbrochen und unbegrenzt zu. 3. Ist $n > 3$, so hat die Curve 5) zwei Zweige, welche von $V = b$, $T = 0$ und $V = \infty$, $T = 0$ ausgehend, sich auf der Ordinate einer gewissen Temperatur T_1 begegnen, für alle $T > T_1$ hat das System den Charakter eines vollkommenen Gases; für eine jede $T < T_1$, von $G = 1$ für $V = \infty$ an, nimmt G Anfangs zu, erreicht ein Maximum, nimmt dann ab, erreicht ein Minimum, um dann zuletzt ununterbrochen und unbegrenzt zuzunehmen.

Wir wollen jetzt die Aenderungen des äusseren Druckes P, als Function der Parameter V und T, gegeben durch die Gleichung 4), verfolgen. Für $V = \infty$ und für alle T (ausser $T = \infty$) ist $P = 0$; für abnehmende V und eine constante T wächst der äussere Druck P. Verfolgen wir das Zunehmen von P längs einer Isotherme, die einer Temperatur, welche grösser als eine gewisse Temperatur T_c ist, entspricht, so werden wir finden, dass P ununterbrochen und unbegrenzt zunimmt (so dass $dP/dV < 0$ für alle Werthe von V ist), und für $V = b$ ist $P = \infty$. Verfolgen wir aber die Aenderungen von P längs einer Isotherme, die einer Temperatur, die kleiner als T_c ist, entspricht, so finden wir, dass P zuerst zunimmt $(dP/dV < 0)$, erreicht ein Maximum $(dP/dV = 0)$, nimmt dann ab $(dP/dV > 0)$, erreicht ein Minimum $(dP/dV = 0)$, um dann zuletzt ununterbrochen und unbegrenzt zuzunehmen $(dP/dV < 0)$.

Notiren wir für eine jede $T < T_c$ denjenigen Werth von V, für welchen $P = max.$, so bezeichnen diese Werthe von V auf der thermodynamischen Fläche des Systems eine Curve, deren Projection auf die (V, T) Ebene den Ausdruck:

$$6)\quad RT\{(V-b)^2 + \nu b \,.\, V\} e^{\nu b/(V-b)} = \left(\frac{n}{3}+1\right) a\,(V-b)^2/V^{\frac{n}{3}}$$

zur Gleichung hat; es ist dies die Curve ($BCAEb$) der beigegebenen Figur. Nun ist es klar, dass bei einer constanten T und abnehmendem V, der äussere Druck P nur deshalb ein Maximum erreichen und dann abnehmen kann, weil die Theilchen des Systems beginnen, zu Theilchenaggregaten zusammen zu treten: es ist also die Curve (BCA) die Projection der Maximal-Spannungscurve des übersättigten Dampfes (vergl. § 5). Die Curve 6) hat zwei Zweige (BCA und AEb der Figur), da einem jeden Werthe von T zwei Werthe von V entsprechen, ein grösserer und ein kleinerer. Für die grösseren V ist $P = max.$, für die kleineren $P = min.$ Bezeichnen wir mit V_c und T_c diejenigen Werthe von V und T, für welche beide Zweige der Curve 6) sich begegnen, so finden wir, dass für $V = V_c$ und $T = T_c$, $P = minimax;$ diesen Werth von P wollen wir mit P_c bezeichnen; T_c ist die wahre kritische Temperatur, P_c der wahre kritische Druck und $1/V_c$ die wahre kritische Dichte. Für alle $T > T_c$ kann das System nur einen stationären Zustand haben und besteht ausschliesslich aus einzeln sich bewegender Theilchen (und Theilchengruppen); nach der Analogie mit physikalischen Körpern kann dieser Zustand als der gasförmige bezeichnet werden. Für alle $T < T_c$ gegebenen Paaren von Werthen der Parameter P und T entsprechen je zwei Werthe von V, ein grösserer und ein kleinerer; das System kann zwei verschiedene stationäre Zustände, der kleineren und der grösseren Dichte, haben. Im Zustande der kleineren Dichte oder dem gasförmigen besteht das System ausschliesslich aus einzeln sich bewegenden Theilchen (und Theilchengruppen); im Zustande der grösseren Dichte oder dem tropfbarflüssigen besteht es aus Theilchenaggregaten einer zufälligen Zusammensetzung. Wie leicht ersichtlich, wird V_c durch die Gleichung:

$$7)\quad \frac{2V_c + (\nu-2)b}{(V_c-b)^2 + \nu b \,.\, V_c} = \frac{n}{3} \cdot \frac{(V_c-b)^2}{\nu b \,.\, V_c^2}$$

bestimmt; T_c bestimmt die Gleichung 6), wenn in ihr $V = V_c$ gesetzt wird und P_c wird durch die Gleichung 4), wenn in ihr $V = V_c$ und $T = T_c$ gesetzt werden, bestimmt.

Die Gleichung 4) zeigt, dass P eine lineare Function der Temperatur ist. Bezeichnen wir mit A und B zwei positive Grössen, die nur von der Dichte des Systems abhängen, also Functionen nur des einen Parameters V sind, so hat die Gleichung 4) die Form:

$$8)\quad P = AT - B;$$

die Isochoren (oder Isopyknen) des betrachteten Systems (wie beim vollkommenen Gase) sind gerade Linien.

Die Zustandsgleichung 4) des betrachteten Systems enthält vier Constanten n, a, b und R; von denen aber nur drei, n, a und b, willkürlich,

das heisst von den Eigenschaften der Theilchen des Systems abhängig sind. Die Constante R ist nur von der Wahl der Einheiten abhängig. Als Einheit des Druckes nehmen wir den Druck einer Atmosphäre (760 mm Quecksilbersäule); als Einheit der Temperatur den Grad der centesimalen Scala, und als ein Einheit des Volumens das sogenannte Normalvolumen, das heisst das Volumen des idealen Gases, welches aus ebenso vielen Theilchen, wie das betrachte System besteht, bei $P = 1$ und $T = 273^0$. Bei dieser Wahl der Einheiten ist R dem Ausdehnungs- (resp. Spannungs-) Coefficienten des idealen Gases gleich:

$$R = 1/273 = 0{,}003663, \tag{9}$$

also: die Constante n ist eine Zahl, welche die Schnelligkeit des Abnehmens der interparticulären Kräfte mit wachsender Entfernung der auf einander wirkenden Theilchen misst. Die Constante b ist ein Volumen, in den Einheiten des Volumens gemessen; es ist nämlich $\frac{1}{8}\nu b$ die Summe der Volumina, der von den Theilchen selbst (den Kugeln) eingenommenen Räume. Die Constante a misst die Intensität der interparticulären Kräfte und hat dieselbe Maasseinheit als die Grösse $RTV^{\frac{n}{3}}$, so dass $aRTV^{\frac{n}{3}}$ eine Zahl ist.

Für ein besseres Verständniss der Eigenthümlichkeiten der betrachteten Systeme ist die Ausrechnung eines Zahlenbeispiels zu empfehlen; den Constanten n, a, b bestimmte Zahlenwerthe ertheilend, wollen wir eine Reihe von Werthen der Grösse P berechnen, die gegebenen Werthen der Parameter V und T entsprechen. Dieses Zahlenbeispiel wollen wir aber so wählen, dass das betrachtete System die grösstmögliche Aehnlichkeit mit einem der existirenden Gase aufweise. Leider sind die experimentellen Data, das einzige den Beobachtungen zugängliche einatomige Gas, den Quecksilberdampf nämlich, betreffend, viel zu unsicher, um hoffen zu können, die Constanten n, a, b so zu bestimmen, dass das betrachtete System eine genügende Aehnlichkeit mit dem Quecksilberdampf aufweise. Wir sind somit auf eines der mehratomigen Gase gewiesen; wir wählen den Stickstoff, da die experimentellen Daten, dieses Gas betreffend, die genannten zu sein scheinen.

In § 4 haben wir gezeigt, dass die Virialgleichung für mehratomige Gase ganz dieselbe Gestalt, wie für einatomige hat, so dass, ganz so wie bei diesen Gasen die kinetische Energie der translatorischen Bewegung complexer Theilchen im stationären Zustande eines mehratomigen Gases der Summe der Viriale der äusseren Druckkräfte und der interparticulären Kräfte gleich ist. Nur entgeht uns aber die Gewissheit, dass die Grössen n, a, b, welche für ein aus Elementartheilchen bestehendes System constant sind, auch als constant bei einem mehratomigen Gase sich erweisen. Nichtsdestoweniger die enorm grosse Intensität der chemischen Affinitäts-

kräfte, welche die Atome zu einem Molecüle verbinden, lässt es erwarten, dass die undurchdringlichen Sphären mehratomiger Molecüle für ziemlich weite Temperaturgrenzen sich als constant erweisen. Auch ist noch zu beachten, dass wir, die Zustandsgleichung 4) an ein mehratomiges Gas anwendend, voraussetzen, dass $\varphi(r) = n\mu/r^{n+1}$ das Wirkungsgesetz mehratomiger Molecüle ist; nun sind aber die intermoleculären Kräfte, die während der Zusammenstösse der Molecüle mit einander wirken, keine conservativen Kräfte, da sie nicht allein von der Entfernung der Centra der zusammenstossenden Molecüle, sondern auch von der relativen Lage der Atome innerhalb dieser Molecüle abhängen. Es ist aber klar, dass der Mittelwerth der intermoleculären Kräfte, die bei allen möglichen, im Gase vorkommenden Zusammenstössen der Molecüle wirken, als eine conservative Kraft angesehen und einem Ausdrucke von der Form $n\mu/r^{n+1}$ gleichgesetzt werden darf; auch ist das Virial der intermoleculären Kräfte nur von diesem Mittelwerthe abhängig.

Das betrachtete System hat alle Eigenschaften des Stickstoffs, wenn die Constanten n, a, b folgende Zahlenwerthe haben:

$$n = 3, \quad a = 0{,}002818, \quad b = 0{,}000351;$$

es ist dies also ein System aus vollkommen harten elastischen Kugeln bestehend, die einander mit einer der vierten Potenz der Entfernungen ihrer Centra umgekehrt proportionalen Kraft anziehen; die Summe der Inhalte sämmtlicher um die Theilchen des Systems (die Kugeln) umschriebener regelmässiger Dodekaeder (oder das Minimalvolumen des Systems) ist dem 0,000351 Theile des Normalvolumens gleich. Wir wollen für dieses System die Isotherme $T = 288^0$ berechnen.

V	P	P	G	P'	Θ
∞	0	—	1	0	288,00
1	1,0544	*S.* 1,0545	0,99977	1,0572	287,50
0,0195	53,00	*S.* 53,45	0,97968	60,41	261,66
0,0168	61,45	*S.* 62,02	0,97860	71,43	257,46
0,0128	80,51	*S.* 81,51	0,97605	97,71	246,12
0,0100	103,90	*S.* 103,86	0,98488	132,08	235,70
0,0065	162,38	*S.* 165,94	1,0005	229,09	209,08
0,004377	260,92	*S.* 266,00	1,1293	408,0	171,8
0,0023863	757,5	*A.* 750	1,7135	1252,4	73,0
0 0021436	991,9	*A.* 1000	2,0146	1605,3	48,6
0,0018599	1496,1	*A.* 1500	2,6377	2310,8	12,2
0,0017016	2004,3	*A.* 2000	3,2329	2977,7	− 12,0
0,0015982	2507,5	*A.* 2500	3,7988	3610,9	− 33,0
0,0015255	2991,6	*A.* 3000	4,3260	4202,7	− 48,2

Die erste Rubrik dieser Tafel enthält gegebene Werthe von V; die zweite Rubrik die diesen Werthen bei der Temperatur $T = 288^0$ entsprechenden Werthe von P, nach der Gleichung 2) berechnet; die dritte Rubrik enthält die beobachteten* Drucke des Stickstoffs, die bei der Temperatur $T = 288^0$, den in der ersten Rubrik enthaltenen Werthen des Volumens dieses Gases entsprechen. Ausser den Werthen von P haben wir noch die den gegebenen Werthen von V bei der Temperatur $T = 288^0$ entsprechenden Werthe der Grössen G, P', Θ berechnet, die für den Zustand des Systems sehr charakteristisch sind. Es ist $G = PV/RT$; P' ist der Druck eines aus ebenso grossen Kugeln wie das betrachtete System bestehend vollkommenen Gases bei denselben Werthen der Parameter V und T. Wenn wir, wie früher (§ 6), mit K_0 die mittlere kinetische Energie der freien Theilchen des Systems bezeichnen, so wird die Grösse Θ durch:

$$10) \qquad R\Theta = \frac{2}{3} N K_0$$

bestimmt; es misst also Θ die Energie K_0 ganz ebenso, wie T, die Temperatur des Systems, die Energie K misst, so dass Θ als die Temperatur der freien Theilchen des Systems bezeichnet werden kann; wie aus den Gleichungen 17) und 21) [§ 6], leicht ersichtlich, ist auch

$$11) \qquad R\Theta = RT - 2a/nV^{\frac{n}{3}}.$$

Es kann Θ bei sehr hohen Drucken auch negative Werthe haben; diese Werthe messen den um alle Theilchen des Systems zu freien Theilchen zu

---

* Es ist in der letzten Zeit Herrn Sarrau (Comptes rendus, 1890, Bd. 110) gelungen, für die vier Constanten seiner bekannten Interpolationsformel solche Zahlenwerthe zu finden, welche diese Formel zu einer ziemlich richtigen Zustandsgleichung des Stickstoffs machen. Da bei kleineren Drucken die Uebereinstimmung der Formel Sarrau's mit den experimentellen Daten eine beinahe vollkommene ist, so habe ich die Zahlen der dritten Rubrik der beigegebenen Tafel, die mit *S.* (Sarrau) bezeichnet sind, nach dieser Formel berechnet. Die mit *A.* (Amogat) bezeichneten Zahlen sind den Versuchen von Amogat entnommen, da bei grossen Drucken die Formel von Sarrau Differenzen zeigt, welche die möglichen Versuchsfehler weit übertreffen, wie die Zusammenstellung folgender Zahlen:

P. (Amogat) = 750, 1500, 2000, 2500, 3000,
P. (Sarrau) = 742, 1498, 2125, 2896, 3812

zeigt. Die Differenzen der Zahlen der dritten und zweiten Rubrik unserer Tafel liegen alle innerhalb der Grenzen möglicher Versuchsfehler, trotzdem, dass wir in der Formel 2) nur über zwei willkürliche Constanten zu disponiren haben (Sarrau's Formel enthält vier solche Constanten). Die Constante n ist nicht als eine willkürliche anzusehen, da die betrachtete Isotherme des Stickstoffs mit grosser Bestimmtheit darauf hinweist, dass die Wirkungskräfte der Stickstoffmolecüle genau der vierten Potenz der Entfernungen ihrer Centra umgekehrt proportional sind.

machenden nöthigen Energie- (oder Arbeits-) Aufwand. Für Temperaturen, die höher als 1461^0 sind, bleibt Θ, wie leicht ersichtlich, selbst bei den höchsten Drucken positiv. $P' - P$ ist der sogenannte particuläre Druck oder die Druckerniedrigung in Folge der auf die Theilchen des Systems wirkenden interparticulären Anziehungspunkte. So erniedrigen die intermoleculären Anziehungskräfte des Stickstoffs den Druck dieses Gases bei $V = 0{,}0015255$ und $T = 288^0$ um 1211 Atmosphären. Die Grösse $T - \Theta$ misst die von den Theilchen des Systems, welche, aus dem von ihm eingenommenen Raume heraustretend, zu freien Theilchen werden, geleistete Arbeit; wenn wir dem Stickstoff bei $T = 288^0$ und $P = 1496$ die Möglichkeit, ohne äussere Arbeitsleistung sich adiabatisch auszudehnen, ertheilen, so wird, wenn das Gas sich in einem sehr grossen Raume verbreitet hat, dessen Temperatur von 288^0 auf 12^0 sinken*, was einer Verminderung der geometrisch-mittleren Moleculargeschwindigkeit von 505 m/*sec* bei 288^0 auf 103 m/*sec* bei 12^0 entspricht. Die wahren kritischen: Temperatur, Druck und Dichte für das betrachtete System sind:

$$T_c = 132{,}1, \quad P_c = 39{,}45, \quad V_c = 0{,}004377.$$

Die beigegebene Figur stellt die (V, T) Ebene vor; die Linie, welche aus der Curve (BCA), der Projection der Maximal-Spannungscurve des übersättigten Dampfes $(P = max.)$ und der Strecke (AT_c) der Ordinate der wahren kritischen Temperatur, besteht, theilt die (V, T) Ebene in zwei Gebiete. Ueber dem Gebiete rechts von dieser Linie liegt die thermodynamische Fläche des gasförmigen Zustandes des Systems. Die Curve (DCA) ist die Projektion der Spannungscurve des gesättigten Dampfes; wie schon oben (§ 5) erwähnt wurde, haben wir vorläufig noch nicht die nöthigen Data, um ihre Gleichung aufzustellen. Auf der beigegebenen Figur haben wir ihr eine der Curve (BCA) ähnliche Gestalt gegeben, nur dass, während sich diese asymptotisch der Ordinate der Temperatur des absoluten Nullpunkts nähert, nähert sich jene asymptotisch der Ordinate einer Temperatur, die > 0 ist. Für alle Punkte der thermodynamischen Fläche, die über dem Gebiete der (V, T) Ebene liegen, welches von den Curven (BC) und (CD) begrenzt wird, befindet sich das System im labilen Zustande des übersättigten Dampfes. Die Curve (AEb) ist der andere Zweig der Curve (ACB), derjenige nämlich, für welchen $P = min.$ ist. Die Linie (EF) ist die Projection der Curve der kleinsten PV; sie hat auch links von der Ordinate der wahren kritischen Temperatur eine Fortsetzung (welche auf der Figur nicht gezeigt ist), schneidet die Curve (AEb) und endigt wie diese im Punkte $V = b$, $T = 0$. Die Fortsetzung der Linie (EF) nähert

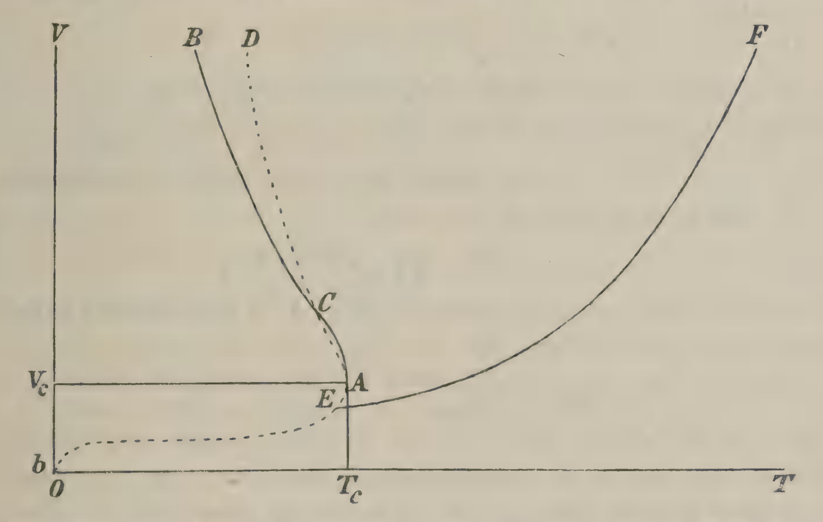
* Das heisst eine solche Temperaturerniedrigung würde erfolgen, wenn der Stickstoff ein einatomiges Gas wäre; da aber der Stickstoff ein zweiatomiges Gas ist, so erfolgt bei den gegebenen Umständen nur eine Temperaturerniedrigung von 288^0 bis 122^0.

sich asymptotisch der Ordinate einer gewissen Temperatur $T_1 = 363{,}03$; für alle $T > T_1$ hat G kein Minimum und ist > 1, das System hat den Charakter eines vollkommenen Gases. Hier sind einige einander entsprechende Werthe der Grössen V, T, P, G längs der Curve der kleinsten PV:

$V =$	1,00,	0,0195,	0,0168,	0,0128,	0,0100,	0,0065,	0,004377.
$P =$	1,3260,	58,31,	65,90,	81,12,	95,68,	116,61,	109,3.
$T =$	362,02,	313,34,	305,95,	289,64,	269,95,	230,16,	181,4.
$G =$	0,99997,	0,99248,	0,98789,	0,97824,	0,96761,	0,89905,	0,71999.

Diese Tabelle zeigt, dass längs der Curve der kleinsten PV der Druck P, von $P = 0$ für $V = \infty$ an, zuerst zunimmt, ein Maximum erreicht und dann abnimmt; die Grösse G, von $G = 1$ für $V = \infty$, nimmt ununterbrochen ab.

Zwar giebt die Zustandsgleichung 4) für gegebene Paare Werthe von P und T, wenn $T < T_c$ ist, zwei Werthe von V, einen grösseren, der



dem gasförmigen Zustande und einen kleineren, der dem tropfbarflüssigen Zustande des Systems entspricht; da aber die Zustandsgleichung 4) unter der Voraussetzung abgeleitet wurde, dass das System keine Theilchenaggregate enthält, so kann man nicht erwarten, dass der zweite jener Werthe richtig ist, und die wirkliche Dichte des Systems im tropfbarflüssigen Zustande bei den gegebenen Werthen der Parameter P und T angiebt. Da die sich bildenden Theilchenaggregate sehr wesentlichen Einfluss auf den Zustand des Systems ausüben müssen, einen Einfluss, welcher, wenn das System im gasförmigen Zustande sich befindet, nicht wirkt, so ist es nicht wahrscheinlich, dass eine und dieselbe analytische Zustandsgleichung beide Zustände des Systems bestimmen könnte.*

* Selbstverständlich kann eine solche immer künstlich dadurch erhalten werden, dass die beiden analytischen Zustandsgleichungen des gasförmigen und des tropfbarflüssigen Zustandes mit einander multiplicirt werden.

Die Gleichung 4) ist die Zustandsgleichung des gasförmigen Zustandes des betrachteten Systems; der Umstand, dass diese Gleichung im Gebiete der Temperaturen, die kleiner als T_c sind, für abnehmende Werthe von V, bei constanten T abnehmende Werthe des Druckes P liefern kann, kann nur so gedeutet werden, dass bei diesen Werthen der Parameter P, V, T der gasförmige Zustand des Systems nicht bestehen kann. Die Strecke $(A\,T_c)$ der Ordinate der wahren kritischen Temperatur ist die Projection derjenigen Linie, längs welcher der gasförmige Zustand des Systems continuirlich in den tropfbarflüssigen übergeht.

Der Zustandsgleichung 4) des betrachteten Systems können wir auch noch eine etwas andere Form geben, wenn wir statt V den Parameter $\mathfrak{D}$ oder die Dichte des Systems einführen; $\mathfrak{D}$ ist die Zahl der Theilchen des Systems in der Raumeinheit, $\mathfrak{D} = N/V$ also; somit lässt sich 4) auch so schreiben:

$$12)\qquad PN/\mathfrak{D} + a\mathfrak{D}^{\frac{n}{3}}/N^{\frac{n}{3}} = RT\,.\,e^{\nu b\mathfrak{D}/(N-b\mathfrak{D})};$$

bei der bereits oben getroffenen Wahl der Einheiten für P, V, T, ist N die Zahl der Theilchen des idealen Gases in der Raumeinheit bei $P = 1$ und $T = 273^0$, die Dichte des idealen Gases bei diesen Druck und Temperatur also; wenn diese Dichte des idealen Gases als Einheit der Dichte gewählt wird, geht 12) über in:

$$13)\qquad P/\mathfrak{D} = a\mathfrak{D}^{\frac{n}{3}} = RT\,.\,e^{\nu b\mathfrak{D}/(1-b\mathfrak{D})};$$

in dieser Gleichung haben die Constanten n, a, b, R ganz dieselben Zahlenwerthe, wie in der Gleichung 4).

Wenn wir mit Hilfe der Gleichung 13) die Dichte des Stickstoffs bei $P = 1$ und $T = 273^0$ berechnen, so erhalten wir für dieselbe den Werth 1,0007. Nehmen wir an, dass bei diesen Druck und Temperatur das Wasserstoffgas als ein vollkommenes Gas, für welches $b = 0{,}00024$ ist, betrachtet werden kann, so ist die Dichte des Wasserstoffs bei $P = 1$ und $T = 273^0$ gleich 0,998554. Ist das Verhältniss der specifischen Gewichte des Stickstoffs und des Wasserstoffs bei diesen Druck und Temperatur gleich 13,97, so ist das Moleculargewicht (oder die Theilchendichte) des Stickstoffs genau $= 14$, wenn das des Wasserstoffe $= 1$ ist, so, wie es die Hypothese von Pront verlangt.

XVIII.

Ein Satz über orthosymmetrische und verwandte Determinanten aus den fundamentalen symmetrischen Functionen.

Von

Hermann Brunn
in München.

Bei Untersuchungen über relatives Maximum und Minimum der fundamentalen ganzen rationalen symmetrischen Functionen von m Grössen α, bei der Fürstenau'schen Methode, Gleichungen aufzulösen, und bei anderen Gelegenheiten stösst man auf gewisse Determinanten dieser symmetrischen Function M_ν, zu denen vor allem die sogenannten orthosymmetrischen von der Form

$$\begin{vmatrix} M_\nu & M_{\nu-1} \dots M_{\nu-\lambda} \\ M_{\nu+1} & M_\nu \quad \dots M_{\nu-\lambda+1} \\ M_{\nu+2} & M_{\nu+1} \dots M_{\nu-\lambda+2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ M_{\nu+\lambda} & M_{\nu+\lambda-1} \dots M_\nu \end{vmatrix}$$

gehören. Im Folgenden soll ein Beweis geliefert werden dafür, dass solche Determinanten, entwickelt gedacht nach den Elementen α, sobald die vereinbaren Glieder zusammen gezogen sind, nur noch Glieder eines Vorzeichens enthalten, und zwar bei der im Folgenden gewählten Art der Anschreibung das Vorzeichen $+$.

Bei dem Gebrauch der römischen Ziffern entspreche der Zahlenreihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3 \dots l-1,\ l,\ l+1, \dots m,$$

die Zahlenreihe

$$O,\ I,\ II,\ III \dots IL,\ L,\ LI, \dots M,$$

wobei L und M ihre bestimmte Bedeutung 50 und 1000 verlieren und beliebige ganze positive Zahlen vorstellen.

Man bilde von m Elementen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_m$ jene fundamentalen symmetrischen Functionen, welche einzeln gleich sind den Summen der als Producte betrachteten Combinationen jener Elemente zu den einzelnen Classen (ohne Wiederholung) und bezeichne sie mit

$$1) \qquad \ldots M_{m+\nu} \ldots M_{m+1}\, M_m\, M_{m-1} \ldots M_3\, M_2\, M_1\, M_0\, M_{-1} \ldots,$$

wo die Indices den Grad der Functionen in den Elementen α angeben und

$$2) \qquad M_{m+\nu} = 0$$

$$3) \qquad M_0 \quad = 1 \qquad\qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

$$4) \qquad M_{-\nu} \ = 0$$

zu setzen ist. Aus diesen M bilde man das nachstehende Schema, das wir uns unbegrenzt ausgedehnt denken können:

$$(M_k) \qquad \begin{array}{cccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots M_{m+\nu} & \ldots M_{m+1} & M_m & M_{m-1} & \ldots M_3 & M_2 & M_1 & M_0 & M_{-1} \ldots \\ \ldots M_{m+\nu+1} & \ldots M_{m+2} & M_{m+1} & M_m & \ldots M_4 & M_3 & M_2 & M_1 & M_0 \ldots \\ \ldots M_{m+\nu+2} & \ldots M_{m+3} & M_{m+2} & M_{m+1} & \ldots M_5 & M_4 & M_3 & M_2 & M_1 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Es entsteht, indem man Wiederholungen der Reihe 1) beliebig oft unter einander setzt und zwar so, dass jede nach unten folgende Reihe gegen die vorhergehende um eine Stelle nach rechts verschoben wird, und also in eine beliebige „Schrägreihe“ von links oben nach rechts unten lauter M mit gleichem Index zu stehen kommen.

Indem man eine willkürliche Horizontalreihe — Zeile — und eine beliebige Verticalreihe — Colonne — mit der Ordnungszahl 0 versieht, die Ordnungszahlen nach links, resp. unten in positivem Sinne wachsen lässt, und ein jedes M statt mit dem bisherigen Index mit zwei Indices versieht, der Reihe nach gleich der Ordnungszahl der Colonne und Zeile, die sich an seiner Stelle kreuzen, gewinnt das Schema die neue Gestalt:

$$(M_{k\lambda}) \qquad \begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots M_{3,-1} & M_{2,-1} & M_{1,-1} & M_{0,-1} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots M_{3,0} & M_{2,0} & M_{1,0} & M_{0,0} & M_{-1,0} & M_{-2,0} \ldots \\ \ldots M_{3,1} & M_{2,1} & M_{1,1} & M_{0,1} & M_{-1,1} & M_{-2,1} \ldots \\ \ldots M_{3,2} & M_{2,2} & M_{1,2} & M_{0,2} & M_{-1,2} & M_{-2,2} \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Aus unseren Schematen (M_k) und $(M_{k\lambda})$ kann man nun andere bilden, indem man beliebige Zeilen und Colonnen herausgenommen, und die Lücken durch Zusammenschieben wieder geschlossen denkt. Diese Schemata fassen wir unter der neuen Bezeichnung zusammen:

$$(M_{i_k s_\lambda}) \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots M_{i_1 s_{-1}} & M_{i_0 s_{-1}} \ldots & \ldots \\ \ldots M_{i_1 s_0} & M_{i_0 s_0} & M_{i_{-1} s_0} \ldots \\ \ldots M_{i_1 s_1} & M_{i_0 s_1} & M_{i_{-1} s_1} \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Der einzige Unterschied gegen das Schema $(M_{k\lambda})$ ist der, dass die Indices jetzt von einer Reihe zu einer benachbarten nicht um die Einheit, sondern um eine beliebige ganze Zahl wachsen oder abnehmen. Die Richtungen des Wachsthums der Indices sind die nämlichen wie vorher: Von rechts nach links und von oben nach unten, in Zeichen:

$$i_{\nu+\delta} > i_\nu \qquad s_{\nu+\delta} > s_\nu \qquad (\delta \text{ pos. ganze Zahl}).$$

$(M_{k\lambda})$ ist ein specieller Fall von $(M_{i_k s_\lambda})$.

Da M eine beliebige ganze Zahl mit Einschluss der Null ist, so ist klar, was im Folgenden unter einem Schema

$$(II_k),\ (II_{k\lambda}) \text{ oder } (II_{i_k s_\lambda}),$$
$$(L_k),\ (L_{k\lambda}) \text{ oder } (L_{i_k s_\lambda}) \text{ etc.}$$

zu verstehen ist.

Besonders bemerkenswerth ist das Schema (O_k). Da nämlich, wie sich zeigen wird, 2), 3) und 4) auch für $M=0$ Geltung behalten müssen, so ist das Schema (O_k) aus lauter Nullen zusammen gesetzt, mit Ausnahme einer aus Einheiten gebildeten Schrägreihe:

$$(O_k) \qquad \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ \ldots 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Aus den Schematen (M_k), $(M_{k\lambda})$, $(M_{i_k s_\lambda})$ können nun irgendwelche quadratisch begrenzte Schemata herausgeschnitten und als Determinanten

$$\Delta(M_k), \quad \Delta(M_{k\lambda}), \quad \Delta(M_{i_k s_\lambda})$$

betrachtet werden.

Wenn von einem „identischen" Verschwinden dieser Determinanten die Rede ist, so ist noch näher anzugeben, ob sie identisch Null werden, betrachtet als Functionen der M, oder betrachtet als Functionen der α.

Es gilt für unsere M die Relation

$$(S) \qquad M_\nu = IM_\nu + IM_{\nu-1}.\alpha,$$

wo α ein beliebiges von den Elementen α_i ist, aus denen sich M zusammensetzt, und IM_ν, $IM_{\nu-1}$ aus den $m-1$ übrigen Elementen α_i gebildet werden. Die Forderung, dass (S) bis zu den von uns gewünschten Grenzen richtig bleibe, erheischt, dass wir 2), 3) und 4) auch noch für $M=0$ giltig sein lassen.

Denken wir uns in einer Determinante $\Delta(M_{i_k s_\lambda})$ die Substitution (S) ausgeführt, die Determinante dann durch wiederholte Anwendung des Satzes

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1\lambda} + a'_{1\lambda} \ldots a_{1\mu} \\ a_{21} \;.\; \ldots a_{2\lambda} + a'_{2\lambda} \ldots a_{2\mu} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{\mu 1} \;.\; \ldots a_{\mu\lambda} + a'_{\mu\lambda} \ldots a_{\mu\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1\lambda} \ldots a_{1\mu} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2\lambda} \ldots a_{2\mu} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{\mu 1}\, a_{\mu 2} \ldots a_{\mu\lambda} \ldots a_{\mu\mu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a'_{1\lambda} \ldots a_{1\mu} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a'_{2\lambda} \ldots a_{2\mu} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{\mu 1} a_{\mu 2} \ldots a'_{\mu\lambda} \ldots a_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

zerlegt und das Resultat dieser Zerlegung (Z) nach Potenzen des bei (S) dienenden α geordnet, so erhalten wir ein additives Aggregat von Gliedern $A_\nu \alpha^\nu$, wo die A_ν Summen von Determinanten der Form $\Delta(IM_{i_k s_\lambda})$ sind. Bevor wir dies beweisen, sei als Beispiel hergesetzt die Zerlegung (Z) einer orthosymmetrischen Determinante ($\lambda + 1^{\text{ter}}$) Ordnung $\Delta(M_k)$:

$$\begin{vmatrix} M_k \quad M_{k-1} \ldots M_{k-\lambda} \\ M_{k+1}\, M_k \quad \ldots M_{k-\lambda+1} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ M_{k+\lambda}\, M_{k+\lambda-1} \ldots M_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} IM_k + IM_{k-1}.\alpha,\; IM_{k-1} + IM_{k-2}.\alpha \ldots IM_{k-\lambda} + IM_{k-\lambda-1}.\alpha \\ IM_{k+1} + IM_k.\alpha, \;.\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; .\, IM_{k-\lambda+1} + IM_{k-\lambda}.\alpha \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ IM_{k+\lambda} + IM_{k+\lambda-1}\alpha, \;.\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; .\, IM_k + IM_{k-1}.\alpha \end{vmatrix}$$

$$= A_{\lambda+1}\alpha^{\lambda+1} + A_\lambda \alpha^\lambda + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1} + \ldots A_2\alpha^2 + A_1\alpha + A_0.$$

Hier fällt die Reihe der Coefficienten

$$A_{\lambda+1},\; A_\lambda,\; A_{\lambda-1}, \ldots A_2,\; A_1,\; A_0$$

zusammen mit der Reihe der Determinanten, welche aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} IM_k\, IM_{k-1} \ldots IM_{k-\lambda}\, IM_{k-\lambda-1} \\ IM_{k+1}\, IM_k \ldots IM_{k-\lambda+1}\, IM_{k-\lambda} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ IM_{k+\lambda}\, IM_{k+\lambda-1} \ldots IM_k\, IM_{k-1} \end{Vmatrix}$$

durch Weglassung der ersten, zweiten ... $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Colonne gewonnen werden. Alle übrigen Determinanten, die bei rein formeller Entwickelung von $\Delta(IM_k + IM_{k-1}\alpha)$ noch als Summanden in den A auftreten, annulliren sich durch Gleichwerden zweier Colonnen.

Betrachten wir nun die Zerlegung (Z) einer beliebigen Determinante $\Delta(M_{i_k s_\lambda})$ und zeigen wir, dass sämmtliche dabei auftretenden Determinanten dem Schema $(IM_{i_k s_\lambda})$ entnommen sind. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur zu erweisen, dass das Wachsthum der Indices auch in den Zerlegungsdeterminanten ausnahmslos von rechts nach links und von oben nach unten stattfindet.

$\varDelta(M_{i_k s_\lambda})$ sei ν^{ten} Grades; nachdem die Substitution (S) ausgeführt ist, zeigen sich uns 2ν verschiedene Colonnen von Coefficienten, je zwei einer vorherigen entsprechend. Der Unterschied in Bezug auf das Wachsthum der Coefficienten gegen vorher beruht nur darin, dass jetzt zwei neben einander stehende Colonnen auch ein Constantbleiben des ersten Index aufweisen können. Solche Colonnen erkennt man sofort als identisch, da die horizontal neben einander stehenden Glieder gleichen zweiten Index haben. Die Zerlegung (Z) liefert daher lauter Determinanten, bei denen das Wachsthum der ersten Indices durchweg von rechts nach links geht, und ein Constantbleiben dieser Indices bei Fortgehen in dieser Richtung ebenfalls ausgeschlossen ist, nachdem wir die wegen Gleichheit zweier Colonnen sich annullirenden Determinanten auch in der Darstellung vernichtet haben. An der Aufeinanderfolge der zweiten Indices ist durch die Substitution (S) überhaupt nichts geändert worden. So sind wir sicher, durch die Zerlegung (Z) lauter Determinanten der Form $\varDelta(IM_{i_k s_\lambda})$ erhalten zu haben.

Nachdem wir auf $\varDelta(M_{i_k s_\lambda})$ die Substitution (S) und die Zerlegung (Z) angewandt und dadurch ein Resultat, das mit $(SZ)\ \varDelta(M_{i_k s_\lambda})$ bezeichnet werden möge, erhalten haben, können wir auf sämmtliche Determinanten dieses Resultats abermals die Substitution (S) und Zerlegung (Z) anwenden, und das Resultat durch $(SZ)^2\varDelta(M_{i_k s_\lambda})$ bezeichnen. In analoger Weise fortfahrend, erhalten wir schliesslich $(SZ)^{m-1}\varDelta(M_{i_k s_\lambda})$ und zuletzt $(SZ)^m\varDelta(M_{i_k s_\lambda})$, womit wir die Reihe der Operationen schliessen. In dem letzten Ausdruck kommen nämlich nur noch Determinanten des Schemas $(O_{i_k s_\lambda})$ vor, d. h. solche, deren Elemente constant sind, gleich Null oder Eins. Abgesehen von dem erst zu erweisenden Werthe dieser letzteren Determinanten, ist jedenfalls Alles in unserem Ausdrucke additiv.

Lässt man aus dem Schema (O_k) eine Colonne weg, so besteht eine Zeile aus lauter Nullen; lässt man eine Zeile weg, so gilt das nämliche für eine Colonne; lässt man eine Zeile und eine Colonne weg, an deren Kreuzungspunkt 1 steht, so bleibt das unbegrenzte Schema unverändert. Hieraus folgt:

Schneidet man aus dem Schema $(O_{i_k s_\lambda})$ eine Determinante aus, und zwar so, dass sie eine Partie des Schemas enthält, die gegen das Schema O_k verändert ist, so ist sie unbedingt Null, weil sie entweder in einer Zeile oder in einer Colonne lauter Nullen enthält. Jene Determinanten, die an unveränderten, mit (O_k) übereinstimmenden Partieen ausgeschnitten werden, sind dagegen vom Werthe Null oder Eins, je nachdem ihre erste Diagonalreihe aus Nullen oder aus Einheiten besteht.

Ist es möglich, dass sämmtliche Coefficienten $\varDelta(O_{i_k s_\lambda})$ der Entwickelung $(SZ)^m\varDelta(M_{i_k s_\lambda})$ Null werden? Angenommen, es wäre der Fall, so würde dies Verschwinden offenbar ganz unabhängig von der Wahl der Werthe α eintreten. Somit hätten wir eine in den α identische Gleichung

$$\varDelta(M_{i_k s_\lambda}) = 0.$$

Nun ist es aber eine fundamentale Wahrheit aus der Theorie der Gleichungen, dass zwischen den symmetrischen Functionen M_k von m Elementen keine identische Relation der obigen Art bestehen kann, wenn nicht von vornherein in derselben alle Entwickelungsglieder verschwinden. Es kann also die letzte Gleichung nur bestehen, wenn sämmtliche Entwickelungsproducte $\Pi(M_{i_k s_\lambda})$ links durch Verschwinden eines ihrer Factoren $M_{i_k s_\lambda}$ Null werden, mit andern Worten: wenn die Determinante so viele Nullen enthält, dass von vornherein ihr Verschwinden ersichtlich ist.

Wir haben jetzt den Satz bewiesen:

Wenn man eine Determinante $\Delta(M_{i_k s_\lambda})$ nach den α entwickelt, und die zusammenziehbaren Entwickelungsglieder — es sind Producte der α gemeint — immer in ein Glied vereinigt, ergiebt sich ein vollständig additives Aggregat. Gleich Null kann der Werth desselben nur dann sein, wenn die Determinante wegen Nullwerdens einer genügenden Anzahl von Termen $M_{i_k s_\lambda}$ verschwindet.

Daraus folgt, vorausgesetzt, dass nicht dieser specielle Fall des Nullwerdens eintritt:

Der Werth der Determinanten $\Delta(M_{i_k s_\lambda})$ ist jedenfalls positiv, wenn die Elemente α sämmtlich positiv sind.

Häufiger als die Functionen M bieten sich in unseren Determinanten die Coefficienten a einer Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

dar. Setzt man die Elemente α gleich den Wurzeln der Gleichung, so gehen die Determinanten $\Delta(M_k)$ und $\Delta(M_{k\lambda})$ in entsprechende Determinanten $\Delta(a)$ über, indem man in einer Zeile um die andere, in einer Colonne um die andere die Glieder mit -1 multiplicirt. Dabei müssen die Glieder M_k mit geradem k positives Vorzeichen behalten. Es ist weiter leicht ersichtlich, dass jede Determinante $\Delta(M_{i_k s_\lambda})$ durch eine hinlängliche Anzahl von passend ausgeführten Multiplicationen mit -1 in die entsprechende Determinante $\Delta(a)$ übergeht, und umgekehrt.

Die Werthe von Determinanten $\Delta(M_{i_k s_\lambda})$ und entsprechenden $\Delta(a)$ unterscheiden sich daher höchstens im Vorzeichen; um darüber zu unterscheiden, vergleicht man am einfachsten das Vorzeichen der beiden aus den Hauptdiagonalen entstehenden Entwickelungsglieder.

Die orthosymmetrischen Determinanten $\Delta(a)$ speciell sind stets vom nämlichen Vorzeichen wie die entsprechenden Determinanten $\Delta(M)$.

Es sei noch erwähnt, dass man in ähnlicher Weise die Homogenität der Δ in den α nachweist. Man multiplicire in dem Schema (M_k) irgend eine Zeile mit x, die erste darunter stehende mit x^2, die folgende mit x^3 etc.; die erste darüber stehende dagegen mit $x^0=1$, die zweite mit x^{-1}, die dritte mit x^{-2} etc.; dann lasse man jene Colonne, in der unverändertes M_0 steht, unverändert und multiplicire die Colonnen nach rechts wieder mit fallenden, nach links mit steigenden Potenzen von x, sodass schliesslich

zu jedem Gliede M_k des ursprünglichen Schemas die Potenz x^k tritt. Dann ist wieder leicht ersichtlich, dass jede der aus dem veränderten Schema $(M_{i_k s_\lambda})$ herausgehobenen Determinanten aus der entsprechenden des unveränderten Schemas entsteht durch Multiplication mit einer passenden Potenz von x, dass also in der Entwickelung der veränderten Determinanten bei jedem Entwickelungsproduct die nämliche Potenz von x vortritt, somit die Indicessumme der M in jedem Entwickelungsgliede gleich und die Homogenität der Determinante in den α vorhanden ist.

XIX.

Symbolische Zahlen und Doppelzahlen.*

Von

M. Philippoff,

Stud. Math. in Heidelberg.

Wenn man, analog den in der Theorie der algebraischen Formen üblichen symbolischen Bezeichnungen eine jede (homogene) Form mit zwei Variabeln durch ihre Coefficienten darstellt, z. B. statt $ax^2 + 2bxy + cy^2$ einfach $_{(x)}(a\ 2b\ c)_{(y)}$ schreibt, so liegt es nahe, diese Schreibweise auch bei der Ausführung aller algebraischen resp. analytischen Grundoperationen beizubehalten, was in sehr einfacher Weise, namentlich durch die Einführung der Nullcoefficienten statt fehlender Posten, zu sehr abkürzenden, übersichtlichen und zwar so symmetrischen Formeln führt, dass dieselben fast als mnemonische Regeln gelten können.

Bei dieser Bezeichnung entfällt nämlich vollkommen die sogenannte Reduction, welche bei allen algebraischen Multiplicationen und Divisionen die Hauptschwierigkeit bildet. Selbst in pädagogischer Hinsicht kann eine solche Methode für die Elementar-Algebra empfohlen werden, da sie nichts anderes als eine logische Erweiterung des sogenannten arabischen Zahlensystems ist.

Um ein Beispiel zu geben, nehmen wir zuerst die bekannte Transformation der binomischen Gleichungen mittelst der Substitution $z + \frac{1}{z} = x$. Da hier $z^0 + \frac{1}{z^0} = 2$ und $z^1 + \frac{1}{z^1} = x =$ symbolisch $(1\ 0)$ [Basis des Zahlensystems, oder anders gesprochen $= 1.x + 0$], so erhalten wir den Algorithmus $P_0 = 2$, $P_1 = (1\ 0)$ und, wie leicht einzusehen, $P_{m+1} = z^m + \frac{1}{z^m} =$ symbolisch $(P_m\ \overline{P}_{m-1})$, wo $\overline{P}_{m-1}$ statt $-P_{m-1}$ steht.

---

* Einige Entwickelungen und Anwendungen auf die elementare Algebra sind von mir noch im Jahre 1887 in dem Journ. des Mathém. (Edition Delagrave) gegeben worden.

Um z. B. P_5 zu berechnen, verfahre man wie folgt:

$$\begin{array}{l} 1\,0\,(0) \\ \quad \bar{2} \\ \hline 1\,0\,\bar{2}\,(0) \\ \quad \bar{1}\,0 \\ \hline 1\,0\,\bar{3}\,0\,(0) \\ \quad \bar{1}\,0\,2 \\ \hline 1\,0\,\bar{4}\,0\,2\,(0) \\ \quad \bar{1}\,0\,3\,0 \\ \hline \end{array}$$

Das heisst: Man füge eine Null rechts und addire die negativ genommene vorhergehende Zahl P.

$$z^5 + \frac{1}{z^5} = 1\,0\,\bar{5}\,0\,5\,0 = x^5 - 5x^3 + x.$$

Man kann so augenblicklich die Gleichung $z^5 - 1 = 0$ auflösen, da nämlich hier

$$\begin{array}{rr} P_2 = & 1\,0\,\bar{2} \\ P_1 = & 1\,0 \\ 1 = & 1 \\ \hline & 1\,1\,\bar{1}, \end{array}$$

d. h. statt der binomischen Gleichung genügt es, die quadratische Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ aufzulösen.

Man sieht, wie schnell die symbolische Schreibweise zum Ziele führt.

Um aber eine viel wichtigere Erweiterung dieser Methode zu erhalten, betrachten wir zwei quadratische Symbole $a_0 a_1 a_2 (x)$ und $b_0 b_1 b_2 (y)$ nach x resp. nach y steigend. Man kann das Product dieser Symbole als einen Coordinatenausdruck darstellen

$$\begin{array}{c|l} & a_0\, a_1\, a_2 \quad (x) \\ \hline b_0 & \\ b_1 & \\ b_2 & \\ (y) & \end{array}$$

oder ausführlich geschrieben:

$$1) \qquad \begin{array}{c|lll} & & & \quad (x) \\ \hline & a_0 b_0 & a_1 b_0 & a_2 b_0 \\ & a_0 b_1 & a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ & a_0 b_2 & a_1 b_2 & a_2 b_2 \\ (y) & & & \end{array} \qquad \swarrow\!\nearrow \;\; \searrow$$

und jede weitere Reduction etwa nach x Potenzen ist hier überflüssig, da ohne Weiteres klar ist, dass jede horizontale Reihe nach x von links nach rechts, jede verticale Colonne nach y von oben nach unten steigt; dass die Hauptdiagonale $\searrow$ als Resultante des $x =$ und $y \parallel$ Steigens nach xy steigt und endlich, dass jede zu der Hauptdiagonale normale $\swarrow\!\nearrow$ schiefe Reihe eine (homogene) Form der beiden Variabeln bildet. Es genügt also die Doppelzahl 1) auf verschiedene Weisen zu lesen, um jede gewünschte Reduction, z. B. nach x Potenzen sofort zu erhalten.

Setzt man speciell $y = x$ und multiplicirt man nicht nur quadratische, sondern beliebige einfache Symbole, so erhält man das allgemeinste Multiplicationsgesetz der ganzen Functionen.

Als Beispiel diene $(a + bx + cx^2 + \dots)^2$. Da hier die homogenen schiefen Reihen in Bezug auf die Hauptdiagonale offenbar symmetrisch sind, erhält man die trianguläre Doppelzahl:

$$\begin{matrix} a^2 & & & \\ 2ab & b^2 & & \\ 2ac & 2bc & c^2 & \\ 2ad & 2bd & 2cd & d^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \quad \nearrow\!\!\swarrow$$

welche unmittelbar die Reduction nach x Potenzen giebt — man möge nur nach den erwähnten schiefen Reihen lesen.

Ganz ebenso werden auch die irrationellen Symbole von der Form $ABC\dots^{\frac{1}{m}}(x)$ d. h. $A + Bx^{\frac{1}{m}} + Cx^{\frac{2}{m}} + \dots$ behandelt, nur muss man den gemeinsamen Nenner der Exponenten suchen und eine gehörige Anzahl von Nullen einschalten. Um z. B.

$$1 + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x^2} + 5\sqrt{x^3} \text{ mit } 7 + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2}$$

zu multipliciren, verwandle man das Product

$$(1\,0\,0\;2\,0\,0\;3\,0\,0\,5)\;(7\,0\,1\,0\,2)_{(x)}^{\frac{1}{6}}$$

in eine rectanguläre Doppelzahl, was sofort das Resultat

$$7 \quad 0 \quad 1 \quad 14 \quad 2 \quad 2 \quad 21 \quad 4 \quad 3 \quad 35 \quad 6 \quad 5 \quad 0 \quad 10$$

d. h. $7 + \sqrt[6]{x^2} + \text{etc.} \dots + 10\sqrt[6]{x^{13}}$ geben würde.

Mittelst analoger Schreibweise kann man die Taylor'sche Reihe als eine Erweiterung der Lagrange'schen Bezeichnung darstellen. Schreibt man nämlich (n) statt $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ und ordnet man nach h Potenzen, so giebt die Taylor'sche Substitution:

$$\Big|_x^{x+h} f(x) = f(x)^{(0)\,(1)\dots(n)\dots},$$

wo $(0)\;(1)\dots(n)$ eine symbolische Reihe oder einen Operations-Symbol darstellt.

Da aber für zwei Variabeln, z. B. h und k (resp. x und y), die Beziehung gilt $\frac{\partial^m}{\partial h^m}\left\{\frac{\partial^n}{\partial k^n}\right\} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial h^m\,\partial k^m}$, so folgt ohne Weiteres, dass die Substitution

$$\Big|_x^{x+h}\;\Big|_y^{y+k} f(x,\,y)$$

der symbolischen Multiplication

$$\begin{array}{c|cccc} & (0) & (1) & (2)\ldots & (m)\ldots \\ \hline (0) & & & & \\ (1) & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ (n) & & & & \end{array}$$

gleichkommt, wo

$$(m)(n) = (mn) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial h^m \partial k^n} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \left(\text{resp.} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!}\right).$$

Es gilt also der Satz:

$$\overset{x+h}{\underset{x}{|}}\ \overset{y+k}{\underset{y}{|}} f(x, y) = f(x, y) \begin{pmatrix} 00 & 10 & 20\ldots \\ 01 & 11 & 21\ldots \\ 02 & 12 & 22\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{pmatrix}$$

und das dürfte wohl der einfachste Beweis der bekannten Taylor'schen Entwickelung für zwei Variabelen sein.

Es sei speciell die Doppelzahl

$$\begin{array}{c|ccc} & & & (x) \\ \hline & 00 & 10 & 20\ldots \\ & 01 & 11 & 21\ldots \\ & 02 & 22 & 22\ldots \\ & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (y) & & & \end{array}$$

wo mn den Coefficienten von $x^m y^n$ bezeichnet,

gegeben, dann lautet der Taylor'sche Satz, nach der obigen Schreibweise dargestellt:

„Das Resultat der Substitution $\overset{x+h}{\underset{x}{|}}\ \overset{y+k}{\underset{y}{|}}$ in die Doppelzahl wird durch die Anwendung eines Operations-Symbols erhalten, der formell ganz ähnlich der Doppelzahl selbst aussieht."

Wünscht man z.B. den Anfang der Coordinaten für die cubische Doppelzahl

$$F = \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & (x) \\ \hline & a & b & c & d \\ & e & f & g & \\ & h & i & & \\ & j & & & \\ (y) & & & & \end{array}$$

zu verlegen, so dass $x+h$ und $y+k$ statt x und y substituirt werden,

so genügt es, den Symbol

$$\begin{array}{cccc} 00 & 10 & 20 & 30 \\ 01 & 11 & 21 & \\ 02 & 12 & & \\ 03 & & & \end{array}$$

anzuwenden und man berechnet sehr leicht das Resultat, indem man z. B.

$$\begin{array}{c|l} & (10) \\ \hline & \begin{array}{llll} a & b & c & d \\ e & f & g & \\ h & i & & \\ j & & & \end{array} = \left| \begin{array}{lll} \overline{b} & 2c & 3d \\ f & 2g & \\ i & & \end{array} \right. \end{array}$$

hat, so dass die ganze Operation durch einfache Multiplicationen der Reihen und Colonnen mit 0, 1, 2, 3... und durch einfache Divisionen entsteht, und man kann fast ohne Rechnung schreiben

$$\begin{array}{c|llll} & & & & (x) \\ \hline & \left|\begin{array}{llll} \overline{a} & b & c & d \\ e & f & g & \\ h & i & & \\ j & & & \end{array}\right. & \left|\begin{array}{lll} \overline{b} & 2c & 3d \\ f & 2g & \\ i & & \end{array}\right. & \left|\begin{array}{ll} \overline{c} & 3d \\ g & \end{array}\right. & \left|\overline{d}\right. \\ & \left|\begin{array}{lll} \overline{e} & f & g \\ 2h & 2i & \\ 3j & & \end{array}\right. & \left|\begin{array}{ll} \overline{f} & 2g \\ 2i & \end{array}\right. & \left|\overline{g}\right. & \\ & \left|\begin{array}{ll} \overline{h} & i \\ 3j & \end{array}\right. & \left|\overline{i}\right. & & \\ & \left|\overline{j}\right. & & & \\ (y) & & & & \end{array}$$

wo die Coefficienten wieder Doppelzahlen mit h und k als Coordinaten sind und wo man die Rollen von (x, y) mit denjenigen von (h, k) umtauschen kann. Man kann also gewissermassen von einer „Positions-Algebra“ sprechen.

Ein interessantes Erläuterungs-Beispiel bieten auch die Bernouillischen Zahlen und die Bernouilli'schen Functionen. Der Kürze wegen werden wir $A_2 = +\frac{B_1}{2!}$, $A_4 = -\frac{B_3}{4!}$ u. s. w. „reducirte Bernouilli'sche Zahlen“ nennen.

Die Definitionsgleichung (s. z. B. Schlömilch's Compendium Bd. II, 212) $\frac{v}{e^v - 1} = 1 - \frac{1}{2}v + \frac{B_1}{2!}v^2 - \ldots$ etc., wenn man für $\frac{1}{m!}$ einfach (m) schreibt, giebt, symbolisch geschrieben (steigende $v =$ Symbole)

$$\frac{0\ (1)}{0\ (1)\ (2)\ (3)\ldots} = \frac{1}{(1)\ (2)\ (3)\ldots} = (A_0\, A_1 \ldots)_{(v)}.$$

Also giebt das für convergirende Reihen giltige Multiplicationsgesetz der Symbolzahlen:

$$2)\qquad 1 = \begin{array}{|llll} \hline A_0 1 & A_0 2 & A_0 3 \ldots \\ A_1 1 & A_1 2 & A_1 3 \ldots \\ A_2 1 & A_2 2 & A_2 3 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \nearrow\!\!\!\swarrow \qquad \text{wo } A_1 2 \text{ für } A_1(2) = \frac{A_1}{2!} \text{ u. s. w. steht.}$$

Nun bemerken wir, dass ein System von n linearen Gleichungen am zweckmässigsten in folgender Weise:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 \ldots & x_n & 1 \\ \hline a_1 & a_2 & a_n & k_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1 & m_2 & m_n & k_n \end{array}$$

dargestellt werden kann.

Jetzt lese man die Gleichungen 2) nach schiefen Reihen $\swarrow\!\!\!\nearrow$ und bemerke, dass $A_0 = 1$, dann erhält man das Gleichungs-System

$$\begin{array}{ccccc|c} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|cccc} 1 & A_1 & A_2 & A_3 & \ldots \\ \hline \bar{2} & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \bar{3} & 2 & 1 & 0 & \ldots \\ \bar{4} & 3 & 2 & 1 & \ldots \\ \bar{5} & 4 & 3 & 2 & \ldots \end{array}$$

wo n statt $\frac{1}{n!}$ steht und $\bar{n} = -\frac{1}{n!}$ bezeichnet. Um jetzt A_{2n} independent zu berechnen, bemerke man, dass A_{2n-1} bei $n > 1$ gleich Null ist (was man leicht beweisen kann, da in dem Zähler, der eine Determinantenform hat, zwei gleiche Colonnen oder Reihen hervortreten), und, da die Nennerdeterminante

$$\begin{vmatrix} 1\,0\,0 \ldots \\ 2\,1\,0 \ldots \\ 3\,2\,1 \ldots \\ \ldots \ldots \end{vmatrix} = 1$$

erhält man z. B. für A_4 den abkürzend geschriebenen Ausdruck:

$$\begin{vmatrix} 1\,0\,0\,\bar{2} \\ 2\,1\,0\,\bar{3} \\ 3\,2\,1\,\bar{4} \\ 4\,3\,2\,\bar{5} \end{vmatrix}. \quad \text{Da aber } A_3 = \begin{vmatrix} 1\,0\,\bar{2} \\ 2\,1\,\bar{3} \\ 3\,2\,\bar{4} \end{vmatrix} = 0,$$

so ist auch die Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} 2\,1\,0 \\ 3\,2\,1 \\ 4\,3\,2 \end{vmatrix} \text{ Null, also ist } A_4 = \begin{vmatrix} 1\,0\,\bar{3} \\ 2\,1\,\bar{4} \\ 3\,2\,\bar{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{5!} + \text{etc.} = +\frac{1}{80} - \frac{1}{72} = -\frac{1}{720}$$

und allgemein

$$A_{2n} = \begin{vmatrix} 1\,0\,0 \ldots & 0 & \overline{3} \\ 2\,1\,0 \ldots & 0 & \overline{4} \\ 3\,2\,1 \ldots & 0 & \overline{5} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ 2n-2 & 1 & \overline{2n} \\ 2n-1 & 2 & \overline{2n+1} \end{vmatrix}, \text{ wo } \begin{cases} \overline{2n-2} = \dfrac{1}{(2n-2)!} \\ \overline{2n} \quad = \dfrac{-1}{2n!} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Mittelst analoger Betrachtungen findet man für die Bernouilli'sche Function $\varphi(z, m)$ oder vielmehr für die reducirte Form $\Phi(z, m) = \frac{\varphi(z, m)}{m!}$ das Gleichungs-System:

1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
$z1$	1	0	0	0
$z^2 2$	2	1	0	0
$z^3 3$	3	2	1	0
...	.	.	.	. . .

$$\left(n = \frac{1}{n!}\right)$$

Vergleicht man aber mit dem A-Systeme, so giebt das sofort

$$A_{(k)} = \Big|_{\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}}^{-\frac{1}{k!}} \Phi(z, k),$$

wo aber, da k eine Substitutionsvariable ist, man nicht etwa Φ in Factoren zerlegen kann.

Speciell hat man z. B.:

$$A_{(k)} = \Big|_{\frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}}^{-\frac{1}{k!}} \Phi\left(\frac{1}{2}, k\right).$$

Um die allgemeine Substitutionsformel zu prüfen, nehme man z. B. $\Phi_4 = \frac{z^4 - 2z^3 + z^2}{4!}$ und substituire $\Big|_{\frac{z^4}{4!}}^{-\frac{1}{5!}}$, dann $\Big|_{\frac{z^3}{3!}}^{-\frac{1}{4!}}$ u. s. w., was $\frac{-6 + 15 - 10}{720} = -\frac{1}{720} = A_4$ geben würde.

Es sei zum Schlusse bemerkt, dass die meisten Eliminationsmethoden, insbesondere die von Sylvester, Euler und Cayley, aus der angegebenen Schreibweise für das System der Gleichungen und aus der Multiplication mittelst Doppelzahlen sich unmittelbar ergeben, was keiner besonderen Erläuterung bedarf.

XX.

Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methoden von Grassmann.*

Von

R. Mehmke
in Darmstadt.

I. Ueber die Projection einer Raumcurve von einem ihrer Punkte aus.

In Böklen's Mathematisch-naturwissenschaftlichen Mittheilungen, Heft III, S. 82, 1886, hat mein Freund W. Franz Meyer bewiesen, dass, wenn man eine Raumcurve C von einem ihrer Punkte p aus auf eine Ebene E projicirt, die beim nothwendigen Zerfallen der Projectionscurve sich absondernde Gerade keine bestimmte, sondern eine, durch die Spur der in p an C gelegten Tangente T mit der Projectionsebene gehende, im Uebrigen aber noch willkürliche Gerade ist.**

Es soll ein neuer Beweis für diesen Satz gegeben werden. Ein veränderlicher Punkt x der Curve lässt sich in der Form

$$x = p + t^\lambda . p_\lambda + t^\mu . p_\mu + \ldots, \qquad (\lambda < \mu < \ldots),$$

darstellen, wo t eine veränderliche Zahlgrösse bedeutet. Der Punkt p_λ liegt auf der Tangente T; man hat $\lambda = 1$, falls p ein gewöhnlicher oder wenigstens kein stationärer Punkt von C ist.***

Wenn δ eine sehr kleine Zahlgrösse und a einen willkürlichen Punkt bezeichnet, so stellt

$$c = p + \delta . a$$

einen in sehr grosser Nähe von p (und zwar auf $[pa]$) liegenden Punkt vor. Diesen Punkt nehme man zum Projectionscentrum. Die Projection von x auf E heisse $\bar{x}$, dann wird

---

* Vergl. H. Grassmann, Ausdehnungslehre, Berlin 1862, namentlich Abschnitt I, Cap. 5. Ferner: Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, Torino 1888; E. W. Hyde, the Directional Calculus, based upon the methods of Hermann Grassmann, Boston (U. S. A.), 1890; Peano, Die Grundzüge des geometrischen Calculs, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1891.

** Vergl. auch Hauck, „Ueber den Begriff der Projection einer geraden Linie", diese Zeitschr., Jahrg. 36, S. 379, 1891.

*** Vergl. Henry Fine, On the singularities of curves of double curvature, American Journal of Mathematics, t. 8, numb. 2. p. 156, 1886.

$$\bar{x} = [cxE] = [(p + \delta . a) xE] = [pxE] + \delta . [axE],$$

oder, wenn man für x den der ersten Gleichung entnommenen Werth einsetzt und die Abkürzungen

$$[pp_\lambda E] = p'_\lambda, \quad [pp_\mu E] = p'_\mu, \ldots,$$
$$[apE] = q, \quad [ap_\lambda E] = q_\lambda, \quad [ap_\mu E] = q_\mu, \ldots,$$

gebraucht:

$$\bar{x} = t^\lambda . p'_\lambda + t^\mu . p'_\mu + \ldots + \delta . (q + t^\lambda . q_\lambda + t^\mu . q_\mu + \ldots).$$

Man mache nun

$$t = k\varepsilon, \quad \delta = \varepsilon^\lambda,$$

wo ε eine sehr kleine Zahlgrösse, k eine willkürliche, aber endliche Zahlgrösse bedeuten soll. Dann kommt:

$$\bar{x} = \varepsilon^\lambda (k^\lambda . p'_\lambda + q) + \varepsilon^\mu (k^\mu . p'_\mu + \ldots) + \varepsilon^{2\lambda} (k^\lambda . q_\lambda + \varepsilon^{\mu - \lambda} k^\mu . q_\mu + \ldots).$$

Man sieht, es lässt sich ε so klein, d. h. das Projections-Centrum in solcher Nähe von p annehmen, dass $\bar{x}$ dem Punkte $(k^\lambda . p'_\lambda + q)$ so nahe kommt, wie man will. Weil k veränderlich ist, so stellt $(k^\lambda . p'_\lambda + q)$ die (λ-fach zu denkende) gerade Linie $[p'_\lambda q]$ vor, welche daher nach dem Zusammenfallen des Projections-Centrums mit p zur Projection der Raumcurve C auf E gehören wird. Von den beiden Punkten p'_λ und q dieser Geraden fällt der erste (wegen $p'_\lambda = [pp_\lambda E]$) in die Projection des Punktes p_λ von p auf E, oder weil p_λ, wie oben bemerkt, auf der in p an C gelegten Tangente sich befindet, in die Spur dieser Tangente mit der Projectionsebene; der zweite ist, ebenso wie der Punkt a, dessen Projection er bildet, unbestimmt. Man kann die sich absondernde Gerade offenbar als die Spur der Ebene $[pp_\lambda a]$, und diese als die Verbindungsebene der Tangente $T = [pp_\lambda]$ mit der unbestimmten Geraden $[ap]$ betrachten, welch' letztere den Weg bezeichnet, auf dem das ursprünglich nicht in der Curve liegende Projections-Centrum c dem Punkte p sich nähert.

II. Verallgemeinerung: Transformation einer durch einen „Fundamentalpunkt“ gehenden Curve.

Die Projection $\bar{x}$ eines Punktes x von dem Centrum c auf die Ebene E wird durch die Gleichung

$$\bar{x} = [cxE]$$

geliefert. Setzt man in derselben $x = c$, so kommt

$$\bar{x} = [ccE] = 0.$$

Dem Centrum einer Projection vergleichbar ist daher bei einer durch

$$\bar{x} = f(x)$$

gegebenen beliebigen Punkt-Transformation jeder Punkt c, welcher die Bedingung

$$f(c) = 0$$

erfüllt. Einen solchen Punkt wollen wir einen Fundamentalpunkt der betreffenden Transformation nennen. Verschwinden auch noch die $(n-1)$ ersten, aber keine höheren Ableitungen von $f(x)$ nach x identisch für $x = c$, d. h. ist

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) = 0, \ldots \; f^{(n-1)}(c) = 0,$$

dagegen $f^{(n)}(c)$ nicht Null, so möge c ein Fundamentalpunkt n^{ter} Ordnung jener Transformation heissen.

Untersuchen wir nun, in welcher Weise die Transformirte einer (ebenen oder räumlichen) Curve C zerfällt, wenn ein Punkt p derselben mit einem Fundamentalpunkt n^{ter} Ordnung der angewendeten Transformation zusammenrückt. Der Abwechslung wegen soll dieses Mal der Fundamentalpunkt als fest angesehen, die Curve dagegen verschoben werden. Angenommen, die Curve C habe, nachdem die Verschiebung zuletzt in der Richtung der (mit der Länge Eins versehen gedachten) Strecke a erfolgt war, ihre endgiltige Lage erreicht, d. h. es sei p zu einem Fundamentalpunkt n^{ter} Ordnung der Transformation $\bar{x} = f(x)$ geworden. Ein veränderlicher Punkt x der Curve, dem wir den Maasswerth oder das Gewicht Eins beilegen wollen, sei, wie unter Nummer 1, gegeben durch

$$x = p + t^{\lambda} . p_{\lambda} + t^{\mu} . p_{\mu} + \ldots$$

Denken wir uns jetzt die Curve wieder um einen sehr kleinen Betrag δ rückwärts geschoben, dann kommt x in die Lage

$$x_{\delta} = x - \delta . a$$

zurück. Dieser Punkt wird durch die Transformation übergeführt in

$$\bar{x}_{\delta} = f(x - \delta . a) = f(x) - \delta . f'(x) a.$$

Es ist aber, wegen

$$f(p) = 0, \quad f'(p) = 0, \quad f''(p) = 0, \ldots f^{(n-1)}(p) = 0:$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p + t^{\lambda} . p_{\lambda} + t^{\mu} . p_{\mu} + \ldots) \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(p)(t^{\lambda} . p_{\lambda} + \ldots)^{n} + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(p)(t^{\lambda} . p_{\lambda} + \ldots)^{n+1} + \ldots \\ &= \frac{t^{n\lambda}}{n!} . f^{(n)}(p) p_{\lambda}^{n} + \ldots; \\ f'(x) &= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(p)(t^{\lambda} . p_{\lambda} + \ldots)^{n-1} + \ldots \\ &= \frac{t^{n\lambda - \lambda}}{n-1!} . f^{(n)}(p) p_{\lambda}^{n-1} + \ldots, \end{aligned}$$

folglich

$$\bar{x}_{\delta} = \frac{t^{n\lambda}}{n!} . f^{(n)}(p) p_{\lambda}^{n} + \ldots - \delta . \left(\frac{t^{n\lambda - \lambda}}{(n-1)!} . f^{(n)}(p) p_{\lambda}^{n-1} a + \ldots \right).$$

Setzt man wieder

$$t = k.\varepsilon, \quad \delta = \varepsilon^\lambda,$$

so ergiebt sich

$$\bar{x}_\delta = \varepsilon^{n\lambda} \frac{k^{n\lambda-\lambda}}{n!} (k^\lambda . f^{(n)}(p) p_\lambda{}^n - n . f^{(n)}(p) p_\lambda{}^{n-1} a) + \dots$$

Die durch Punkte angedeuteten Glieder haben sämmtlich Potenzen von ε zu Factoren, deren Exponenten grösser als $n\lambda$ sind. Es kann daher ε so klein, oder, mit anderen Worten, die Curve in solcher Nähe ihrer Endlage angenommen werden, dass der Punkt $\bar{x}_\delta$ dem Punkte

$$(k^\lambda . f^{(n)}(p) p_\lambda{}^n - n . f^{(n)}(p) p_\lambda{}^{n-1} a)$$

so nahe kommt, wie man will. Lässt man k sich verändern, so durchläuft dieser Punkt die (wegen des Auftretens von k^λ λ-fach zu denkende) Verbindungsgerade der Punkte

$$f^{(n)}(p) p^{\lambda n} \quad \text{und} \quad f^{(n)}(p) p_\lambda{}^{n-1} a,$$

von welchen der erstere bestimmt, der letztere aber unbestimmt ist, weil er von der willkürlichen Richtung der Strecke a abhängt.

Wir haben soeben nachgewiesen, dass von der transformirten Curve eine Gerade sich abspaltet, welche durch einen bestimmten Punkt geht, ohne jedoch völlig bestimmt zu sein. Es bleibt noch die Frage zu beantworten, ob diese Gerade innerhalb eines Strahlenbündels unbestimmt, oder ob sie (wie in dem unter Nummer 1 behandelten besonderen Falle) auf eine bestimmte Ebene beschränkt ist. Letzteres trifft, wie sich zeigen wird, allein zu.

Bezeichnen wir zur Abkürzung mit L den Lückenausdruck $f^{(n)}(p)\, p_\lambda{}^{n-1}$, der nach Ausfüllung seiner einzigen Lücke durch einen Punkt wieder in einen Punkt übergeht, also eine lineare Transformation (Collineation) vorstellt, so erhalten wir für die beiden Punkte, deren Verbindungslinie die in Rede stehende Gerade ist, die Darstellungen

$$L p_\lambda \text{ und } L a.$$

Es handelt sich jetzt darum, zu beweisen, dass, wenn für a der Reihe nach drei beliebige, aber unabhängige Strecken a_1, a_2, a_3 gesetzt werden, die hervorgehenden Punkte La_1, La_2, La_3 mit dem Punkte Lp_λ in einer Ebene liegen.

Zuerst soll gezeigt werden, dass Lp verschwindet.

Wir müssen davon ausgehen, dass $f(x)$ eine homogene Function ist. Multiplicirt man nämlich den Punkt x mit irgend einer Zahlgrösse σ, wodurch er seine Lage nicht ändert, so darf natürlich auch der zugeordnete Punkt $\bar{x} = f(x)$ seine Lage nicht ändern, d. h. es muss eine Gleichung der Form

$$f(\sigma x) = \tau f(x)$$

bestehen, worin die Zahlgrösse τ von σ, aber nicht von x abhängt. Leitet man diese Gleichung nach σ ab und setzt nachher $\sigma = 1$, so kommt bei Anwendung der Abkürzung

$$v = \frac{d\tau}{d\sigma}\Bigg|_{\sigma=1}:$$

$$f'(x)x = v\,f(x),$$

und hieraus folgt durch $(n-1)$-malige Ableitung nach x:

$$f^{(n)}(x)\,x = (v-n+1)\,f^{(n-1)}(x).$$

Setzt man hierin p an Stelle von x, so ergiebt sich (wegen $f^{(n-1)}(p)=0$)

$$f^{(n)}(p)p = 0,$$

oder nach Multiplication mit $p_\lambda{}^{n-1}$:

$$f^{(n)}(p)pp_\lambda{}^{n-1} = f^{(n)}(p)p_\lambda{}^{n-1}p = Lp = 0.$$

Es ist jetzt leicht zu erkennen, dass die Lage des Punktes Lp_λ allein von der in p an die Curve C gelegten Tangente, nicht von der zufälligen Lage des Punktes p_λ auf dieser Tangente abhängt. Denn ersetzt man letzteren Punkt durch irgend einen anderen auf der Tangente, etwa

$$q = p + \varrho . p_\lambda,$$

so kommt

$$Lq = Lp + \varrho . Lp_\lambda = \varrho . Lp_\lambda,$$

welcher Punkt mit Lp_λ zusammenfällt. Wir dürfen daher annehmen, dass p_λ ein endlicher Punkt sei, in welchem Falle dieser Punkt und die Strecken a_1, a_2, a_3 linear unabhängig sind, also p aus ihnen linear abgeleitet werden kann. Man schreibe etwa

$$p = \pi . p_\lambda + \alpha_1 . a_1 + \alpha_2 . a_2 + \alpha_3 . a_3.$$

Durch Multiplication mit L folgt hieraus

$$Lp = 0 = \pi . Lp_\lambda + \alpha_1 . La_1 + \alpha_2 . La_2 + \alpha_3 . La_3.$$

Demnach liegen die vier Punkte Lp_λ, La_1, La_2, La_3 in einer Ebene, w. z. b. w.*

Die Ergebnisse zusammenfassend, können wir sagen:

Besitzt eine Punkt-Transformation einen Fundamentalpunkt (beliebiger Ordnung) p, und wendet man diese Transformation auf eine durch p gehende Curve C an, so zerfällt die Transformirte, indem (gleichgiltig, ob C in p einen gewöhnlichen oder einen singulären Punkt hat), eine Gerade sich absondert, welche in einer bestimmten Ebene liegt und durch einen bestimmten (von der in p an C gelegten Tangente abhängigen) Punkt geht, im Uebrigen aber noch willkürlich ist.

Es ist im Vorhergehenden von den Fällen abgesehen worden, in welchen die zu transformirende Curve C in p eine Fundamental-Linie oder Fundamentalfläche der Transformation (d. h. eine von Fundamentalpunkten

---

* Man bemerkt, dass L eine ausgeartete Collineation liefert, bestehend in einer Projection oder einer Aufeinanderfolge von solchen, mit p als erstem Centrum.

erfüllte Linie oder Fläche) berührt oder osculirt. Obwohl die Untersuchung auch in diesen Fällen mit den oben angewendeten Hilfsmitteln ohne Schwierigkeit sich durchführen lässt, so wollen wir doch, um nicht zu weitläufig zu werden, davon hier absehen. Es werde nur bemerkt, dass in den erwähnten Fällen die sich absondernde Gerade unbestimmt zu sein aufhören, oder ganz in Wegfall kommen kann.

Die verwandte Frage, wie die Transformirte einer durch einen Fundamentalpunkt p gehenden Fläche zerfällt, kann entsprechend behandelt werden. Man findet, dass im Allgemeinen eine Ebene sich absondert, welche durch eine bestimmte (von der in p an die gegebene Fläche gelegten Tangentenebene abhängige) Gerade geht, im Uebrigen aber unbestimmt bleibt.

Nachsatz

zu dem

Beitrag zur systematischen Behandlung der ebenen Bewegung starrer Systeme.

Von

Prof. Dr. Rodenberg
in Hannover.

(Siehe diese Zeitschrift Jahrg. 1892 4. Heft S. 218 flgg.)

Auf S. 226 und 227 der in Rede stehenden Arbeit habe ich gezeigt, dass eine Gruppe von $3n-5$ Normalstrahlen, welche eine Γ^n bestimmt, stets eine Gruppe von $3p-5$ Strahlen aufweist, welche eine Γ^p bestimmt, wo $p \leqq 11$ ist; und weiter, dass die $3n-4$ zur Bestimmung der Polconfiguration Π^n nothwendigen Strahlen stets solche $3p-4$ aufweisen, welche eine Π^p bestimmen, wo $p \leqq 13$ ist.* Diese Thatsache veranlasste mich zu der Behauptung, dass nun auch die Construction der Γ^{11} und Π^{13} aus den nachgewiesenen Normalstrahlen mit den grössten wesentlichen Schwierigkeiten verknüpft sei, indem ich annahm, dass bei ungünstigster Wahl der Bestimmungsstücke diese Schwierigkeiten mit der Systemzahl entweder wachsen oder sich gleich bleiben müssten. Diese Annahme erweist sich als nicht völlig zutreffend, man kann nämlich noch Gruppen von Normalstrahlen zu zehn und elf Systemen bilden, bei welchen das auf S. 227 zur Bildung der Γ und Π angegebene Verfahren einer Erweiterung bedarf. Daher möge es erlaubt sein, noch einmal auf den Gegenstand zurück zu kommen.

---

* Die starre Verbindung von n Systemen, das einfache Fachwerk, wird durch $3n-3=3(n-1)$ höhere, nicht zwangläufige Elementenpaare (S. 221) bewirkt. In der Riga'schen Industrie-Zeitung 1891 Nr. 7 und 18 ist gezeigt, dass unter jenen Elementenpaaren stets $3(p-1)$ solche vorhanden sind, welche die starre Verbindung von p jener Systeme bewirken, wo $p \leqq 15$ ist. In der gegenwärtigen Entwickelung ist der geometrische Ausdruck „Normalstrahl“ anstatt „Elementenpaar“ der Gleichmässigkeit wegen beibehalten, obgleich keine Bewegung mehr möglich ist. Ein Fachwerk von unbestimmter unendlich kleiner Verschiebbarkeit liegt vor, wenn die $3(n-1)$ Strahlen einer Γ^n angehören, und dann treten auch diese Normalstrahlen in ihrer ursprünglichen Bedeutung wieder hervor.

Wir beginnen mit den Γ^n und erinnern daran, dass das Auftreten eines Systems, welches mit den übrigen nur durch die Minimalzahl von drei Normalstrahlen verknüpft ist, keine wesentliche Erhöhung der Schwierigkeit in der Herstellung von Γ^n herbeiführen kann, da nach 3) die Γ^n aus der Γ^{n-1} der übrigen Systeme, welche schon bestimmt ist, leicht abgeleitet werden kann. Andererseits kann — und das war nicht ausreichend beachtet — die Anzahl der Normalstrahlen, welche ein System mit anderen verknüpfen, mit wachsendem n beliebig weit getrieben werden, wie schon die Gruppe auf S. 226 beispielsweise zeigt. Denkbar ist also die folgende Gruppe von $a.b$ Strahlen zu $a+b$ Systemen:*

$$\left|\begin{matrix} 1,\ a+1 & 2,\ a+1 & 3,\ a+1\ldots & a,\ a+1 \\ 1,\ a+2 & 2,\ a+2 & 3,\ a+2 & a,\ a+2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1,\ a+b & 2,\ a+b & 3,\ a+b & a,\ a+b \end{matrix}\right| \quad \ldots a,\ b>3.$$

Die Annahme, a oder b sei gleich 3, ist nicht zu berücksichtigen, da sie auf die S. 226 angegebene Gruppe, nennen wir sie $G\alpha^{11}$, führt. Zur Bestimmung der Γ^{a+b} dieser Systeme sind $3(a+b)-5$ Normalstrahlen nothwendig, und es können daher die drei Fälle

$$3(a+b)-5 \lesseqgtr ab$$

eintreten. Im ersten Falle ist für die gewählten Zahlen offenbar die Gruppe unmöglich als gegeben anzunehmen, im zweiten bestimmt sie genau Γ^{a+b}. Im dritten können die überschüssigen Normalstrahlen — setzen wir ihre Anzahl $3(a+b)-5-ab=c$ — noch zur Heranziehung von c weiteren Systemen benutzt werden, indem wir von jedem Systeme $3+1=4$ Strahlen in Bezug auf 4 der $a+b$ Systeme geben; denn dann ist die Γ^{a+b+c} gerade bestimmt, da mit dem Anschlusse jedes der c Systeme sich die Anzahl der überschüssigen Normalstrahlen um eins verringert hat.

Im Falle a oder $b=4$ ist, hat ersichtlich nur $c=0$ einen Sinn; sind a und b grösser als 5, so könnte man noch von $\frac{c}{2}$ Systemen je fünf Normalstrahlen geben, u. s. w. Aber derartige Ueberlegungen erweisen sich als unnöthig, da a und b innerhalb ganz enger Grenzen liegen. Wir setzen jetzt

$$3(a+b)-5=a.b+c\ldots\ a,\ b>3,$$

und lösen nach einer der Grössen a und b, etwa b, auf:

$$\text{I)}\qquad b=\frac{3a-5-c}{a-3}\cdots$$

Mit der folgenden Substitution der Werthe $a=4,\ 5,\ldots$ hat man nun so lange fortzufahren, bis $b\overline{\overline{<}}\,a$ wird, da höhere Werthe dann wegen der Symmetrie der Gleichung in Bezug auf a und b nichts Neues liefern.

---

* Da keine Verwechselung mit Polen eintreten kann, ist der Strich in der Bezeichnung des Normalstrahles $\overline{ik}$ weggelassen.

$a = 4,\ b = 7,\ c = 0,\ a + b = n = 11$ ergiebt die Gruppe

$$G_\beta^{11} \dots \left| \begin{matrix} 15 & 25 & 35 & 45 \\ 16 & 26 & 36 & 46 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1\mathrm{XI} & 2\mathrm{XI} & 3\mathrm{XI} & 4\mathrm{XI} \end{matrix} \right| ,$$

$a = 5,\ b = 5,\ c = 0,\ a + b = n = 10$ ergiebt die Gruppe

$$G_\gamma^{10} \dots \left| \begin{matrix} 16 & 26 & 36 & 46 & 56 \\ 17 & 27 & 37 & 47 & 57 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1\mathrm{X} & 2\mathrm{X} & 3\mathrm{X} & 4\mathrm{X} & 5\mathrm{X} \end{matrix} \right| .$$

Hier ist die Construction von Γ^{10} aus G_γ^{10} entschieden schwieriger als diejenige von Γ^{11} aus G_α^{11} oder G_β^{11}; denn in G_γ^{10} liegen von den ersten sechs Systemen nur fünf Normalstrahlen vor, während in G_α^{11} deren zehn, und in G_β^{11} deren acht vorhanden sind. Die Construction von Γ^{10} geschieht nach Analogie des auf S. 227 mitgetheilten Verfahrens durch willkürliche Wahl von $13 - 5 = 8$ Strahlen der ersten sechs Systeme, welche die Ermittelung einer Γ'^6 ermöglicht. Diese Γ'^6 führt dann nach Heranziehung von 17, 27, 37, 47 zu einer Π'^7. Um 57 zu berücksichtigen, wiederhole man das ganze Verfahren unter Abänderung der gewählten acht Strahlen, wodurch eine zweite Π''^7 gewonnen ist, deren Verknüpfung mit Π'^7 zu einer Γ'^7 führt, und diese bestimmt im Verein mit 57 eine Π'''^7, welcher die sämmtlichen Normalstrahlen der sieben ersten Systeme angehören. Nun ist behufs Gewinnung einer zweiten Configuration derselben Art das ganze Verfahren zu wiederholen, und die Verknüpfung beider Π^7 führt dann endlich zu einer Γ'''^7, der die sämmtlichen Normalstrahlen der sieben ersten Systeme angehören. In gleicher Weise hat man fortschreitend auch die folgenden drei Reihen einzuflechten. Da das etwas einfachere Verfahren der Bildung von Γ^{11} aus G_β^{11} genügend durch das soeben Erörterte gekennzeichnet ist, so gehen wir nicht näher darauf ein.

Eine nähere Untersuchung verdient hingegen noch die Gruppe P^n von $3n - 4$ Normalstrahlen, welche eine Π^n und diejenige S^n von $3(n-1)$ Normalstrahlen, welche ein einfaches Fachwerk bestimmt. Die Bestimmungs-Gleichung 1) wird

$$\text{für } P^n \dots\ b = \frac{3a - 4 - c}{a - 3},$$

$$\text{„ } S^n \dots\ b = \frac{3(a-1) - c}{a - 3},$$

da in I) offenbar nur die auftretende Zahl 5 durch 4, bez. 3 ersetzt zu werden braucht. Die sich ergebenden Gruppen sind diese:*

* Hierzu kommen dann noch, der Entwickelung auf S. 227 entsprechend, P_α^{13} und S_α^{15}, letztere aus P_α^{13} durch Beifügung der Strahlen

$$\begin{matrix} 1\mathrm{XIV} & 2\mathrm{XIV} & 3\mathrm{XIV} \\ 1\mathrm{XV} & 2\mathrm{XV} & 3\mathrm{XV} \end{matrix} \quad \mathrm{XIV} \quad \mathrm{XV}$$

hervorgehend.

P^n

$a=4,\quad b=8,\quad c=0,\quad a+b=n=12,\quad 3n-4=32$

$$P_\beta^{12}\ldots\left|\begin{array}{llll} 15 & 25 & 35 & 45 \\ 16 & 26 & 36 & 46 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\,\mathrm{XII} & 2\,\mathrm{XII} & 3\,\mathrm{XII} & 4\,\mathrm{XII} \end{array}\right|,$$

$a=5,\quad b=5,\quad c=1,\quad n=a+b+c=11,\quad 3n-4=29$

$$P_\gamma^{11}\ldots\left|\begin{array}{lllll} 16 & 26 & 36 & 46 & 56 \\ 17 & 27 & 37 & 47 & 57 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\,\mathrm{X} & 2\,\mathrm{X} & 3\,\mathrm{X} & 4\,\mathrm{X} & 5\,\mathrm{X} \\ 1\,\mathrm{XI} & 2\,\mathrm{XI} & 3\,\mathrm{XI} & 4\,\mathrm{XI} & \end{array}\right|.$$

S_n

$a=4,\quad b=9,\quad c=0,\quad a+b=n=13,\quad 3(n-1)=36$

$$S_\beta^{13}\ldots\left|\begin{array}{llll} 15 & 25 & 35 & 45 \\ 16 & 26 & 36 & 46 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\,\mathrm{XIII} & 2\,\mathrm{XIII} & 3\,\mathrm{XIII} & 4\,\mathrm{XIII} \end{array}\right|,$$

$a=5,\quad b=6,\quad c=0,\quad a+b=n=11,\quad 3(n-1)=30$

$$S_\gamma^{11}\ldots\left|\begin{array}{lllll} 16 & 26 & 36 & 46 & 56 \\ 17 & 27 & 37 & 47 & 57 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\,\mathrm{XI} & 2\,\mathrm{XI} & 3\,\mathrm{XI} & 4\,\mathrm{XI} & 5\,\mathrm{XI} \end{array}\right|,$$

$a=5,\quad b=5,\quad c=2,\quad a+b+c=n=12,\quad 3(n-1)=33$

$$S_\delta^{12}\ldots\left|\begin{array}{lllll} 16 & 26 & 36 & 46 & 56 \\ 17 & 27 & 37 & 47 & 57 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\,\mathrm{X} & 2\,\mathrm{X} & 3\,\mathrm{X} & 4\,\mathrm{X} & 5\,\mathrm{X} \\ 1\,\mathrm{XI} & 2\,\mathrm{XI} & 3\,\mathrm{XI} & 4\,\mathrm{XI} & \\ 1\,\mathrm{XII} & 2\,\mathrm{XII} & 3\,\mathrm{XII} & 4\,\mathrm{XII} & \end{array}\right|$$

Werfen wir noch schliesslich einen Blick auf die geschlossenen Gliedervielecke, welche in kinematischen Ketten und Fachwerken auftreten. Unter einem solchen Vieleck wird eine Gruppe von Gliedern verstanden, von denen ein beliebiges mit zweien der übigen, aber nur mit diesen, durch je ein kinematisches Elementenpaar verbunden ist. Beim alleinigen Auftreten von höheren, nicht zwangläufigen Elementenpaaren ist das Gliedervieleck durch den Cyklus

$$ik, \quad kl, \quad lm, \ldots \quad zi$$

von Normalstrahlen gekennzeichnet. Die Minimalzahl von Strahlen, welche ein solcher Cyklus in P_α^{13} und S_α^{15} fasst, ist drei, wie z. B. 14, 45, 51 zeigt; bei allen übrigen Gruppen ist diese Zahl vier, wie z. B. 14, 42, 25, 51.

Sollen andererseits nur Drehpaare auftreten, so ist die Gliederverbindung aus der gefundenen nach S. 222 durch Einschalten eines neuen Gliedes für je ein beseitigtes höheres Paar herzustellen; d. h. aus einem Gliederdreieck wird ein Sechseck; aus einem Viereck wird ein Achteck. Folglich: Enthält eine zwangläufige kinematische Kette oder ein einfaches Fachwerk nur höhere, nicht zwangläufige Elementenpaare, und tritt kein Gliederdreieck auf, so ist eine Reihe von Gliedervierecken vorhanden; kommen andererseits nur Drehpaare vor und tritt kein Gliederviereck, -fünfeck, -sechseck, -siebeneck auf, so ist eine Reihe von Gliederachtecken vorhanden. Hiernach ist das a. a. O. in der Riga'schen Industrie-Zeitung gegebene Resultat abzuändern.

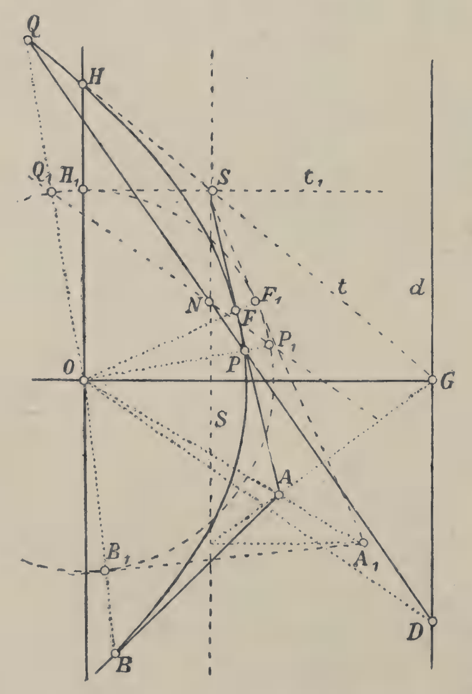
Hannover, den 15. August 1892.

Kleinere Mittheilungen.

XV. Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve 2ter Ordnung und Tangenten aus einem Punkte.

Die Curve 2ter Ordnung sei wie in der Mittheilung X des 3. Heftes durch einen Brennpunkt O, seine Directrix (d) und H gegeben.

Wir beschreiben aus O mit beliebigem Radius einen Kreis. Derselbe entspreche dem gegebenen Kegelschnitt in einer centrischen Collineation, welche O zum Centrum und d zu einer Gegenachse hat. Dann sind HH_1 ein entsprechendes Punktepaar. Die Tangente t in H an den Kegelschnitt — d. h. die Linie $\overline{HG}$ — trifft die Tangente t_1, welche in H_1 den Kreis berührt, in einem Punkte S der Collineationsachse s. Somit ist diese und die Collineation bestimmt. Wir zeichnen in ihr zu der gegebenen Geraden ND die entsprechende. Sie geht durch N, ist parallel zu OD und schneidet den Kreis in zwei Punkten $P_1 Q_1$, deren entsprechende die gesuchten Schnittpunkte PQ sind.



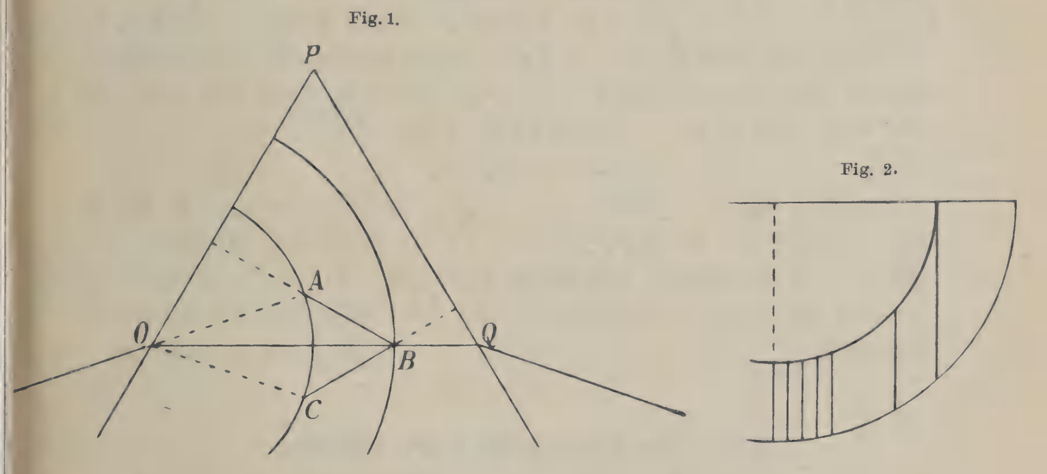
Sollen die Tangenten aus einem Punkte A an den Kegelschnitt gezeichnet werden, so suchen wir zu A den entsprechenden Punkt A_1 (der Linie GA entspricht eine Parallele zu OG). Wir ziehen aus A_1 die Tangenten an den Kreis. Ihre correspondirenden gehen durch A und berühren den Kegelschnitt.

Zürich. Dr. Beyel.

XVI. Die kleinste Ablenkung im Prisma.

Wenn es auch hierüber nicht an Beweisen gebricht, synthetischen und analytischen*, so will ich doch den mir jüngst beigefallenen synthetisch-analytischen Beweis mittheilen, der mir durch die nach Radau benannte Methode der Darstellung des prismatischen Strahlenganges eingegeben wurde, wie auch Lommel im Jahre 1875 einen auf diesem Wege gefundenen Beweis in dieser Zeitschrift Bd. 20, S. 212—215, mitgetheilt hat.

Ich gehe vom symmetrischen Durchgang des Lichtes durch's Prisma aus, für welchen das zu beweisende Minimum existirt. Hierbei entsteht das Deltoid $OABC$, welches aus den gleichschenkligen Dreiecken OAC und BAC zusammengesetzt ist; OA ist der einfallende, OB der gebrochene Strahl, OC die Richtung des austretenden Strahles; $ABC=\gamma$ ist der brechende Winkel, $AOC=\delta$ der Ablenkungswinkel. Für einen Nachbarstrahl OB_1 unterhalb OB ist $A_1B_1 \| AB$ kleiner als AB, weil die Schraffe A_1B_1 der mittleren kleinsten Schraffe des in der zweiten Figur dargestellten



Halbkreisringes näher liegt. Aus demselben Grunde ist aber $B_1C_1 \| BC$ grösser als BC. (Im vorletzten Falle giebt die Verlängerung von OA der ersten Figur die kürzeste Schraffe ab, im letzten Falle die Verlängerung von OC). Der vorletzte Unterschied x ist absolut kleiner als der letztgenannte y, wie aus der ersten und zweiten Figur erhellt, da von derselben Schraffe aus das eine Mal näher zur kleinsten, das andere Mal weiter weg von der kleinsten gegangen wird und die Schraffendifferenz zusehends wächst.

Es ist also

$$A_1C_1^2 = (AB-x)^2 + (BC+y)^2 - 2(AB-x)(BC+y)\cos\gamma$$

und

---

* Im Jahrgange 1890 des Repertoriums der Physik, S. 177 und 178, habe ich bei ähnlicher Gelegenheit einschlägige Arbeiten erwähnt.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos\gamma,$$

woraus

$$A_1C_1^2 = AC^2 + 4AB\,(y-x)\,\sin^2 \gamma/_2,$$

d. i. $A_1C_1 > AC$, somit auch bei O der Centriwinkel $\delta' > \delta$.

Für einen Nachbarstrahl OB_2 oberhalb OB wird geradeso $x > y$ und

$$A_2C_2^2 = AC^2 + 4AB\,(x-y)\,\sin^2 \gamma/_2.$$

Demnach ist der Minimalwinkel AOC erwiesen.

1. Zusatz: Dass der Minimumstrahl innerhalb des Prismas den Winkel aller vom Punkte O aus durchgangsfähigen Strahlen halbirt, wovon ich im Jahrgange 1883 des Repertoriums gehandelt, sieht man auf obige Art so zu sagen ohne Weiteres ein.

2. Zusatz: Das Kürzeste, was ich als zum fraglichen Minimum gehörig bisher gelesen, steht im 1. Heft des neuesten Jahrganges der Zeitschrift für phys. u. chem. Unterricht, S. 43, abgedruckt aus der englischen Zeitschrift „Nature“ vom Jahre 1891 unter dem Namen Kirkby. Die beigegebene Figur bringt nur das Dreieck POQ und POQ' (s. oben Fig. 1), wobei OQ ein oberhalb des in meiner Figur symmetrisch durchgehenden Strahles gelegener und OQ ein unterhalb gelegener Strahl sein soll. Und zwar sind beide so gewählt, dass $\triangle POQ \sim \triangle PQ'O$, also

$$PO^2 = PQ.PQ'.$$

Alsdann heisst es: Wenn Q mit Q' zusammenfällt (wie in meiner Figur), so wird $PO = PQ$. Allein daraus schon das Minimum oder Maximum zu erschliessen, geht meines Erachtens nicht an; die Entscheidung zwischen den beiden Letztgenannten wird dabei ausdrücklich dem Versuche überlassen.

A. Kurz in Augsburg.

XVII. Der fragwürdige dritte Regenbogen.

In der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, J. 1880, S. 72, berichtet Heilermann denselben gesehen zu haben und giebt 41^0 und 46^0 als halbe Oeffnungswinkel x der Lichtkegel an, deren Spitze im Auge des Beobachters und deren Basis der rothe und der violette Saum dieses Bogens seien. Schellbach dagegen nennt als Resultate der Rechnung in dem Texte der von ihm und Engel herausgegebenen Zeichnungen 37^0 und 42^0 („Darstellende Optik“, Halle 1856, H. W. Schmidt).

Sind i und r der Einfalls- und Brechungswinkel an der Wasserkugel, so ist wegen der drei Reflexionen innerhalb der letzteren

$$w = \pi + i - 4r$$

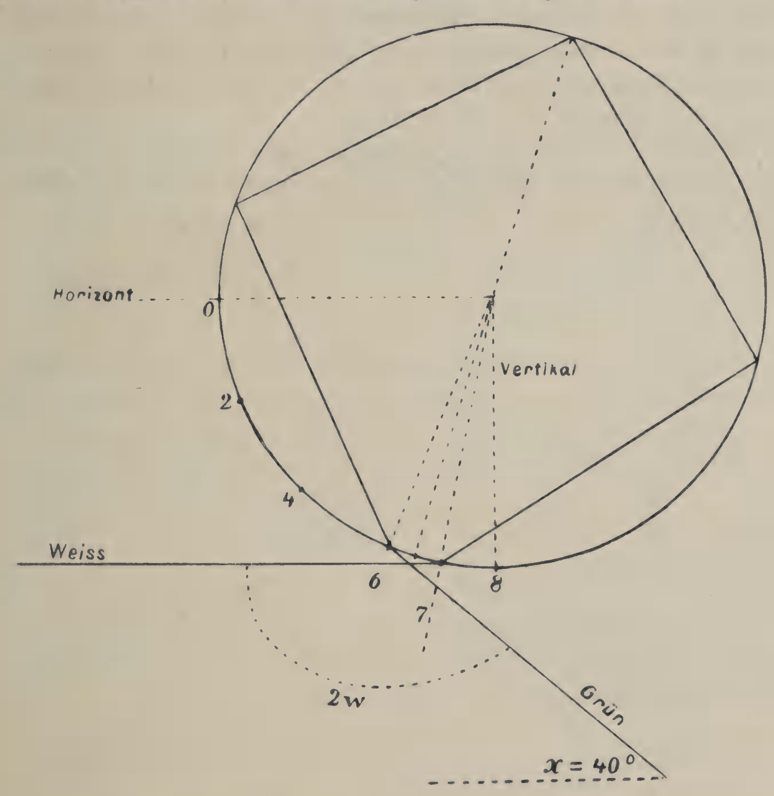
und es ergiebt sich für Roth ($n = 1{,}330$) der Einfallswinkel i aus der Gleichung

$$16 - 1{,}330^2 = 15\sin^2 i \text{ als } i = 76^0\,55' \text{ und } r = 47^0\,5'.$$

Für Violett ($n = 1,345$) genügt es bei den drei Decimalen geradezu*, wenn man $1,345^2 = 1,330^2 - 2.1,330.0,015$ annimmt ($0,015^2$ weglässt), woraus bezw. $i = 76\,35'$ und $r = 46^0\,19'$ oder rund $46^0\,20'$.

Folglich ist für Roth $2w = 137^0\,10'$ und für Violett $2w = 142^0\,38'$ oder rund $142^0\,40'$ und der genannte halbe Oeffnungswinkel bezw. $42^0\,50'$ und $37^0\,20'$.

Dieser Winkel öffnet sich zur Sonnenseite hin. Heilermann spricht die Ansicht aus, dass man den dritten Regenbogen wohl meist auf der falschen Seite (auf welcher wirklich der erste und zweite Regenbogen sich befinden) gesucht und dass darum nur ein einziger Beobachter, der schwedische Physiker Bergmann, den dritten Bogen bisher gesehen habe.



Da ich noch nirgends eine Construction für den dritten Bogen vorfand, so habe ich eine solche angefertigt, für den mittleren (grünen) Strahl. Ich wählte dafür 40^0 als halben Oeffnungswinkel x, also 140^0 für $2w$. Dabei fand ich, in dem Bestreben, die Construction einfach zu gestalten, dass das Deltoid mit dem einen Winkel 140^0 und dem andern $11\frac{1}{4}{}^0$ ($\frac{1}{8}$ von 90^0)

---

* Vergl. auch meine „Elementare Darstellung des (1. u. 2.) Regenbogens" im Rep. d. Phys. v. J. 1891, S. 311–314. Und Lommel desgl. in dieser „Zeitschrift", Bd. 20, S. 216–220.

im Centrum noch ziemlich genau mit den oben berechneten Zahlen stimmt, indem z. B. hieraus $i = 75\frac{5}{8}{}^0$ folgen würde. Demgemäss theilte ich den Quadranten links unten in 8, beziehungsweise 16 gleiche Theile, wodurch der eintretende weisse und austretende grüne Strahl sich ergiebt, da der erstere horizontal, der letztere symmetrisch zu ihm gezeichnet werden muss. Der Rest d. i. $\frac{31}{32}$ des übrigen Kreisumfanges darf dann nur mit dem Zirkel in vier gleiche Theile getheilt werden, um die drei Reflexionsörter zu finden. Wegen des verhältnissmässig kleinen Winkels von $11\frac{1}{4}{}^0$ musste die Grösse des Kreises etwas beträchtlicher gewählt werden, als dies beim ersten und zweiten Regenbogen zu geschehen pflegt.

Die Breite des dritten Regenbogens würde sich mit Einrechnung der scheinbaren Sonnengrösse zu 6^0 ergeben $(42^0 50' - 37^0 20' + 0^0 30')$, wenn ihr nicht die Mattigkeit der Farben und die Störung des Auges beim Hinsehen nach der Sonne Eintrag thun würde.

Jedenfalls ist Schellbach's Angabe gegenüber Heilermann bestätigt, dessen Irrthum indess als blos praktische Schätzung nicht bedeutend erscheint.

A. Kurz in Augsburg.

XXI.

Neue Grundlagen einer allgemeinen Zahlenlehre.*

Von

Dr. J. Kraus

in Darmstadt.

Erste Abhandlung.

Wenn α eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, so lässt sich bekanntlich jede beliebige reelle positive Zahl z in der Form

$$z = \cdots + a_{-3}\alpha^3 + a_{-2}\alpha^2 + a_{-1}\alpha^1 + a_0\alpha^0 + a_1\alpha^{-1} + a_2\alpha^{-2} + \cdots$$

ausdrücken, wobei die a_λ positive ganze Zahlen $< \alpha$ vorstellen (die Null eingeschlossen). Man sagt dann, die Zahl z sei in dem Zahlensysteme mit der Grundzahl α dargestellt, und nennt die Zahlen a_λ die Ziffern von z in diesem Systeme. Jeder Zahl z entspricht in jedem Systeme nur eine einzige derartige Darstellung.

Denkt man sich eine Zahl in allen möglichen Zahlensystemen dargestellt, so besteht zwischen den Ziffern je zweier Darstellungen ein bestimmter gesetzmässiger Zusammenhang. Im Folgenden soll es nun unsere nächste Aufgabe sein, diesen Zusammenhang in möglichst allgemeiner Form zu entwickeln. Mit anderen Worten, es sollen zunächst die allgemeinen Gesetze der Transformation einer Zahl von einem Zahlensysteme in ein anderes dargelegt werden.

Besitzt ferner eine Zahl eine von der besonderen Wahl des Zahlensystemes unabhängige, also durch Transformation in ein anderes Zahlensystem sich nicht verändernde („invariante") Eigenschaft, stellt sie bei-

---

* Unter diesem Titel beabsichtigt der Verfasser eine fortlaufende Reihe von arithmetischen Abhandlungen in dieser Zeitschrift der Oeffentlichkeit zu übergeben. Eine grössere Anzahl derselben liegt, was den Inhalt betrifft, bereits fertig vor. Die demnächst folgenden Abschnitte behandeln u. A. die weitere Ausführung der Betrachtungen des zweiten Abschnittes, die Darstellung einer Zahl im Systeme $\alpha\alpha'\alpha''\ldots$ in Beziehung zu den Darstellungen in den Systemen $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, die Potenzen und Wurzeln, höhere Congruenzen und Formen, die Grundrechnungsarten, Beziehungen zu den Kettenbrüchen, Auflösung der Gleichungen u. s. w.

spielsweise einen rationalen echten Bruch oder das Quadrat eines solchen vor, oder genügt sie einer vorgelegten Gleichung u. s. w., so muss diese Eigenthümlichkeit in einer entsprechenden „invarianten" Gesetzmässigkeit in der Aufeinanderfolge der Ziffern zum Ausdruck kommen. So wird auch jede Function einer Zahl die Folge ihrer Ziffern in bestimmter, dieser Function eigenthümlicher gesetzmässiger Weise verändern. Es ist nun Zweck und Ziel der vorliegenden Untersuchungen, die in obigem Sinne invarianten Eigenschaften der Zahlen in ihrem gegenseitigen Zusammenhange zu entwickeln, zugleich als Grundlage für eine neue Auffassung und Behandlung der Zahlenlehre. Zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen wählen wir den rationalen echten Bruch.

I.

Zusammenhang der Darstellungen einer Zahl in zwei beliebigen Zahlensystemen.

§ 1.

Es bedeute zunächst k eine beliebige positive ganze Zahl und z eine positive ganze Zahl $< k$. Alsdann ist $\frac{z}{k}$ ein echter Bruch. Multiplicirt man $z (= r_1)$ mit einer beliebigen positiven ganzen Zahl α, so kann das Product in der Form

$$z\alpha = r_1 \alpha = r_2 + a_1 k$$

dargestellt werden, wobei r_2 und a_1 positive ganze Zahlen sind. Fügt man die Bedingung $r_2 < k$ hinzu, so folgt daraus unmittelbar $a_1 < \alpha$.

Wenn man den so erhaltenen Rest r_2 ebenfalls mit α multiplicirt, das Product $r_2\alpha$ in der Form

$$r_2 \alpha = r_3 + a_2 k \; (r_3 < k, \; a_2 < \alpha)$$

darstellt und dieses Verfahren beliebig weit fortsetzt, so gelangt man zu dem bekannten Algorithmus

$$1) \qquad r_\lambda \alpha = r_{\lambda+1} + a_\lambda k, \text{ oder } r_\lambda \alpha - r_{\lambda+1} = a_\lambda k,$$

giltig für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots \infty$. Dabei sind die r_λ und a_λ positive ganze Zahlen, die den Bedingungen $r_\lambda < k$, $a_\lambda < \alpha$ Genüge leisten.

Setzt man in Gleichung 1) für λ nacheinander die Werthe λ, $\lambda + 1$, $\ldots, \mu - 2$, $\mu - 1$, so erhält man

$$\begin{array}{l|l}
r_\lambda \alpha \quad - r_{\lambda+1} = a_\lambda k & \alpha^{\mu-\lambda-1} \\
r_{\lambda+1} \alpha - r_{\lambda+2} = a_{\lambda+1} k & \alpha^{\mu-\lambda-2} \\
\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \cdot \\
r_{\mu-2} \alpha - r_{\mu-1} = a_{\mu-2} k & \alpha \\
r_{\mu-1} \alpha - r_\mu \quad = a_{\mu-1} k & 1.
\end{array}$$

Componirt man in diesem Systeme von Gleichungen, wie danebenstehend angedeutet, so folgt

$$2)\qquad r_\lambda \alpha^{\mu-\lambda} = r_\mu + (a_\lambda a_{\lambda+1} \ldots a_{\mu-2} a_{\mu-1})_\alpha \,.\, k,$$

wo zur Abkürzung $(a_\lambda a_{\lambda+1} \ldots a_{\mu-2} a_{\mu-1})_\alpha$ für $(a_\lambda \alpha^{\mu-\lambda-1} + a_{\lambda+1}\alpha^{\mu-\lambda-2} + \cdots + a_{\mu-2}\alpha + a_{\mu-1})$ gesetzt wurde. In dem besonderen Falle, wo $\lambda = 1$ ist, verwandelt sich Gleichung 2) in

$$3)\qquad r_1 \alpha^{\mu-1} = r_\mu + (a_1 a_2 \ldots a_{\mu-2} a_{\mu-1})_\alpha k.$$

Aus Gleichung 2) folgt in bekannter Weise:

$$\frac{r_\lambda}{k} = \frac{a_\lambda}{\alpha} + \frac{a_{\lambda+1}}{\alpha^2} + \cdots + \frac{a_{\mu-2}}{\alpha^{\mu-\lambda-1}} + \frac{a_{\mu-1}}{\alpha^{\mu-\lambda}} + \frac{r^\mu}{k\,\alpha^{\mu-\lambda}} = (0,\ a_\lambda a_{\lambda+1} \ldots a_{\mu-2} a_{\mu-1})_\alpha + \frac{r_\mu}{k\,\alpha^{\mu-\lambda}};$$

das heisst: der Bruch $\frac{r_\lambda}{k}$ ist bis auf einen Fehler $< \frac{1}{\alpha^{\mu-\lambda}}$ durch $(0,\ a_\lambda a_{\lambda+1} \ldots a_{\mu-2} a_{\mu-1})_\alpha$ im Zahlensysteme mit der Grundzahl α (wir wollen dafür in der Folge kurz sagen „im Systeme α“) dargestellt, oder die angeführte Darstellung ist für die ersten $(\mu - \lambda)$ Stellen genau. Für $\mu = \infty$ wird der Fehler verschwindend klein.

Insbesondere ist

$$\frac{z}{k} = \frac{r_1}{k} = (0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots)_\alpha.$$

§ 2.

Wir bezeichnen jetzt die Reste $r_1, r_2, r_3, \ldots$ der Reihe nach mit $r_{11}, r_{21}, r_{31}, \ldots$; dann verwandelt sich Gleichung 1) in

$$4)\qquad r_{\lambda 1}\alpha - r_{\lambda+1,1} = a_{\lambda 1} k \ (\lambda = 1, 2, 3, \ldots;\ r_{11} = z),$$

wobei $r_{\lambda 1} < k$, $a_{\lambda 1} < \alpha$. Multiplicirt man die Reste $r_{11}, r_{21}, r_{31}, \ldots$ nacheinander mit der beliebigen positiven ganzen Zahl α', so kann man, ähnlich wie oben, setzen

$$r_{\lambda 1}\alpha' - r_{\lambda 2} = a'_{1\lambda} k \ (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

mit der Bedingung $r_{\lambda 2} < k$ und $a'_{1\lambda} < \alpha'$. Auf diese Weise erhält man die Reihe

$$r_{12}, r_{22}, r_{32}, \ldots, r_{\lambda 2}, \ldots$$

Werden die Elemente dieser Reihe abermals mit α' multiplicirt, so entsteht die Reihe

$$r_{13}, r_{23}, r_{33}, \ldots, r_{\lambda 3}, \ldots,$$

deren Glieder dem Algorithmus

$$r_{\lambda 2}\alpha' - r_{\lambda 3} = a'_{2\lambda} k \ (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen, wobei wieder $r_{\lambda 3} < k$, $a'_{2\lambda} < \alpha'$. Die Fortsetzung des Verfahrens liefert das nachstehende System von Resten:

5)
$$\begin{cases} r_{11} & r_{21} & r_{31} \ldots r_{\lambda 1} \ldots \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \ldots r_{\lambda 2} \ldots \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \ldots r_{\lambda 3} \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_{1\mu} & r_{2\mu} & r_{3\mu} \ldots r_{\lambda\mu} \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

und führt auf den allgemeinen Algorithmus

6) $$r_{\lambda\mu}\alpha' - r_{\lambda,\mu+1} = a'_{\mu\lambda}k \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

worin die $r_{\lambda\mu}$ und $a'_{\mu\lambda}$ positive ganze Zahlen bedeuten, und zwar $r_{\lambda\mu} < k$, $a'_{\mu\lambda} < \alpha'$.

Vertauscht man im Systeme 5) die Horizontalreihen mit den Verticalreihen und führt ausserdem $r'_{\mu\lambda} = r_{\lambda\mu}$ ein, so erhält man das System

7)
$$\begin{cases} r'_{11} & r'_{21} & r'_{31} \ldots r'_{\lambda 1} \ldots \\ r'_{12} & r'_{22} & r'_{32} \ldots r'_{\lambda 2} \ldots \\ r'_{13} & r'_{23} & r'_{33} \ldots r'_{\lambda 3} \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r'_{1\mu} & r'_{2\mu} & r'_{3\mu} \ldots r'_{\lambda\mu} \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Gleichung 6) lässt sich hiernach auch in folgender Form schreiben:

8) $$r'_{\mu\lambda}\alpha' - r'_{\mu+1,\lambda} = a'_{\mu\lambda}k \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nach 6) ist

$$r_{\lambda\mu}\alpha' - r_{\lambda,\mu+1} = a'_{\mu\lambda}k,$$
$$r_{\lambda+1,\mu}\alpha' - r_{\lambda+1,\mu+1} = a'_{\mu,\lambda+1}k.$$

Multiplicirt man die erste dieser beiden Gleichungen mit α und zählt von dem Producte die zweite ab, so ergiebt sich

9) $$(r_{\lambda\mu}\alpha - r_{\lambda+1,\mu})\alpha' - (r_{\lambda,\mu+1}\alpha - r_{\lambda+1,\mu+1}) = (a'_{\mu\lambda}\alpha - a'_{\mu,\lambda+1})k.$$

Aus dieser Beziehung folgt, dass der Ausdruck $(r_{\lambda,\mu+1}\alpha - r_{\lambda+1,\mu+1})$ durch k theilbar ist, sobald ein Gleiches für $(r_{\lambda\mu}\alpha - r_{\lambda+1,\mu})$ gilt. Nun lässt sich aber nach 4) $(r_{\lambda 1}\alpha - r_{\lambda+1,1})$ durch k theilen. Folglich sind auch die Ausdrücke $(r_{\lambda 2}\alpha - r_{\lambda+1,2})$, $(r_{\lambda 3}\alpha - r_{\lambda+1,3}), \ldots$ durch k theilbar. Man darf daher allgemein setzen:

10) $$r_{\lambda\mu}\alpha - r_{\lambda+1,\mu} = a_{\lambda\mu}k \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo die $a_{\lambda\mu}$ positive ganze Zahlen $< \alpha$ vorstellen.

Mit Rücksicht auf 10) verwandelt sich Gleichung 9) nach erfolgter Division durch k in:

11) $$a_{\lambda\mu}\alpha' - a_{\lambda,\mu+1} = a'_{\mu\lambda}\alpha - a'_{\mu,\lambda+1},$$

oder

11a) $$a_{\lambda\mu}\alpha' + a'_{\mu,\lambda+1} = a'_{\mu\lambda}\alpha + a_{\lambda,\mu+1},$$

giltig für $\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots \infty$.

Umgekehrt folgt (wie im § 4 gezeigt werden wird) aus Gleichung 11) bezw. 11a) stets die Beziehung

$$(0,\ a_{\lambda\mu} a_{\lambda+1,\mu} a_{\lambda+2,\mu} \cdot\cdot)_\alpha = (0,\ a'_{\mu\lambda} a'_{\mu+1,\lambda} a'_{\mu+2,\lambda} \cdot\cdot)_{\alpha'}.$$

Vermöge der beiden Gleichungen 10) und 8) entspricht jedem Reste $r_{\lambda\mu}$ eine bestimmte Ziffer $a_{\lambda\mu}$ und jedem Reste $r'_{\lambda\mu}$ eine Ziffer $a'_{\lambda\mu}$. Den Systemen 5) und 7) entsprechen die folgenden Systeme der Ziffern $a_{\lambda\mu}$ und $a'_{\lambda\mu}$:

$$12)\quad \begin{cases} a_{11} & a_{21} & a_{31} \dots a_{\lambda 1} \dots \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \dots a_{\lambda 2} \dots \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \dots a_{\lambda 3} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1\mu} & a_{2\mu} & a_{3\mu} \dots a_{\lambda\mu} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases} \qquad 13)\quad \begin{cases} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \dots a'_{\lambda 1} \dots \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{32} \dots a'_{\lambda 2} \dots \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \dots a'_{\lambda 3} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a'_{1\mu} & a'_{2\mu} & a'_{3\mu} \dots a'_{\lambda\mu} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Nach dem im § 1 Entwickelten besteht zwischen den Elementen der Systeme 5), 7), 12) und 13) der Zusammenhang

$$\frac{r_{\lambda\mu}}{k} = \frac{r'_{\mu\lambda}}{k} = (0,\ a_{\lambda\mu} a_{\lambda+1,\mu} a_{\lambda+2,\mu} \cdots)_\alpha = (0,\ a'_{\mu\lambda} a'_{\mu+1,\lambda} a'_{\mu+2,\lambda} \cdots)_{\alpha'},$$

giltig für $\lambda,\ \mu = 1, 2, 3, \dots \infty$.

Insbesondere ist

$$\frac{z}{k} = \frac{r_{11}}{k} = \frac{r'_{11}}{k} = (0,\ a_{11} a_{21} a_{31} \cdots)_\alpha = (0,\ a'_{11} a'_{21} a'_{31} \cdots)_{\alpha'}.$$

Wir wollen die Elemente des Systems 5) als Reste des im Zahlensysteme (α, α') dargestellten Bruches $\frac{z}{k}$ bezeichnen. Ebenso sollen die Elemente des Systems 12) die Ziffern von $\frac{z}{k}$ im Systeme (α, α') heissen. Alsdann stellen die Elemente der Systeme 7) und 13) bezw. die Reste und Ziffern von $\frac{z}{k}$ im Zahlensysteme (α', α) vor.

Bei Anwendung dieser Ausdrucksweise lässt sich das Ergebniss der vorausgehenden Untersuchung zu folgendem Satze zusammmenfassen:

„Die Ziffern $a_{\lambda\mu}$ und $a'_{\lambda\mu}$ der Darstellungen des Bruches $\frac{z}{k}$ in den Zahlensystemen (α, α') bezw. (α', α) sind durch die Gleichung verbunden:

$$a_{\lambda\mu}\alpha' - a_{\lambda,\mu+1} = a'_{\mu\lambda}\alpha - a'_{\mu,\lambda+1},$$

oder

$$a_{\lambda\mu}\alpha' + a'_{\mu,\lambda+1} = a'_{\mu\lambda}\alpha + a_{\lambda,\mu+1},$$

giltig für alle positiven ganzen Werthe von λ und μ."

Gleichung 11) bezw. 11a) wollen wir ihrer Wichtigkeit wegen und um uns in der Folge bequemer auf sie beziehen zu können, kurz als Fundamentalgleichung bezeichnen.

Die Fundamentalgleichung lehrt, einen Bruch $\frac{z}{k}$ aus dem Systeme (α, α') in das System (α', α) zu transformiren.

Anmerkung: Beiläufig sei bemerkt, dass aus den beiden Algorithmen

$$r_{\lambda\mu}\alpha^{\nu} - \binom{\nu}{1} r_{\lambda+1,\mu}\alpha^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} r_{\lambda+2,\mu}\alpha^{\nu-2} - + \cdots \pm r_{\lambda+\nu,\mu} = a_{\lambda\mu}k$$

und

$$r'_{\mu\lambda}\alpha'^{\nu} - \binom{\nu}{1} r'_{\mu+1,\lambda}\alpha'_{\nu-1} + \binom{\nu}{2} r'_{\mu+2,\lambda}\alpha'^{\nu-2} - + \cdots \pm r'_{\mu+\nu,\lambda} = a'_{\mu\lambda}k,$$

giltig für $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots$, unter der Bedingung $r_{\lambda\mu} = r'_{\mu\lambda}$ durch Elimination der folgende Algorithmus sich ergiebt:

$$a_{\lambda\mu}\alpha'^{\nu} - \binom{\nu}{1} a_{\lambda,\mu+1}\alpha'^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_{\lambda,\mu+2}\alpha'^{\nu-2} - + \cdots$$
$$= a'_{\mu\lambda}\alpha^{\nu} - \binom{\nu}{1} a'_{\mu,\lambda+1}\alpha'^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a'_{\mu,\lambda+2}\alpha'^{\nu-2} - + \cdots$$

Auf diese Algorithmen werden wir im weiteren Verlaufe unserer Untersuchungen (bei der Behandlung der höheren Congruenzen und Formen) ausführlich zurückkommen. Es wird sich dabei die Gelegenheit bieten, zu zeigen, wie man mit grossem Vortheil von der symbolischen Rechnung Gebrauch machen kann. Wir beschränken uns an dieser Stelle darauf, nur noch zu erwähnen, dass diese allgemeinen Algorithmen ähnliche Eigenschaften besitzen und eine ähnliche Behandlungsweise zulassen, wie die vorläufig zu betrachtenden besonderen $(\nu = 1)$:

$$r_{\lambda\mu}\alpha - r_{\lambda+1,\mu} = a_{\lambda\mu}k, \; r'_{\mu\lambda}\alpha' - r'_{\mu+1,\lambda} = a'_{\mu\lambda}k, \; a_{\lambda\mu}\alpha' - a_{\lambda,\mu+1} = a'_{\mu\lambda}\alpha - a'_{\mu,\lambda+1}.$$

§ 3.

Beispiel. Es sei $k = 28$, $\alpha = 10$, $\alpha' = 6$. Alsdann kann man die folgenden Systeme aufstellen:

System der $r_{\lambda\mu}$:

1, 10, 16, 20, 4, 12, 8, 24,* 16, 20, ...
6, 4, 12, 8, 24, 16, 20, 4, 12, 8, ...
| 8*, 24, 16, 20, 4, 12, 8, 24, 16, 20, ...
| 20, 4, 12, 8, 24, 16, 20, 4, 12, 8, ...
8, 24, 16, 20, 4, 12, 8, 24, 16, 20, ...
20, 4, 12, 8, 24, 16, 20, 4, 12, 8, ...
. . . .

System der $a_{\lambda\mu}$:

0, 3, 5, 7, 1, 4, 2, 8,* 5, 7, ...
2, 1, 4, 2, 8, 5, 7, 1, 4, 2, ...
| 2*, 8, 5, 7, 1, 4, 2, 8, 5, 7, ...
| 7, 1, 4, 2, 8, 5, 7, 1, 4, 2, ...
2, 8, 5, 7, 1, 4, 2, 8, 5, 7, ...
7, 1, 4, 2, 8, 5, 7, 1, 4, 2, ...
. . . .

* Durch den beigefügten Strich ist die Periode kenntlich gemacht.

System der $r'_{\lambda\mu}$:	System der $a'_{\mu\lambda}$:
1, 6, $\overline{8, 20}$*, 8, 20,...	0, 1, $\overline{1, 4}$*, 1, 4,...
10, 4, 24, 4, 24, 4,...	2, 0, 5, 0, 5, 0,...
16*, 12, 16, 12, 16, 12,...	3*, 2, 3, 2, 3, 2,...
20, 8, 20, 8, 20, 8,...	4, 1, 4, 1, 4, 1,...
4, 24, 4, 24, 4, 24,...	0, 5, 0, 5, 0, 5,...
12, 16, 12, 16, 12, 16,...	2, 3, 2, 3, 2, 3,...
8, 20, 8, 20, 8, 20,...	1, 4, 1, 4, 1, 4,...
24, 4, 24, 4, 24, 4,...	5, 0, 5, 0, 5, 0,...
. . . .	. . . .

Für $\lambda = 5$, $\mu = 3$ beispielsweise hat man

$$a_{53} . \alpha' + a'_{36} = a'_{35}\, \alpha + a_{54},$$

das ist:

$$1.6 + 2 = 0.10 + 8.$$

Für $\lambda = 3$, $\mu = 2$ folgt ähnlich

$$a_{32}\, \alpha' + a'_{24} = a'_{23} . \alpha + a_{33} \quad \text{oder} \quad 4.6 + 1 = 2.10 + 5, \text{ u. s. w.}$$

§ 4.

Es möge jetzt $z = z_0$ eine im Systeme α dargestellte beliebige (ganze, gebrochene oder irrationale) reelle positive Zahl bedeuten, derart, dass

$$z = z_0 = \cdots + a_{-2,1}\, \alpha^2 + a_{-1,1}\, \alpha^1 + a_{0,1}\, \alpha^0 + a_{1,1}\, \alpha^{-1} + a_{2,1}\, \alpha^{-2} + \cdots,$$

wofür wir abkürzend schreiben wollen

$$z = z_0 = (\cdots a_{-2,1}\, a_{-1,1}\, a_{0,1},\ a_{1,1}\, a_{2,1}\, a_{3,1} \cdots)_\alpha.$$

Wird z mit der beliebigen (von 1 verschiedenen) positiven ganzen Zahl α' multiplicirt, so geht diese Multiplication dem folgenden Algorithmus gemäss vor sich:

$$a_{\lambda 1}\, \alpha' + a'_{1, \lambda+1} = a'_{1\lambda}\, \alpha + a_{\lambda 2}{}^{**} \qquad (\lambda = \cdots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots).$$

Dabei bedeuten die $a_{\lambda 2}$ die Ziffern des im Systeme α dargestellten Productes $z_1 = \alpha' z$. Die $a'_{1\lambda}$ sind gewisse positive ganze Zahlen $< \alpha'$.

* Durch den beigefügten Strich ist die Periode kenntlich gemacht.

** Multiplicirt man nämlich eine Zahl

$$z = (\ldots a_{-2} a_{-1} a_0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots)_\alpha$$

mit der beliebigen positiven ganzen Zahl m, und ist

$$m z = (\ldots b_{-2} b_{-1} b_0,\ b_1 b_2 b_3 \ldots)_\alpha,$$

so hängen die Ziffern a_λ und b_λ durch die Gleichung zusammen

$$a_\lambda m + a'_{\lambda+1} = a'_\lambda \alpha + b_\lambda \quad (\lambda = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots).$$

Es ist dies derselbe bekannte Algorithmus, der beim gewöhnlichen Rechnen im Decimalsystem sowohl beim Multipliciren als Dividiren in Anwendung kommt.

Multiplicirt man

$$z_1 = \alpha' z = (\ldots a_{-2,2} a_{-1,2} a_{0,2},\ a_{12} a_{22} a_{32} \ldots)_\alpha$$

gleichfalls mit α', so ergiebt sich

$$z_2 = \alpha'^2 z = (\ldots a_{-2,3} a_{-1,3} a_{03},\ a_{13} a_{23} a_{33} \ldots)_\alpha,$$

wo die $a_{\lambda 3}$ mit den $a_{\lambda 2}$ durch den Algorithmus verbunden sind:

$$a_{\lambda 2} \alpha' + a'_{2,\lambda+1} = a'_{2\lambda} \alpha + a_{\lambda 3} (\lambda = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,\ a'_{2\lambda} < \alpha').$$

In dieser Weise fortfahrend, gelangt man zu der allgemeinen Gleichung

$$z_{\mu-1} = \alpha'^{\mu-1} z = (\ldots a_{-2,\mu} a_{-1,\mu} a_{0\mu},\ a_{1\mu} a_{2\mu} a_{3\mu} \ldots)_\alpha \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

und dem allgemeinen Algorithmus

$$14)\qquad a_{\lambda\mu} \alpha' + a'_{\mu,\lambda+1} = a'_{\mu\lambda} \alpha + a_{\lambda,\mu+1}, \text{ oder}$$

$$14\text{a})\qquad a_{\lambda\mu} \alpha' - a_{\lambda,\mu+1} = a'_{\mu\lambda} \alpha - a'_{\mu,\lambda+1},$$

giltig für $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ und $\lambda = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Dieser Algorithmus stimmt der Form nach genau mit dem in § 2 [Gleichungen 11) und 11a)] für die Ziffern eines echten Bruches gegebenen überein und stellt die Verallgemeinerung desselben für beliebige Zahlen dar.

Aus Gleichung 14) folgt, wenn m eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet:

$$\begin{array}{l|l}
a_{\lambda\mu} \alpha' + a'_{\mu,\lambda+1} = a'_{\mu\lambda} \alpha + a_{\lambda,\mu+1} & \alpha'^{m-1} \\
a_{\lambda,\mu+1} \alpha' + a'_{\mu+1,\lambda+1} = a'_{\mu+1,\lambda} \alpha + a_{\lambda,\mu+2} & \alpha'^{m-2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & . \\
a_{\lambda,\mu+m-2} \alpha' + a'_{\mu+m-2,\lambda+1} = a'_{\mu+m-2,\lambda} \alpha + a_{\lambda,\mu+m-1} & \alpha' \\
a_{\lambda,\mu+m-1} \alpha' + a'_{\mu+m-1,\lambda+1} = a'_{\mu+m-1,\lambda} \alpha + a_{\lambda,\mu+m} & 1.
\end{array}$$

Componirt man hierin, wie danebenstehend angedeutet, so ergiebt sich

$$a_{\lambda\mu} \alpha'^m + (a'_{\mu,\lambda+1} a'_{\mu+1,\lambda+1} \ldots a'_{\mu+m-1,\lambda+1})_{\alpha'}$$
$$= \alpha . (a'_{\mu\lambda} a'_{\mu+1,\lambda} \ldots a'_{\mu+m-1,\lambda})_{\alpha'} + a_{\lambda,\mu+m}.$$

Wir wollen zur Abkürzung

$$A'_\lambda = (a'_{\mu\lambda} a'_{\mu+1,\lambda} \ldots a'_{\mu+m-1,\lambda})_{\alpha'}$$

einführen; dann lässt sich letztere Gleichung schreiben:

$$a_{\lambda\mu} \alpha'^m + A'_{\lambda+1} = A'_\lambda \alpha + a_{\lambda,\mu+m}.$$

Wenn man darin für λ der Reihe nach die Werthe $\lambda, \lambda+1, \ldots, \lambda+l-2, \lambda+l-1$ setzt, wobei unter l eine beliebige positive ganze Zahl verstanden wird, so folgt

$$\begin{array}{l|l}
a_{\lambda\mu} \alpha'^m + A'_{\lambda+1} = A'_\lambda \alpha + a_{\lambda,\mu+m} & \alpha^{l-1} \\
a_{\lambda+1,\mu} \alpha'^m + A'_{\lambda+2} = A'_{\lambda+1} \alpha + a_{\lambda+1,\mu+m} & \alpha^{l-2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & . \\
a_{\lambda+l-2,\mu} \alpha'^m + A'_{\lambda+l-1} = A'_{\lambda+l-2} \alpha + a_{\lambda+l-2,\mu+m} & \alpha \\
a_{\lambda+l-1,\mu} \alpha'^m + A'_{\lambda+l} = A'_{\lambda+l-1} \alpha + a_{\lambda+l-1,\mu+m} & 1.
\end{array}$$

Componirt man wieder in nebenstehend näher bezeichneter Weise, so kommt

$$\alpha'^m (a_{\lambda\mu} a_{\lambda+1,\mu} \ldots a_{\lambda+l-1,\mu})_\alpha + A'_{\lambda+l} = A'_\lambda \alpha^l + (a_{\lambda,\mu+m} a_{\lambda+1,\mu+m} \ldots a_{\lambda+l-1,\mu+m})_\alpha.^*$$

Durch Division mit $\alpha^l \alpha'^m$ ergiebt sich hieraus

$$(0,\ a_{\lambda\mu} a_{\lambda+1,\mu} \ldots a_{\lambda+l-1,\mu})_\alpha + \frac{1}{\alpha^l}(0,\ a'_{\mu,\lambda+l} a'_{\mu+1,\lambda+l} \ldots a'_{\mu+m-1,\lambda+l})_{\alpha'}$$

$$= (0,\ a'_{\mu\lambda} a'_{\mu+1,\lambda} \ldots a'_{\mu+m-1,\lambda})_{\alpha'} + \frac{1}{\alpha'^m}(0, a_{\lambda,\mu+m} a_{\lambda+1,\mu+m} \ldots a_{\lambda+l-1,\mu+m})_\alpha.$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, dass mit einem Fehler $< abs\left(\frac{1}{\alpha^l} - \frac{1}{\alpha'^m}\right)$

$$(0,\ a_{\lambda\mu} a_{\lambda+1,\mu} \ldots a_{\lambda+l-1,\mu})_\alpha = (0,\ a'_{\mu\lambda} a'_{\mu+1,\lambda} \ldots a'_{\mu+m-1,\lambda})_{\alpha'}$$

gesetzt werden darf. Wählt man l und m unendlich gross, so ist mit verschwindend kleinem Fehler

$$15)\qquad (0,\ a_{\lambda\mu} a_{\lambda+1,\mu} a_{\lambda+2,\mu} \ldots)_\alpha = (0,\ a'_{\mu\lambda} a'_{\mu+1,\lambda} a'_{\mu+2,\lambda} \ldots)_{\alpha'},$$

giltig für alle positiven ganzen Werthe von μ und alle positiven und negativen ganzen Werthe von λ.

§ 5.

Dividirt man z durch α' und bezeichnet den Quotienten

$$\frac{z}{\alpha'} = z_{-1} = (\ldots a_{-2,0} a_{-1,0} a_{00},\ a_{10} a_{20} a_{30} \ldots)_\alpha,$$

so geht (da $z = \alpha' z_{-1}$) die Division (nach dem Voranstehenden) dem folgenden Algorithmus gemäss vor sich:

$$a_{\lambda 0} \alpha' + a'_{0,\lambda+1} = a'_{0\lambda} \alpha + a_{\lambda 1} \quad (\lambda = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

worin die $a'_{0\lambda}$ gewisse positive ganze Zahlen $< \alpha'$ vorstellen. Durch wiederholte Division wird man auf die allgemeine Gleichung

$$\frac{z}{\alpha'^{\mu+1}} = z_{-\mu-1} = (\ldots a_{-2,-\mu} a_{-1,-\mu} a_{0,-\mu},\ a_{1,-\mu} a_{2,-\mu} a_{3,-\mu} \ldots)_\alpha$$

und den entsprechenden allgemeinen Algorithmus

$$16)\qquad a_{\lambda,-\mu} \alpha' + a'_{-\mu,\lambda+1} = a'_{-\mu,\lambda} \alpha + a_{\lambda,-\mu+1}$$
$$(\lambda = -\infty \cdots +\infty;\ \mu = 0, -1, -2, \ldots)$$

geführt. Dieser Algorithmus stellt die Erweiterung des Algorithmus 14) auf negative Werthe von μ und $\mu = 0$ dar. Gleichung 15) muss demnach auch für negative Werthe von μ und $\mu = 0$ Giltigkeit haben.

---

* Führt man ein

$$A_{\lambda\mu} = (a_{\lambda\mu} a_{\lambda+1,\mu} \ldots a_{\lambda+l-1,\mu})_\alpha,\ A'_{\mu\lambda} = (a'_{\mu\lambda} a'_{\mu+1,\lambda} \ldots a'_{\mu+m-1,\lambda})_{\alpha'},$$

so schreibt sich diese Gleichung

$$\alpha'^m A_{\lambda\mu} + A'_{\mu,\lambda+l} = \alpha^l A'_{\mu\lambda} + A_{\lambda,\mu+m}.$$

Dieselbe ist eine Erweiterung von 11a), in welche sie übergeht, wenn $l = m = 1$ gesetzt wird.

Wenn (wie wir vorläufig annehmen) z eine endliche Zahl vorstellt, so giebt es für jeden positiven und negativen ganzen Werth von λ einen gewissen (positiven oder negativen) Werth von μ, etwa $\mu = -q$, von der Beschaffenheit, dass $a_{\lambda\mu} = 0$ für alle ganzen Werthe von μ, von $\mu = -q$ bis $\mu = -\infty$. Componirt man nun in dem Systeme

$$\begin{array}{ll|l}
a_{\lambda,\mu-1}\alpha' + a'_{\mu-1,\lambda+1} & = a'_{\mu-1,\lambda}\alpha + a_{\lambda\mu} & 1 \\
a_{\lambda,\mu-2}\alpha' + a'_{\mu-2,\lambda+1} & = a'_{\mu-2,\lambda}\alpha + a_{\lambda,\mu-1} & \alpha' \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & . \\
a_{\lambda 0}\alpha' + a'_{0,\lambda+1} & = a'_{0\lambda}\alpha + a_{\lambda 1} & \alpha'^{\mu-1} \\
a_{\lambda,-1}\alpha' + a'_{-1,\lambda+1} & = a'_{-1,\lambda}\alpha + a_{\lambda 0} & \alpha'^{\mu} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & . \\
0 + a'_{-q,\lambda+1} & = a'_{-q,\lambda}\alpha + a_{\lambda,-q+1} & \alpha'^{\mu+q-1}
\end{array}$$

in nebenstehend näher bezeichneter Weise, so ergiebt sich die Gleichung:

$$a_{\lambda\mu} + \alpha(\ldots a'_{-2,\lambda} a'_{-1,\lambda} a'_{0\lambda} a'_{1\lambda} \ldots a'_{\mu-1,\lambda})_{\alpha'}$$
$$= (\ldots a'_{-2,\lambda+1} a'_{-1,\lambda+1} a'_{0,\lambda+1} a'_{1,\lambda+1} \ldots a'_{\mu-1,\lambda+1})_{\alpha'}.$$

Bezeichnet man kurz

$$A'_{\lambda} = (\ldots a'_{-2,\lambda} a'_{-1,\lambda} a'_{0\lambda} a'_{1\lambda} a'_{2\lambda} \ldots a'_{\mu-1,\lambda})_{\alpha'},$$

so lässt sich letztere Gleichung schreiben:

17) $$a_{\lambda\mu} + \alpha A'_{\lambda} = A'_{\lambda+1}.$$

Von einem gewissen (positiven oder negativen) Werthe von λ ab, etwa $\lambda = -p$, ist $a'_{\mu\lambda} = 0$ für alle Werthe von μ, von $(\mu - 1)$ bis $-\infty$. Infolge dessen werden auch alle entsprechenden A'_{λ} gleich Null. Setzt man daher in 17) für λ der Reihe nach die Werthe $\lambda - 1$, $\lambda - 2, \ldots, -p$, so erhält man das System

$$\begin{array}{lll|l}
a_{\lambda-1,\mu} & + \alpha A'_{\lambda-1} & = A'_{\lambda} & 1 \\
a_{\lambda-2,\mu} & + \alpha A'_{\lambda-2} & = A'_{\lambda-1} & \alpha \\
\ldots & \ldots & \ldots & . \\
a_{0\mu} & + \alpha A'_{0} & = A'_{1} & \alpha^{\lambda-1} \\
a_{-1,\mu} & + \alpha A'_{-1} & = A'_{0} & \alpha^{\lambda} \\
\ldots & \ldots & \ldots & . \\
a_{-p,\mu} & + \quad 0 & = A'_{-p+1} & \alpha^{\lambda+p-1}.
\end{array}$$

Wenn man wieder, wie neben angedeutet, componirt, so folgt:

$$(\ldots a_{-2,\mu} a_{-1,\mu} a_{0\mu} a_{1\mu} \ldots a_{\lambda-1,\mu})_{\alpha} = A'_{\lambda},$$

oder

18) $$(\ldots a_{-2,\mu} a_{-1,\mu} a_{0\mu} a_{1\mu} \ldots a_{\lambda-1,\mu})_{\alpha} = (\ldots a'_{-2,\lambda} a'_{-1,\lambda} a'_{0\lambda} a'_{1\lambda} \ldots a'_{\mu-1,\lambda})_{\alpha'}.$$

Diese Gleichung liefert, mit Gleichung 15) zusammengenommen, die allgemeine Beziehung:

19) $$(\ldots a_{-1,\mu} a_{0\mu} \ldots a_{\lambda-1,\mu},\ a_{\lambda\mu} a_{\lambda+1,\mu} \ldots)_{\alpha}$$
$$= (\ldots a'_{-1,\lambda} a'_{0\lambda} \ldots a'_{\mu-1,\lambda},\ a'_{\mu\lambda} a'_{\mu+1,\lambda} \ldots)_{\alpha'},$$

giltig für alle positiven und negativen ganzen Werthe von λ und μ. Für $\lambda = 1$, $\mu = 1$ erhält man

$$z = (\ldots a_{-2,1} a_{-1,1} a_{01},\ a_{11} a_{21} \ldots)_{\alpha} = (\ldots a'_{-2,1} a'_{-1,1} a'_{01},\ a'_{11} a'_{21} \ldots)_{\alpha'}.$$

Bezeichnet man nach Analogie der im § 2 getroffenen Festsetzungen die Gesammtheit der Zahlen $a_{\lambda\mu}$ als das System der Ziffern der im Zahlensysteme (α, α') dargestellten Zahl z, so stellen die $a'_{\lambda\mu}$ die Ziffern von z im Systeme (α', α) vor. Unter Benutzung dieser Bezeichnungsweise können wir das Voranstehende zu folgendem Satze zusammenfassen:

„Die Ziffern $a_{\lambda\mu}$ und $a'_{\lambda\mu}$ der Darstellungen einer beliebigen positiven (ganzen, gebrochenen oder irrationalen) Zahl z in den Zahlensystemen (α, α') bezw. (α', α) sind durch die Gleichung (Fundamentalgleichung) verbunden

$$a_{\lambda\mu}\alpha' - a_{\lambda,\mu+1} = a'_{\mu\lambda}\alpha - a'_{\mu,\lambda+1},$$

oder

$$a_{\lambda\mu}\alpha' + a'_{\mu,\lambda+1} = a'_{\mu\lambda}\alpha + a_{\lambda,\mu+1},$$

giltig für alle (positiven und negativen) ganzen Werthe von λ und μ."

Die Fundamentalgleichung lehrt, eine beliebige Zahl z aus dem Zahlensysteme (α, α') in das System (α', α) zu transformiren.

Die Elemente $a_{\lambda\mu}$ (ebenso die $a'_{\lambda\mu}$) können zu folgendem Systeme angeordnet werden:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\dots a_{-1,-1} & a_{0,-1} & \mathbf{a}_{1,-1} & a_{2,-1} & a_{3,-1} & \dots \\
\dots a_{-1,0} & a_{00} & \mathbf{a}_{10} & a_{20} & a_{30} & \dots \\
\dots \mathbf{a}_{-1,1} & \mathbf{a}_{01} & \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{31} & \dots \\
\dots a_{-1,2} & a_{02} & \mathbf{a}_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots \\
\dots a_{-1,3} & a_{03} & \mathbf{a}_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Beispiel. Es sei $\alpha = 10$, $\alpha' = 6$ und

$$z = 104{,}601739176.$$

Alsdann hat man die nachstehenden Systeme:

System der $a_{\lambda\mu}$:

$\lambda =$	...	−2	−1	0	1	2	3	4	...
μ = ⋮	...	.	.	.	.	.	.	.	...
−2	...	0	0	2	9	0	5	6	...
−1	...	0	1	7	4	3	3	6	..
0	...	1	0	4	6	0	1	7	..
1	...	6	2	7	6	1	0	4	...
2	...	7	6	5	6	6	2	6	...
3	...	5	9	3	9	7	5	6	...
4	...	5	6	3	8	5	3	9	...
.	...	.	.	.	.	.	.	.	...

System der $a'_{\lambda\mu}$:

$\lambda =$	...	−2	−1	0	1	2	3	4	...
μ = ⋮	..	.	.	.	.	.	.	.	...
−2	...	0	0	0	3	4	3	3	...
−1	...	0	1	0	1	3	5	3	..
0	...	1	4	2	4	3	2	2	...
1	...	5	2	3	3	3	5	5	...
2	...	0	2	0	0	3	4	3	...
3	...	3	2	1	0	1	3	2	...
4	...	3	3	4	2	3	3	5	...
.	...	...	.	.	.	.	.	.	...

Für $\lambda = 0$, $\mu = 1$ hat man beispielsweise:

$$(62{,}76104\dots)_{10} = (142{,}4322\dots)_6 .$$

II.

Zugeordnete Systeme.

§ 6.

Wir gehen wieder von dem echten Bruche

$$\frac{z}{k}=\frac{r_{11}}{k}=\frac{r'_{11}}{k}=(0,\ a_{11}a_{21}a_{31}\ldots)_\alpha=(0,\ a'_{11}a'_{21}a'_{31}\ldots)_{\alpha'}$$

aus, den wir als irreduzibel voraussetzen können. Wie im vorigen Abschnitte näher ausgeführt wurde, lassen sich sodann die folgenden Systeme aufstellen:

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}a_{21}a_{31}\cdots \\ a_{12}a_{22}a_{32}\cdots \\ a_{13}a_{23}a_{33}\cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} a'_{11}a'_{21}a'_{31}\cdots \\ a'_{12}a'_{22}a'_{32}\cdots \\ a'_{13}a'_{23}a'_{33}\cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} r_{11}r_{21}r_{31}\cdots \\ r_{12}r_{22}r_{32}\cdots \\ r_{13}r_{23}r_{33}\cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} r'_{11}r'_{21}r'_{31}\cdots \\ r'_{12}r'_{22}r'_{32}\cdots \\ r'_{13}r'_{23}r'_{33}\cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}\right.$$

deren Elemente bezw. durch die Gleichungen verbunden sind:

$$1)\qquad a_{\lambda\mu}\alpha'-a_{\lambda,\mu+1}=a'_{\mu\lambda}\alpha-a'_{\mu,\lambda+1},$$

$$2)\qquad r_{\lambda\mu}=r'_{\mu\lambda},$$

$$3)\qquad \frac{r_{\lambda\mu}}{k}=\frac{r'_{\mu\lambda}}{k}=(0,\ a_{\lambda\mu}a_{\lambda+1,\mu}a_{\lambda+2,\mu}\cdots)_\alpha=(0,\ a'_{\mu\lambda}a'_{\mu+1,\lambda}a'_{\mu+2,\lambda}\ldots)_{\alpha'},$$

$$4)\qquad r_{\lambda\mu}\alpha-r_{\lambda+1,\mu}=a_{\lambda\mu}k,$$

$$5)\qquad r'_{\mu\lambda}\alpha'-r'_{\mu+1,\lambda}=a'_{\mu\lambda}k,$$

giltig für alle positiven ganzen Werthe von λ und μ. Legen wir nun in diesem Abschnitte unseren Entwickelungen die ganz specielle* Annahme

$$6)\qquad a_{\lambda\mu}=a_{\lambda+1,\mu+1}\qquad(\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

zu Grunde, die Zulässigkeit derselben vorausgesetzt, so folgt aus Gleichung 1), wenn darin $\lambda+1$ für λ und $\mu+1$ für μ gesetzt wird:

$$a_{\lambda+1,\mu+1}\alpha'-a_{\lambda+1,\mu+2}=a'_{\mu+1,\lambda+1}\alpha-a'_{\mu+1,\lambda+2}.$$

Durch Subtraction dieser Gleichung von 1) erhält man:

$$(a_{\lambda\mu}-a_{\lambda+1,\mu+1})\,\alpha'-(a_{\lambda,\mu+1}-a_{\lambda+1,\mu+2})$$
$$=(a'_{\mu\lambda}-a'_{\mu+1,\lambda+1})\,\alpha-(a'_{\mu,\lambda+1}-a'_{\mu+1,\lambda+2}).$$

Nach 6) ist die linke Seite Null; man hat daher

$$(a'_{\mu\lambda}-a'_{\mu+1,\lambda+1})\,\alpha-(a'_{\mu,\lambda+1}-a'_{\mu+1,\lambda+2})=0.$$

Setzt man hierin für λ der Reihe nach die Werthe λ, $\lambda+1$, $\lambda+2$, $\ldots,\lambda+l-1$ ein und multiplicirt die so erhaltenen Gleichungen mit bezw. α^{l-1}, $\alpha^{l-2},\ldots,\alpha$, 1, wo l eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, so erhält man durch Addiren:

$$(a'_{\mu\lambda}-a'_{\mu+1,\lambda+1})\,\alpha^l-(a'_{\mu,\lambda+l}-a'_{\mu+1,\lambda+l+1})=0\quad(l=1,2,3,\ldots).$$

---

* In allgemeinerer Weise werden wir diesen Gegenstand im folgenden Abschnitte behandeln.

Hieraus folgt, dass der Ausdruck $(a'_{\mu,\lambda+l} - a'_{\mu+1,\lambda+l+1})$ durch α^l theilbar sein muss. Da aber die Grössen $a'_{\mu,\lambda+l}$ und $a'_{\mu+1,\lambda+l+1}$ beide $< \alpha'$ sind und α^l stets $> \alpha'$ gemacht werden kann, so ist die Gleichung nur möglich, wenn

7) $$a'_{\mu\lambda} = a'_{\mu+1,\lambda+1} \qquad (\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Nach 4) ist weiter

$$r_{\lambda\mu}\alpha - r_{\lambda+1,\mu} = a_{\lambda\mu}k.$$

Führt man hierin $\lambda+1$ und $\mu+1$ für bezw. λ und μ ein, so folgt:

$$r_{\lambda+1,\mu+1}\alpha - r_{\lambda+2,\mu+1} = a_{\lambda+1,\mu+1}k.$$

Die Subtraction dieser Gleichung von der vorigen ergiebt

$$(r_{\lambda\mu} - r_{\lambda+1,\mu+1})\alpha - (r_{\lambda+1,\mu} - r_{\lambda+2,\mu+1}) = (a_{\lambda\mu} - a_{\lambda+1,\mu+1})k = 0.$$

Durch ein dem soeben angewandten genau analoges Verfahren erhält man daraus:

8) $$r_{\lambda\mu} = r_{\lambda+1,\mu+1},\quad r'_{\mu\lambda} = r'_{\mu+1,\lambda+1} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

§ 7.

Betrachten wir weiter die Gleichung

$$r_{\lambda\mu}\alpha - r_{\lambda+1,\mu} = a_{\lambda\mu}k,$$

so folgt aus Gleichung 3) des vorigen Abschnittes (§ 1):

9) $$r_{\lambda\mu} = r_{1\mu}\alpha^{\lambda-1} - k\,(a_{1\mu}a_{2\mu}\ldots a_{\lambda-1,\mu})_\alpha.$$

Vermöge Gleichung 2) dieses Abschnittes darf für $r_{1\mu}$ auch $r'_{\mu 1}$ gesetzt werden, wodurch 9) übergeht in

$$r_{\lambda\mu} = r'_{\mu 1}\alpha^{\lambda-1} - k\,(a_{1\mu}a_{2\mu}\ldots a_{\lambda-1,\mu})_\alpha.$$

Infolge der bereits erwähnten Beziehung des vorigen Abschnittes ist

$$r'_{\mu 1} = r'_{11}\alpha'^{\mu-1} - k\,(a'_{11}a'_{21}\ldots a'_{\mu-1,1})_{\alpha'} = z\alpha'^{\mu-1} - k\,(a'_{11}a'_{21}\ldots a'_{\mu-1,1})_\alpha;$$

dies in die vorhergehende Gleichung eingeführt, giebt

10) $$r_{\lambda\mu} = z\alpha^{\lambda-1}\alpha'^{\mu-1} - k\,[\alpha^{\lambda-1}(a'_{11}a'_{21}\ldots a'_{\mu-1,1})_{\alpha'} + (a_{1\mu}a_{2\mu}\ldots a_{\lambda-1,\mu})_\alpha],$$

welche Gleichung für alle positiven ganzen Werthe von λ und μ Giltigkeit hat. Für $\lambda = 2$, $\mu = 2$ nimmt sie die Gestalt an:

$$r_{22} = z\alpha\alpha' - k\,(\alpha a'_{11} + a_{12}).$$

Aus 8) folgt aber $r_{22} = r_{11} = z$. Dies berücksichtigt, erhält man:

11) $$z(\alpha\alpha' - 1) = k\,(\alpha a'_{11} + a_{12}).$$

Da wir z als prim zu k vorausgesetzt haben*, so muss der Ausdruck $(\alpha a'_{11} + a_{12})$ durch z theilbar sein. Es sei

12) $$\alpha a'_{11} + a_{12} = uz.$$

Alsdann verwandelt sich Gleichung 11) in

13) $$\alpha\alpha' - 1 = uk.$$

---

* Diese Voraussetzung braucht übrigens nicht gemacht zu werden. Die Gleichungen 12) und 13), sowie der unten zu entwickelnde Algorithmus gelten auch, wenn $\frac{z}{k}$ reducibel ist. Auf diesen Punkt werden wir später zurückkommen.

Es ist demnach die Beziehung 13) eine nothwendige Folge der Annahme $a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+1,\mu+1}$. Umgekehrt lässt sich leicht nachweisen, dass Gleichung 13) auch stets die Relationen

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+1,\mu+1}, \quad a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+1,\mu+1}, \quad r_{\lambda\mu} = r_{\lambda+1,\mu+1}, \quad r'_{\lambda\mu} = r'_{\lambda+1,\mu+1} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

nach sich zieht. Zu dem Zwecke beachten wir, dass nach 10)

$$r_{\lambda\lambda} = z\,(\alpha\alpha')^{\lambda-1} - kA \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo A eine gewisse ganze Zahl bedeutet. Trägt man in diese Gleichung den Werth $(1 + uk)$, der sich aus 13) für $\alpha\alpha'$ ergiebt, ein, so verwandelt sie sich in

$$r_{\lambda\lambda} = z\,(1 + Bk) - Ak,$$

wo B ebenfalls eine gewisse ganze Zahl vorstellt. Aus letzterer Gleichung folgt, dass der Ausdruck $(r_{\lambda\lambda} - z)$ durch k theilbar sein muss. Da die Grössen $r_{\lambda\lambda}$ und $z = r_{11}$ beide $< k$ sind, so ist dies nur möglich, wenn

$$r_{\lambda\lambda} = r_{11} \text{ oder } r_{\lambda\lambda} = r_{\lambda+1,\lambda+1} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nun liefert aber Gleichung 2) des vorigen Abschnittes, auf Gleichung 4) des § 6 angewandt, die Beziehung

$$r_{\mu\lambda} = r_{\lambda\lambda}\,\alpha^{\mu-\lambda} - (a_{\lambda\lambda}\, a_{\lambda+1,\lambda} \ldots a_{\mu-2,\lambda}\, a_{\mu-1,\lambda})_{\alpha} \cdot k.$$

Setzt man hierin $\lambda + 1$ und $\mu + 1$ an die Stelle von bezw. λ und μ, so ergiebt sich durch Subtraction der so entstandenen Gleichung von der ursprünglichen:

$$r_{\mu\lambda} - r_{\mu+1,\lambda+1} = \alpha^{\mu-\lambda}\,(r_{\lambda\lambda} - r_{\lambda+1,\lambda+1}) + Ck = Ck,$$

wo C eine gewisse ganze Zahl bedeutet. Es muss demnach, da sowohl $r_{\mu\lambda}$ als $r_{\mu+1,\lambda+1} < k$,

$$r_{\mu\lambda} = r_{\mu+1,\lambda+1} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

sein. Aus dieser Gleichung folgt weiter, ähnlich wie oben,

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+1,\mu+1}, \quad a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+1,\mu+1}, \quad r'_{\lambda\mu} = r'_{\lambda+1,\mu+1} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir dürfen demnach sagen:

„Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Gleichung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+1,\mu+1} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist das Bestehen der Beziehung

$$\alpha\alpha' - 1 = uk,$$

wo u eine positive ganze Zahl ($< \alpha$, wenn $\alpha' < k$) bedeutet."

Die letztere Gleichung lässt erkennen, dass die Grundzahlen α und α' relativ prim zu k sein müssen, und dass für jeden beliebigen Werth von k stets Werthepaare $[\alpha, \alpha']$* existiren, die ihr Genüge leisten.

---

* Ihre Anzahl beträgt $\left[\frac{1}{2}\varphi(k) - 1\right]$, wenn von den Werthen 1 und $(k-1)$ abgesehen wird.

Wir wollen zwei Zahlen α und α', die der Gleichung

$$\alpha\alpha' - 1 = uk^*$$

genügen, einander in Bezug auf k zugeordnete** Zahlen nennen. Desgleichen sollen unter derselben Voraussetzung die Zahlensysteme (α, α') und (α', α), sowie die entsprechenden Systeme der $a_{\lambda\mu}$ und $a'_{\lambda\mu}$, $r_{\lambda\mu}$ und $r'_{\lambda\mu}$ zugeordnete Systeme bezüglich k genannt werden.

§ 8.

Aus dem Umstande, dass α und α' prim zu k sind, folgt bekanntlich, dass der Bruch $\frac{z}{k}$ bei der Darstellung in den Systemen α und α' reine Perioden liefert. Nun sind die Elemente $a_{\lambda\mu}$ und $a'_{\lambda\mu}$ (desgl. $r_{\lambda\mu}$ und $r'_{\lambda\mu}$) in zweifacher Hinsicht periodisch; nämlich in Bezug auf λ und auf μ. Diese „doppelte Periodicität" wird, wenn l die Anzahl der Ziffern der Periode von $\frac{z}{k}$ im Systeme α und m diejenige im Systeme α' bedeutet, durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$14)\quad \begin{cases} a_{\lambda+l,\mu} = a_{\lambda,\mu+m} = a_{\lambda\mu} \\ a'_{\lambda+m,\mu} = a'_{\lambda,\mu+l} = a'_{\lambda\mu} \end{cases} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Für den Fall, dass (α, α') und (α', α) zugeordnete Systeme (bezw. α und α' zugeordnete Zahlen) sind, muss, wie sich leicht nachweisen lässt, $l = m$ sein. Es ist nämlich:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+1,\mu+1} = a_{\lambda+2,\mu+2} = \ldots,$$

oder

$$15)\quad a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+\nu,\mu+\nu} \quad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ebenso ergiebt sich

$$16)\quad a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda+\nu,\mu+\nu} \quad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Setzt man in 15) für ν nach einander die Werthe l und m ein, so ergeben sich mit Rücksicht auf 14) die Gleichungen:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda,\mu+l} \text{ und } a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+m,\mu}.$$

Hieraus folgt, dass sowohl l ein Vielfaches von m, als auch m ein Vielfaches von l sein muss. Dies ist aber nur möglich, wenn $l = m$ ist.

Für $\nu = m - \mu + 1$ erhält man aus 15) und 16):

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda-\mu+1,1}, \quad a'_{\lambda\mu} = a'_{\lambda-\mu+1,1}{}^{***}.$$

Bei Berücksichtigung dieser Beziehungen nimmt die Fundamentalgleichung die folgende Gestalt an:

---

* Oder der Congruenz $\alpha\alpha' \equiv 1 \pmod{k}$.

** Associirt nach Euler; Gauss, disq. arithm. 77.

*** Soweit bei dieser Schreibweise in dieser und den folgenden Gleichungen dieses Abschnittes die Indices negative Werthe annehmen, hat man sich entsprechende Vielfache von l $(= m)$ hinzugezählt zu denken, welche sie positiv machen.

$$a_{\lambda-\mu+1,1}\,\alpha' - a_{\lambda-\mu,1} = a'_{\mu-\lambda+1,1}\,\alpha - a'_{\mu-\lambda,1},$$

oder

17) $$a_{\lambda-\mu+1,1}\,\alpha' + a'_{\mu-\lambda,1} = a'_{\mu-\lambda+1,1}\,\alpha + a_{\lambda-\mu,1},$$

giltig für $\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ 3,\ldots$

Die $a_{11},\ a_{21},\ a_{31},\ldots$ sind die Ziffern des im Systeme α dargestellten Bruches $\frac{r_{11}}{k} = \frac{z}{k}$ und die $a'_{11},\ a'_{21},\ a'_{31},\ldots$ die Ziffern desselben Bruches im Systeme α'. Unterdrückt man der Einfachheit wegen die zweiten Indices in Gleichung 17) und setzt gleichzeitig $\mu = m$, so folgt

18) $$a_{\lambda+1}\alpha' + a'_{m-\lambda} = a'_{m-\lambda+1}\alpha + a_\lambda{}^* \quad (\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Gleichung 18) kann als der Ausdruck für die Gesetzmässigkeit betrachtet werden, nach welcher die Ziffern des im Systeme α (bezw. α') dargestellten Bruches auf einander folgen.

Führt man in 18) für λ der Reihe nach die Werthe $m, m-1, m-2,\ldots, 2, 1$ ein, so gelangt man zu dem folgenden Systeme von Gleichungen:

19) $$\begin{cases} a_1\alpha' + a'_m = a'_1\alpha + a_m \\ a_m\alpha' + a'_1 = a'_2\alpha + a_{m-1} \\ a_{m-1}\alpha' + a'_2 = a'_3\alpha + a_{m-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_3\alpha' + a'_{m-2} = a'_{m-1}\alpha + a_2 \\ a_2\alpha' + a'_{m-1} = a'_m\alpha + a_1. \end{cases}$$

Ausserdem haben wir noch zur Bestimmung der Grössen $u,\ \alpha',\ a'_1$ und a_m die Gleichungen

$$\alpha\alpha' - 1 = uk \quad \text{und} \quad \alpha a'_{11} + a_{12} = uz$$

zu berücksichtigen. Für letztere kann man, vermöge der Beziehung $a_{\lambda\mu} = a_{\lambda+1,\mu+1}$, auch schreiben:

$$\alpha a'_{11} + a_{1+m,2} = \alpha a'_{11} + a_{m1} = uz,$$

oder

20) $$\alpha a'_1 + a_m = uz.$$

Diese Gleichungen reichen in Verbindung mit dem Systeme 19) vollständig zur successiven Berechnung der Ziffern des im Systeme α (bezw. α') darzustellenden Bruches $\frac{z}{k}$ aus. Wenn nämlich $\frac{z}{k}$ und α gegeben sind, so liefert die Gleichung $\alpha\alpha' - 1 = uk$ (in welcher wir stets $\alpha' < k$ voraussetzen können) die zugehörigen Werthe für u und α' (und zwar bei der gemachten Voraussetzung $u < \alpha$). Die Gleichung $uz = a'_1\alpha + a_m$ ergiebt sodann ohne Weiteres die Ziffern a'_1 und a_m. Mit Hilfe der letzteren und des Algorithmus 19) kann man schliesslich die Ziffern $a_{m-1},\ a_{m-2},\ldots, a_2, a_1$ der Reihe nach erhalten.

---

* Es könnte noch die Frage aufgeworfen werden, ob nicht dadurch, dass man für μ einen beliebigen anderen Werth setzt, ein von diesem wesentlich verschiedener Algorithmus hervorgebracht werden kann. Diese Frage, welche unbedingt verneint werden muss, wird in dem folgenden Abschnitte bei Behandlung des allgemeinen Falles ihre Erledigung finden.

Wir gelangen somit zu dem folgenden Ergebniss:

„Wenn α und α' einander in Bezug auf k zugeordnete Zahlen sind, so besitzen die Perioden der Darstellungen des (echten) Bruches $\frac{z}{k}$ in den Zahlensystemen α und α' gleichviel (m) Stellen; die Ziffern $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezw. $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ dieses Bruches gehorchen dem Algorithmus

$$a_{\lambda+1}\alpha' + a'_{m-\lambda} = a'_{m-\lambda+1}\alpha + a_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Zur successiven Berechnung derselben dienen neben dem erwähnten Algorithmus die Gleichungen

$$\alpha\alpha' - 1 = uk, \quad \alpha a'_1 + a_m = uz^*.“$$

§ 9.

Zur Erläuterung der im vorigen Paragraphen gegebenen Entwickelungen mögen die folgenden Beispiele dienen:

1. Beispiel. Es sei der Bruch $\frac{6}{17}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, d. h. im Systeme 10 darzustellen. Man hat in diesem Falle $k = 17$, $z = 6$, $\alpha = 10$; u und α' berechnen sich aus der Gleichung

$$u.17 = 10\alpha' - 1,$$

woraus sofort geschlossen wird**

$$u = 7, \quad \alpha' = 12.$$

Wir haben sodann zur Berechnung der Ziffern das nachstehende System von Gleichungen:

$6.7 = 4.10 + 2$	$6.12 + 5 = 7.10 + 7$
$2.12 + 4 = 2.10 + 8$	$7.12 + 7 = 9.10 + 1$
$8.12 + 2 = 9.10 + 8$	$1.12 + 9 = 2.10 + 1$
$8.12 + 9 = 10.10 + 5$	$1.12 + 2 = 1.10 + 4$
$5.12 + 10 = 7.10 + 0$	$4.12 + 1 = 4.10 + 9$
$0.12 + 7 = 0.10 + 7$	$9.12 + 4 = 11.10 + 2$
$7.12 + 0 = 8.10 + 4$	$2.12 + 11 = 3.10 + 5$
$4.12 + 8 = 5.10 + 6$	$5.12 + 3 = 6.10 + 3.$

Hieraus ergiebt sich als Periode des Bruches $\frac{6}{17}$ im Decimalsysteme:

$$\left(\frac{6}{17}\right)_{10} = (0,3529411764705882)_{10}.$$

---

* Es verdient erwähnt zu werden, dass dieser Satz auch für $z = k$ seine Giltigkeit nicht verliert. In diesem Falle geht nämlich der Algorithmus in eine Identität und die Gleichung $\alpha a'_1 + a_m = uz$ in die Gleichung $\alpha\alpha' - 1 = uk$ über.

** Im Decimalsystem kann u bei der gemachten Voraussetzung nur eine der Ziffern 1, 3, 7, 9 sein, je nachdem nämlich die letzte Ziffer von k eine 9, 3, 7 oder 1 ist, wie k auch im Uebrigen beschaffen sein mag.

Gleichzeitig liefert uns der Algorithmus auch die Periode desselben Bruches im Duodecimalsysteme; nämlich

$$\left(\frac{6}{17}\right)_{12} = (0{,}429\overline{10}708579214\overline{11}36)_{12}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise empfiehlt sich das folgende Schema:

$$^{63}3\ ^{35}5\ ^{112}2\ ^{49}9\ ^{14}4\ ^{21}1\ ^{91}1\ ^{77}7\ ^{56}6\ ^{84}4\ ^{07}7\ ^{70}0\ ^{105}5\ ^{98}8\ ^{28}8\ ^{42}2|12,$$

bei welchem die Ziffern von rechts nach links sich an einander reihend erzeugt werden. Zur Erläuterung desselben fügen wir die nachstehende Regel bei:

„Man bestimme zuerst u; u ist im Decimalsysteme 1, 3, 7 oder 9, je nachdem die letzte Ziffer von k eine 9, 3, 7, oder 1 ist. Hierauf multiplicire man k mit u und zähle zu dem Producte 1 hinzu. Schneidet man von der so erhaltenen Zahl die Null am Ende ab, so bleibt α' übrig. Jetzt multiplicire man z mit u, schreibe die Einer des Productes als letzte Ziffer rechts an und füge die aus den übrigen Ziffern gebildete Zahl links oben als Exponenten bei. Danach multiplicire man die erwähnte letzte Ziffer mit α', zähle den Exponenten zu dem Producte, schreibe die Einer der entstandenen Zahl als vorletzte Ziffer und die aus den übrigen Ziffern gebildete Zahl als zweiten Exponenten. In dieser Weise fahre man fort, bis das ursprüngliche Product uz wiederkehrt. Dann stellen die untenstehenden Ziffern, von links nach rechts gelesen, die Periode des Bruches $\frac{z}{k}$ im Systeme α, die Exponenten dagegen, von rechts nach links gelesen, die Periode desselben Bruches im Systeme α' dar.“

Es sei bei dieser Gelegenheit gleich erwähnt, dass die Beziehung besteht:

$$a_\lambda \alpha' + a'_{m-\lambda+1} = r_\lambda . u \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dieselbe ist ein besonderer Fall eines im vierten Abschnitte zu entwickelnden allgemeinen „Productensatzes“. Sie kann jedoch auch direct mit Hilfe der Gleichungen 19) und 20) dieses Abschnittes hergeleitet werden.

Hiernach sind die oben angeschriebenen Zahlen 63, 35, 112, 49, 14, 21,... die Siebenfachen der entsprechenden Reste, welche bei der Verwandlung des Bruches $\frac{6}{17}$ in einen Decimalbruch auftreten; nämlich $63 = 9.7$, $35 = 5.7$, $112 = 16.7$, $49 = 7.7$, $14 = 2.7$, $21 = 3.7, \ldots$

Der Algorithmus 18) kann auch in eine Art von Division umgesetzt werden. Man hat zu dem Behufe nur nöthig, mit α' in uz zu dividiren und dabei, zum Unterschiede von dem gewöhnlichen Divisionsverfahren, nicht Nullen, sondern die jedesmaligen vorhergehenden Quotienten herunter zu holen. Diese Quotienten stellen dann wieder der Reihe nach die Ziffern der Periode von $\frac{z}{k}$ im Systeme α dar. Für das angeführte Beispiel ergiebt sich:

```
42 : 12 = 3 5 2 9 4 1...
36
——
 63
 60
 ——
  35
  24
  ——
  112
  108
  ———
    49
    48
    ——
     14
     12
     ——
      21
       ⋮
```

2. Beispiel. Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn $(\alpha - 1)$ die letzte Ziffer von k im Systeme α ist, k also die Form hat:

$$k = \alpha h + (\alpha - 1).$$

In diesem Falle ist

$$\alpha\,(h+1) - 1 = 1 . k, \text{ also } u = 1, \ \alpha' = h + 1.$$

Es sei z. B. der Bruch $\frac{15}{19}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, so ergiebt sich das folgende Schema $(\alpha' = 2)$:

$$^{1}7\ ^{1}8\ ^{0}9\ ^{1}4\ ^{0}7\ ^{1}3\ ^{1}6\ ^{0}8\ ^{0}4\ ^{0}2\ ^{0}1\ ^{1}0\ ^{0}5\ ^{1}2\ ^{0}6\ ^{0}3\ ^{1}1\ ^{1}5 \mid 2,$$

welches man mit der grössten Leichtigkeit aus dem Kopfe niederschreiben kann. Hier sind (weil $u = 1$) die Zahlen 17, 18, 9, 14, 7, 13,... selbst die Potenzreste.

Zum Schlusse sei noch besonders darauf hingewiesen, dass durch das oben dargelegte Verfahren jede Division, welche einen echten Bruch liefert, und deren Divisor relativ prim zur Grundzahl des betreffenden Zahlensystemes ist, auf lauter einzelne Multiplicationen zurückgeführt wird.

Mainz, December 1891.

(Fortsetzung folgt.)

XXII.

Jacob Steiner's Sätze über die Mitten der Abschnitte, welche eine Curve auf einer Geraden bestimmt.

Von

Benedict Sporer

in Stuttgart.

Die n Schnitte a, b, $c\ldots$ irgend einer Basis C^n mit irgend einer Geraden S begrenzen auf S $\frac{1}{2}n(n-1)$ Abschnitte ab, ac, ad, $\ldots bc$, $bd\ldots$ Steiner bezeichnet die Mitte jeden solchen Abschnittes mit Q und jede Strecke in Bezug auf ihre Mitte als eine einfache Sehne s; auf jeder Transversale S liegen also $\frac{1}{2}n(n-1)$ Sehnen s und ebenso viele Mitten Q. Auch wir werden an dieser Steiner'schen Bezeichnung festhalten.

I. Ueber den Ort der Mitten Q für parallele Transversalen S.

a) Ist irgend eine Gerade G und eine Basis C^n gegeben und ziehen wir von jedem Punkte A der Curve nach bestimmter gegebener Richtung R eine Gerade L, welche G in B schneidet und tragen von B aus auf dieser Geraden L ein Stück BA_1 so ab, dass B gerade Mitte von AA_1 ist, so ist der Ort des Punktes A_1 eine Curve n^{ten} Grades $C_1{}^n$, welche mit der Geraden G dieselben Punkte wie C^n gemein hat. Ausser den gemeinsamen Punkten auf G haben C^n und $C_1{}^n$ noch $n(n-1)$ Punkte gemein, die sich nothwendig zu $\frac{1}{2}n(n-1)$ Paaren von Punkten A und A_1 ordnen. Auf der Geraden G liegen also namentlich auch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte $B\,(=Q)$, die Mitten von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Sehnen $AA_1\,(=s)$ von gegebener Richtung sind; oder:

Der Ort des Punktes Q für parallele Transversalen S ist eine Curve des $\frac{1}{2}n(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. (584.)

(Die in Klammern beigefügten Zahlen geben die Seitenzahl der ges. Werke Jacob Steiner's, Bd. 2, an.)

b) Giebt man einer Transversale S alle möglichen Richtungen, so entsteht eine Curvenschaar $S(Q^{\frac{1}{2}n(n-1)})$, welche so beschaffen ist, dass durch jeden festen Punkt je $\frac{1}{2}n(n-1)$ Curven gehen, indem auch durch jeden Punkt $\frac{1}{2}n(n-1)$ solche einfache Sehnen s gehen, die ihre Mitte in ihm haben. Es giebt jedoch auch solche besondere Punkte, durch welche nur $\frac{1}{2}n(n-1)-1$ Curven des Systems gehen, und zwar sind diese Punkte von zweierlei Art, nämlich es giebt:

α) Solche Punkte J_0, für welche die innere Polare J^{n-1}* die Curve C^n in zwei Punkten berührt, oder solche Punkte J_0, welche Halbirungspunkte von Sehnen $\mathfrak{S}$ $(=s)$ sind, welche die Berührungspunkte paralleler Tangenten der Basis zu ihren Endpunkten haben. Wie wir unten sehen werden, ist der Ort dieser Punkte J_0 eine Curve vom Grade $n(n+1)(n-2)$; und:

β) Solche Punkte J_1, durch welche eine Sehne S_2 geht, auf der zwei Sehnen s der Curve zu liegen kommen. Den Ort dieser Punkte J_1 werden wir weiter unten als vom Grade $\frac{1}{4}n(n+1)(n-2)(n-3)$ finden.

Die Enveloppe aller Curven $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ ist somit zusammengesetzt aus dem Ort der Punkte J_0 und dem Ort der Punkte J_1 (und zwar letzterer doppelt zu rechnen), also eine Curve vom Grade

$$\frac{1}{2}n(n+1)(n-2)(n-3)+n(n+1)(n-2)=\frac{1}{2}n(n+1)(n-1)(n-2).$$

Jede der obigen Curven $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ enthält, wie wir ebenfalls weiter unten finden werden, $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Punkte J_1, welche Doppelpunkte von $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ sind.

Jede der Curven $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ hat mit ihrer nächstfolgenden $\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$ Punkte gemein, berührt also auch ihre Enveloppe in so vielen Punkten. Hiervon sind $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Punkte J_1 als Berührungspunkte zweifach zählend und also noch

$$\frac{1}{4}n^2(n-1)^2-\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)=\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)$$

Punkte J_0.

c) Die Asymptoten der Ortscurve gehen ferner durch die Schnittpunkte der Asymptoten der Basis und sind zu diesen und der Richtung der Trans-

---

* Drehen wir die Basis C^n um einen Pol P um 180 Grad, so erhalten wir eine Curve C_1^n, welche mit der Basis n^2 Punkte gemein hat. Da die unendlich fernen Punkte beider Curven zusammenfallen, liegen deren im Endlichen gelegenen gemeinsamen Punkte auf einer Curve $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades J^{n-1}, der „innern Polare" des Pols P in Bezug auf die Basis.

versale conjugirt harmonisch, wie sich sofort aus der Steiner'schen leicht beweisbaren Tangentenconstruction der Ortscurve $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ ergiebt. Ist nun z. B. die Basis vom dritten Grade, und sind deren Asymptoten reell und giebt man der Transversale nach und nach alle Richtungen, so beschreiben die Asymptoten aller Ortscurven S $(Q^{\frac{1}{2}(n(n-1)})$ drei projectivische Büschel, die in diesem Falle (für die Basis C^3) zudem noch perspectivisch sind. Ist z. B. ABC das Asymptotendreieck und ziehen wir durch C eine Gerade CD parallel der Richtung der Transversale S und schneidet CD die Gerade AB in D, und ist γ der Halbirungspunkt von CD, so sind $A\gamma$ und $B\gamma$ zwei Asymptoten einer der Ortscurven. Der Ort des Punktes γ ist aber eine Gerade, und zwar die, welche die Mitten der Seiten AC und BC des Dreiecks ABC verbindet.

Betrachten wir ebenso irgend drei Asymptoten einer Basis C^n, so gehören zu derselben ebenfalls drei Asymptoten der Ortscurve $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, die sich paarweise in einer Geraden schneiden. Ist also A der Schnitt zweier Asymptoten A_1 und A_2, der Basis, so ist das Büschel Asymptoten durch A für alle Ortscurven $S(Q^{\frac{1}{2}n(n-1)})$ perspectivisch zu jedem Büschel solcher Asymptoten, dessen Mittelpunkt auf A_1 oder A_2 gelegen ist, und mit allen anderen Büscheln Asymptoten ist es projectivisch. Oder:

Die Asymptoten der Ortscurven $S(Q^{\frac{n}{2}(n-1)})$ bilden Büschel, die zu einander theils projectivisch, theils perspectivisch sind, und zwar ist jeder Büschel zu $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ andern projectivisch und zu $2(n-2)$ perspectivisch. (585.)

II. Ueber den Ort der Mitten Q für Transversalen durch einen Punkt Q.

a) Ist irgend ein Pol P, eine Gerade G und eine zweite Gerade H gegeben, und bestimmen wir auf einem Strahle durch P, der G und H in g und h schneidet, einen Punkt k so, dass g die Mitte von hk ist, so ist der Ort von k eine Curve zweiten Grades, K^2, die durch P, den Schnitt von G und H, geht, sowie zu G und H parallele Asymptoten hat.

Die Curve K^2 hat nun mit irgend einer Curve n^{ten} Grades $2n$ Punkte gemein. Daraus schliessen wir:

Durch jeden Pol gehen im Allgemeinen je $2n$ solche Gerade, welche mit irgend zwei Geraden G und H zwei Punkte g und h und mit einer Curve C^n einen solchen Punkt k gemein haben, dass g die Mitte von hk ist.

Und:

Verbinden wir irgend einen Punkt k einer Basis C^n mit einem festen Pol P und schneidet Pk irgend eine Gerade G in einem Punkte g und bestimmen wir auf Pk einen solchen Punkt h, dass g die Mitte von hk ist, so ist der Ort des Punktes h eine Curve $2n^{\text{ten}}$ Grades, H^{2n}, welche

mit C^n deren Punkte auf G und G_∞ gemein und den unendlich fernen Punkt von G zum $n$fachen Punkte hat.

b) Die Ortscurve H^{2n} hat mit der Basis ausser den bereits genannten Punkten auf G und G_∞ noch weitere $2n^2 - 2n = 2n(n-1)$ Punkte gemein. Diese ordnen sich jedoch zu $n(n-1)$ solchen Paaren, die sich auf je einer durch P gehenden Geraden befinden, und zu jedem solchen Punktepaar gehört eine Mitte Q, die auf G gelegen ist, an. Auf jeder Geraden G sind also auch $n(n-1)$ Mitten $Q (= g)$ von einfachen Sehnen s, die durch einen festen Pol P gehen; oder:

Wird die Transversale S um einen Pol P herum bewegt, so beschreiben ihre $\frac{1}{2}n(n-1)$ Mitten Q eine Curve $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $Q^{n(n-1)}$. (585.)

Durch P gehen selbst $\frac{n}{2}(n-1)$ solche Sehnen s, die P zur Mitte Q haben, oder:

Die Ortscurve hat den Punkt Q zum $\frac{1}{2}n(n-1)$fachen Punkte. (585.)

c) Von jedem Pole P_1 gehen ferner $n(n-1)(n^2-n-1)$ Tangenten an die Ortscurve. Dies gilt namentlich auch vom Pol P, dem die Ortscurve zugehört, selbst. Durch diesen werden aber, da er $\frac{1}{2}n(n-1)$facher Punkt der Ortscurve ist, $\frac{1}{2}n(n-1)\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right) = \frac{1}{4}n(n-1)(n^2-n+2)$ absorbirt. Jede durch P gehende Tangente der Basis ist weiter vielfache Tangente der Ortscurve, und zwar $(n-2)$fache, in dem für sie $(n-2)$-mal zwei Punkte Q auf ihr sich vereinigen.

Zudem ist jede Gerade durch P, die parallel zu einer Asymptote A_s der Basis ist, als durch $(n-1)$ Doppelpunkte auf G_∞ gehend anzusehen, zählt also $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$fach als Doppeltangente. Hat also die Ortscurve noch weitere α Doppelpunkte, so erhalten wir durch die Plücker'schen Gleichungen:

$$2x + \frac{1}{2}n(n-1)\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right) + 2n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2) = n(n-1)(n^2-n-1),$$

und

$$x = \frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3),$$

oder, wenn wir aus den vielfachen Punkten wieder die Classe bestimmen:

Die Ortscurve ist von der $n(n-1)^{2\text{ten}}$ Classe und hat ausser dem vielfachen Punkte P noch $\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ im Endlichen gelegene Doppelpunkte. (585.)

III. Ueber das System Curven $S(Q^{n(n-1)})$ für Pole P auf einer Geraden.

Das ganze System von Curven $Q^{n(n-1)}$ für Pole P einer Geraden ist so beschaffen, dass durch jeden Punkt N je $\frac{1}{2}n(n-1)$ Curven $Q^{n(n-1)}$ gehen, indem durch jeden Punkt auch $\frac{1}{2}n(n-1)$ solche Sehnen s gehen, die N zur Mitte Q haben.

Bewegt sich weiter ein Punkt P auf einer Geraden G und schneidet die zu P gehörige Curve $Q^{n(n-1)}$ zwei Gerade H und L in den Punkten M und N, so gehen durch jeden Punkt N auf L $\frac{1}{2}n(n-1).n(n-1)=\frac{1}{2}n^2(n-1)^2$ Gerade MN, die mit L nicht zusammenfallen. Für den Schnittpunkt A von H und L als Punkt N fallen auf die Gerade H für jede einzelne Curve $Q^{n(n-1)}$, die durch A geht, $n(n-1)-1=(n^2-n-1)$ Gerade MN, und im Ganzen somit $\frac{n}{2}(n-1)(n^2-n-1)$ solche Geraden auf L. Sehen wir dagegen den Punkt A als einen Punkt M an, so fallen ebenso $\frac{n}{2}(n-1)(n^2-n-1)$ Gerade MN auf L. Durch jeden Punkt N von L gehen demnach

$$\frac{1}{2}n^2(n-1)^2+\frac{1}{2}n(n-1)(n^2-n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)(2n^2-2n-1)$$

Gerade MN, von denen jedoch $\frac{1}{2}n(n-1)(n^2-n-1)$ auf L selbst zu liegen kommen. Ganz das Gleiche ist der Fall für einen Punkt auf H. Der Ort der Geraden MN ist also eine Curve der $\frac{1}{2}n(n-1)(2n^2-2n-1)^{\text{ten}}$ Classe mit H und L als vielfachen Tangenten. Lassen wir nun H mit L zusammenfallen, so ändert sich die Classe des Ortes nicht; die Gerade MN wird zur Tangente an die Curve $Q^{n(n-1)}$ im Punkte N auf L. Durch jeden Punkt von N gehen nur noch $\frac{n}{2}(n-1)$ Gerade NM, die von L verschieden sind und alle anderen Geraden MN kommen auf L zu liegen, oder, die Gerade L ist:

$$\frac{1}{2}n(n-1)(2n^2-2n-1)-\frac{1}{2}n(n-1)=n(n-1)(n^2-n-1)\text{fache}$$

Tangente des Orts. Unter den Curven $Q^{n(n-1)}$ für Pole P einer Geraden G sind also namentlich auf $n(n-1)(n^2-n-1)$ solche, die irgend eine Gerade L berühren. Diese setzen sich jedoch zusammen aus:

α) x eigentlichen Berührungen;

β) $\frac{1}{4}n(n+1)(n-2)(n-3)$ Curven $Q^{n(n-1)}$, welche in L einen Doppelpunkt haben, jede als berührende Curve zweifach zählend (wir werden die Zahl dieser Doppelpunkte weiter unten bestimmen); und:

γ) Der Curve Q^{n-1}, welche zum Schnittpunkt von G und L als Pol P gehört, und zwar zählt diese Curve für $\frac{1}{2}n(n-1)(n^2-n-2)$ berührende Curven, entsprechend dem Umstande, dass der Punkt P für $\frac{1}{4}n(n-1)(n^2-n-2)$ Doppelpunkte zählend aufzufassen ist.

Aus Obigem erhalten wir aber:

$$x+\frac{1}{2}n(n+1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)(n^2-n-2)$$
$$=n(n-1)(n^2-n-1),$$

also:

$$x=n(n^2-3),$$

oder:

Es giebt je $n(n^2-3)$ Pole Q_0 auf einer Gerade G, deren zugehörige Curven $Q^{n(n-1)}$ irgend eine Gerade L berühren.* (586.)

IV. Ueber den Ort der Doppelsehnen einer Basis C^n.

a) Ist P irgend ein Punkt und soll eine Gerade PQ_0 so beschaffen sein, dass Q_0 Mitte von zwei mit PQ_0 zusammen fallenden Sehnen s ist, so muss Q_0 Doppelpunkt des Ortes $Q^{n(n-1)}$ von P sein. Der letztere Ort enthält jedoch, wie wir oben (II.) sahen, $\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ solche Doppelpunkte. Durch jeden Pol P gehen also auch gerade so viele Doppelsehnen S_2, oder wir erhalten:

Der Ort der Doppelsehnen einer Curve C^n ist eine Curve von der Classe $\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$, $S_2^{\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)}$. (586.)

Wir sahen ferner, dass die zur Richtung R gehörige Curve $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ nur $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ solche Doppelpunkte enthält**, und schliessen

---

* Einen zweiten Beweis geben wir unten in V.

** Irgend eine Curve $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, welche einer Richtung R zugehört, habe x Doppelpunkte. Ihre Classe ist gegeben durch den Werth

$$y=\frac{1}{4}n(n-1)(n^2-n-2)-2x.$$

Andererseits sind aber nur $n(n-1)$ und zwar jede $n(n-2)$fache Tangenten der Ortscurve parallel R möglich, woraus folgt:

$$n(n-1)(n-2)=\frac{1}{4}n(n-1)(n^2-n-2)-2x,$$
$$x=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

daraus, dass die Doppelsehnen S_2 auch nur zu $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ parallel sind, und dass also der Satz giltig ist:

Die Ortscurve $S_2^{\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)}$ hat die Gerade G_∞ zur mehrfachen und zwar zur $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$fachen Tangente.

b) Bewegt sich eine Transversale S parallel einer Asymptote A_s der Basis C^n, so zerfällt die zu diesen Transversalen gehörige Curve $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ in die Asymptote A_s selbst und eine Curve des $\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)^{\text{ten}}$ Grades, $Q^{\frac{1}{2}(n+1)(n-2)}$ (584), in dem jeder Punkt der Asymptote auch als Mitte einer Sehne s angesehen werden kann. Um die Anzahl Doppelpunkte dieser Curve zu bestimmen, haben wir nur die Anzahl Tangenten derselben parallel der Asymptote zu suchen. Diese sind aber identisch mit den Tangenten der Basis parallel der Asymptote A_s. Die Anzahl dieser ist $(n+1)(n-2)$ und jede derselben ist $(n-2)$fache Tangente der Ortscurve $Q^{\frac{1}{2}(n+1)(n-2)}$. Sei also die Anzahl der Doppelpunkte mit x bezeichnet, so haben wir die Plücker'sche Gleichung:

$$(n+1)(n-2)^2+2x=\frac{1}{2}(n+1)(n-2)\left(\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-1\right)$$

$$x=\frac{1}{8}(n+1)(n-1)(n-2)(n-4).$$

Gerade so gross ist die Zahl der Doppelsehnen parallel der Asymptote A_s, welche nicht mit A_s zusammen fallen. Wir sahen aber, dass die Doppelsehnen zu $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ parallel sind, es sind auf der Asymptote demnach

$$\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)-\frac{1}{8}(n+1)(n-1)(n-2)(n-4)$$
$$=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Doppelsehnen vereinigt.

Ist weiter Q_1 die Mitte einer der im Endlichen gelegenen Abschnitte, welche durch die Curve auf der Asymptote bestimmt werden, so ist Q_1 auch Mitte einer Doppelsehne, welche auf die Asymptote zu liegen kommt. Da es $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ solche Mitten Q_1 giebt, so gilt folgender Satz:

Die Asymptoten der Basis sind $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$fache Tangenten und zugleich auch $(n-2)$fache Asymptoten der Ortscurve $S_2^{\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)}$.*

---

* Die in der Anmerkung (S. 586) von Steiner angeführte Zahl ist nicht richtig, wie schon für $(n-4)$ sich zeigen lässt. Die obige Ortscurve ist hier eine Curve S_2^9 und deren Tangenten sind zu je drei parallel. Da nun keine Tangente des Ortes parallel der Asymptote der Basis existirt, die nicht mit der Asymptote

c) Ueber die Ortscurve ist weiter zu bemerken, dass sie auch die Doppeltangenten der Basis berührt, indem letztere ebenfalls Doppelsehnen sind. Liegt ferner der Pol P in der Basis selbst, so hat die zu ihm gehörige Curve $Q^{n(n-1)}$, die in zwei Curven Q_1^n und $Q_2^{n(n-2)}$ zerfällt, auch $\frac{1}{2}(2n+1)(n-2)(n-3)$ solche Punkte, die als Mitten von Doppelsehnen angesehen werden müssen, und von denen ein Endpunkt in P selbst ist. Die Mitten derselben sind die nicht in P und auf G_∞ fallenden Schnitte von Q_1^n und $Q_2^{n(n-1)}$ u. s. w.

V. Ueber den Ort der Sehne S, deren Mitte in einer Geraden G liegt.

a) Liegt die Mitte einer Sehne S auf einer Geraden G, so gehen durch jeden Punkt von G im Allgemeinen je $\frac{n}{2}(n-1)$ solche Sehnen S, die diesen Punkt zur Mitte Q haben, und die nicht mit G zusammenfallen, während die Gerade G selbst $\frac{1}{2}n(n-1)$mal zur Sehne S wird. Daraus können wir sofort schliessen, dass der Ort der Sehne S eine Curve $n(n-1)^{\text{ter}}$ Classe, $S^{n(n-1)}$ mit G als $\frac{1}{2}n(n-1)$facher Tangente ist. Dasselbe folgt auch aus den gemeinsamen Punkten irgend einer Curve $Q^{n(n-1)}$ eines Pols P mit G, indem diese Punkte die $n(n-1)$ durch P gehenden Sehnen S bestimmen. Der unendlich ferne Punkt von G kann ferner als Mitte einer Sehne S auf G_∞ angesehen werden, die zwischen zwei Asymptoten der Basis liegt. Daraus können wir schliessen, dass die Gerade G_∞ als $\frac{1}{2}n(n-1)$fache Tangente des Orts anzusehen ist. In Uebereinstimmung damit folgt aus den gemeinsamen Punkten der Curve $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ mit G, dass die Tangenten der Ortscurve $G^{n(n-1)}$ zu je $\frac{1}{2}n(n-1)$ parallel sind, oder:

Der Ort der Sehnen S, deren Mitte in einer Geraden G gelegen ist, ist eine Curve der $n(n-1)^{\text{ten}}$ Classe, $S^{n(n-1)}$ mit G und G_∞ als $\frac{1}{2}n(n-1)$fachen Tangenten. (588.)

b) Ausser diesen mehrfachen Tangenten besitzt die Ortscurve noch eine bestimmte Anzahl Doppeltangenten, die wir weiter unten (VII.) als gleich $\frac{1}{4}n(n+1)(n-2)(n-3)$ bestimmen werden. Daraus finden wir wieder, dass der Grad der Ortscurve $n(n^2-3)$ ist. Umgekehrt können wir hieraus schliessen, dass das ganze System Curven $Q^{n(n-1)}$ für Pole einer Geraden H so beschaffen ist, dass je $n(n^2-3)$ eine Gerade G be-

---

zusammenfallen würde, so folgt, dass die Asymptoten nothwendig dreifache Tangenten des Ortes sind und nicht zweifache, und zwar berührt jede Asymptote den Ort in einem Punkte im Endlichen und ist dessen zweifache Asymptote.

rühren, nämlich diejenigen, für welche die Pole P die Schnitte von H mit dem Ort $S^{n(n-1)}$ sind.

c) Ebenso finden wir weiter unten (XIII.), dass der Ort der Mitten T_0 aller Tangenten der Basis, dieselben als solche Sehnen angesehen, in denen ein Endpunkt allemal der Berührungspunkt, der andere Endpunkt aber ein Schnitt der Tangente mit der Basis ist; eine Curve vom Grade $n(n^2-4)$ ist. Diese Curve hat mit der Geraden G $n(n^2-4)$ Punkte gemein. Jeder dieser hat aber die besondere Eigenschaft, dass durch ihn zwei auf einander folgende Sehnen S gedacht werden können, die sich im Berührungspunkte der Tangente T_0 mit der Basis schneiden, oder: dass die Ortscurve $S^{n(n-1)}$ für jeden solchen Punkt die Basis berührt; also:

Die Ortscurve $S^{n(n-1)}$ berührt die Basis in $n(n^2-4)$ Punkten. (588.)

d) Ebenso werden wir als Ort der Mitten der Sehnen $\mathfrak{S}$, welche die Berührungspunkte paralleler Tangenten der Basis verbinden, eine Curve vom Grade $n(n+1)(n-2)$ finden (VI.). In diesen Punkten wird die Gerade G von der Ortscurve $S^{n(n-1)}$ geschnitten. Die Ortscurve berührt also die Gerade G in $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkten und schneidet sie noch in $n(n+1)(n-2)$ Punkten. Daraus erhalten wir abermals als Grad der Ortscurve den Werth

$$n(n-1)+n(n+1)(n-2)=n(n^2-3),$$

also den gleichen Werth wie oben.

Aehnliches gilt von der Geraden G_∞.

VI. Ueber den Ort der Mitten der Sehnen $\mathfrak{S}$.

a) Unter Sehnen $\mathfrak{S}$ versteht Steiner diejenigen Transversalen $ab=\mathfrak{S}$ der Basis, deren Endpunkte die Berührungspunkte paralleler Tangenten der Basis sind. Um den Grad des Orts der Mitten dieser Sehnen zu bestimmen, können wir am einfachsten von den unendlich fernen Punkten des Orts ausgehen. Dieselben sind vollständig bestimmt durch die Tangenten der Basis parallel den Asymptoten derselben, und zwar ist jeder Punkt der Curve auf G_∞ $(n+1)(n-2)$facher Punkt und die zugehörigen Asymptoten der Ortscurve liegen in der Mitte zwischen der Asymptote und den $(n+1)(n-2)$ zu ihr parallelen Tangenten. Da die Basis n Asymptoten besitzt, so hat die Ortscurve auch $n(n+1)(n-2)$ Punkte mit G_∞ gemein, d. h. wir erhalten:

Der Ort der Mitte Q_0 der Sehne $\mathfrak{S}$ ist eine Curve des $n(n+1)(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, $Q_0^{n(n+1)(n-2)}$. (589.) U. s. w.

VII. Ueber den Ort der Mitten der Doppelsehnen S_2.

a) Die Curve $S^{n(n-1)}$ ist vom Grade $n(n^2-3)$ [VI.] und von der $n(n-1)^{\text{ten}}$ Classe. Ihre Schnitte mit G setzen sich nämlich zusammen

aus $\frac{1}{2} n(n-1)$ Berührungspunkten und aus $n(n+1)(n-2)$ Schnitten. Unter den Tangenten der Ortscurve $S^{n(n-1)}$ sind jedoch auch solche, welche Doppelsehnen und deren Mitten auf G gelegen sind. Jede dieser Doppelsehnen ist aber auch Doppeltangente der Ortscurve. Bezeichnen wir ihre Anzahl mit x, so erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, dass auch G_∞ $\frac{1}{2} n(n-1)$ fache Sehne ist, die Plücker'sche Gleichung:

$$n(n-1)(n^2-n-1)-\frac{n}{2}(n-1)(n^2-n-2)-2x=n(n^2-3)$$

$$x=\frac{1}{4} n(n+1)(n-2)(n-3),$$

oder:

Der Ort der Mitten aller Doppelsehnen S_2 einer Basis ist eine Curve $\frac{1}{4} n(n+1)(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Grades, $Q_2^{\frac{1}{4}n(n+1)(n-2)(n-3)}$. (587.)

b) In Bezug auf die gemeinsamen Punkte der Ortscurve mit G_∞ ist Folgendes zu beachten: Die Ortscurve hat die unendlich fernen Punkte der Basis zu mehrfachen, etwa $x$fachen und schneidet die Gerade G_∞ nebst dem noch in den Berührungspunkten von G_∞ und $S_2^{\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)}$. Um letztere zu bestimmen, haben wir nur irgend vier Asymptoten der Basis zu wählen, etwa A_1, A_2, A_3, A_4 und zwei Strahlen Y und Z so zu bestimmen, dass z. B.

$$A_1 Y A_2 Z \text{ und } A_3 Y A_4 Z$$

zwei harmonische Punktreihen auf G_∞ ergeben. Zu vier Asymptoten erhalten wir auf diese Art drei Paare Y und Z und jede dieser sechs Geraden bestimmt auf G_∞ einen der obigen Berührungspunkte. Hieraus, oder aus dem Umstande, dass die Doppelsehnen nur zu je $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ parallel sind, folgern wir, dass die Ortscurve $S_2^{\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)}$ die Gerade G_∞ in $\frac{1}{4} n(n-1)(n-2)(n-3)$ Punkten berührt und also die Ortscurve $Q_2^{\frac{1}{4}n(n+1)(n-2)(n-3)}$ auch die Gerade G_∞ in diesen $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Punkten schneidet. Aus ihrem Grade und diesen Punkten folgt:

$$nx+\frac{1}{4} n(n-1)(n-2)(n-3)=\frac{1}{4} n(n+1)(n-2)(n-3)$$

$$x=\frac{1}{2}(n-2)(n-3).$$

Letzterer Werth hätte auch daraus abgeleitet werden können, dass wir jeden Punkt auf G_∞ und einer Asymptote der Basis als Mitte einer Doppelsehne angesehen hätten, von der zwei Endpunkte im Unendlichen, zwei aber irgend zwei von den im Endlichen gelegenen $(n-2)$ Schnitten der Asymptote mit der Basis gewesen wären. Wir erhalten also:

Die Asymptoten der Basis sind $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$fache Asymptoten der Ortscurve. (587.)

VIII. Ueber den Ort der Sehnen, deren Mitten in der Basis selbst gelegen sind.

a) Die Ortscurve $Q^{n(n-1)}$ hat mit der Basis $n^2(n-1)$ Punkte gemein. Dieselben zerfallen in

α) n Punkte auf G_∞, je $(n-1)$fach zählend;

β) $n(n-1)$ Punkte, welche Berührungspunkte der Tangenten von P an die Basis sind, und in

γ) $n(n-1)(n-2)$ weitere Punkte der Basis, welche Mitten von durch P gehenden Sehnen sind, wodurch die Anzahl gemeinsamer Punkte beider Curven erschöpft ist.

Durch jeden Punkt P gehen demnach $n(n-1)(n-2)$ solche Sehnen S, deren Mitte Q_1 in der Basis selbst liegt, oder:

Der Ort der Sehnen S, deren Mittelpunkt Q_1 in der Basis selbst liegt, ist eine Curve der $n(n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Classe, $S^{n(n-1)(n-2)}$. (587.) U. s. w.

IX. Ueber den Ort der Transversalen S, deren Mitten in einer Curve m^{ten} Grades liegen.

a) Die Curve $Q^{n(n-1)}$ hat mit irgend einer Curve m^{ten} Grades C^m noch $m.n.(n-1)$ Punkte gemein. Daraus schliessen wir:

Der Ort aller Transversalen S, deren Mitten in irgend einer Curve m^{ten} Grades liegen, ist eine Curve der $m.n(n-1)^{\text{ten}}$ Classe, mit G_∞ als $\frac{1}{2}nm.(n-1)$facher Tangente. (589.)

Letzteres folgt aus dem Umstande, dass jeder Punkt auf G_∞ von C^m als Mitte von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Sehnen S angesehen werden kann, die auf G_∞ fallen, und die durch irgend zwei Asymptoten begrenzt sind.

b) Von dieser Ortscurve können wir ferner die Anzahl ihrer Doppeltangenten angeben. Dieselbe ist bestimmt durch ihre Schnittpunkte mit der Ortscurve $Q_2{}^{\frac{1}{4}n(n+1)(n-2)(n-3)}$, also gleich

$$\frac{1}{4}n.m.(n+1)(n-2)(n-3).$$

Zudem hat sie die Asymptoten der Basis zu $m$fachen Tangenten, indem für jeden Schnitt von C^m mit einer Asymptote eine Sehne S auf die Asymptote fällt.

c) In gleicher Weise kann die Anzahl Punkte angegeben werden, in welchen die Ortscurve die Basis berührt, dieselben sind bestimmt durch die gemeinschaftlichen Punkte der Ortscurve $T_0{}^{n(n^2-4)}$ und der Curve C^m, ihre Anzahl ist also gleich $m.n.(n^2-4)$. (Vergl. XIII.)

d) Aus der Classe der Ortscurve und der Anzahl ihrer vielfachen Tangenten ergiebt sich noch der Grad derselben. Ihre gemeinschaftlichen Punkte mit der Curve C^m sind theils gewöhnliche Schnitte oder aber Berührungspunkte. Die ersteren derselben sind zugleich auf der Curve $\mathfrak{S}^{n(n+1)(n-2)}$ gelegen, wodurch deren Anzahl bestimmt ist. Daraus erhalten wir wieder die Anzahl der gemeinsamen Berührungspunkte der Ortscurve mit C^m u. s. w.

X. Ueber den Ort der Mitten der Sehnen S, die eine Curve m^{ter} Classe K^m berühren.

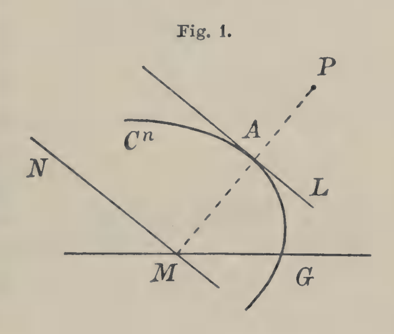
Aus der Anzahl der gemeinsamen Tangenten der Curven K^m und $S^{n(n-1)}$ erhalten wir sofort:

Der Ort der Mitten Q aller Sehnen S, welche eine gegebene Curve unter Classe K^m berühren, ist eine Curve $m.n(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. (589.) U. s. w.

XI. Ueber den Ort der Sehnen $\mathfrak{S}$.

a) Ist irgend ein Pol P und eine Gerade G gegeben (Fig. 1) und ziehen wir durch P irgend eine Transversale, welche eine Basis C^n in einem Punkte A, die Gerade G in M schneidet, legen in A an C^n eine Tangente AL und ziehen durch M die Gerade MN parallel AL, so gehen durch jeden Punkt M auf G n Gerade MN, die mit G nicht zusammenfallen, indem auf jeder Geraden PM auch n Punkte A zu liegen kommen. Da weiter $n(n-1)$ Tangenten der Basis parallel mit G sind, so fallen auch $n(n-1)$ Gerade MN auf G selbst. Daraus finden wir:

Fig. 1.



Der Ort der Geraden MN ist eine Curve $n^{2\,\text{ter}}$ Classe $M^{n^2}_{n(n-1)}$ mit G als $n(n-1)$facher Tangente.

Für einen Strahl PA parallel G fallen weiter n Gerade MN auf G_∞, oder:

Die Curve $M^{n^2}_{n(n-1)}$ hat die Gerade G_∞ zur $n$fachen Tangente.

Ausser diesen vielfachen Tangenten hat die Ortscurve noch eine gewisse Anzahl Doppeltangenten, die wir mit x bezeichnen wollen. Die gemeinsamen Punkte der Ortscurve mit G setzen sich ferner zusammen aus $n(n-1)$ Berührungen, und aus $n(n-1)$ Schnitten, die durch die $n(n-1)$ Tangenten von P an die Basis bestimmt sind, oder:

Der Grad der Ortscurve $M^{n^2}_{n(n-1)}$ ist gleich $3n(n-1)$.

Aus den oben genannten Eigenschaften erhalten wir die Plücker'sche Gleichung:

$$n^2(n^2-1)-n(n-1)(n^2-n-1)-n(n-1)-2x=3n(n-1),$$

oder:

$$x=\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3),$$

Die Ortscurve $M^{n^2}_{n(n-1)}$ besitzt ausserdem noch $\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)$ Doppeltangenten.

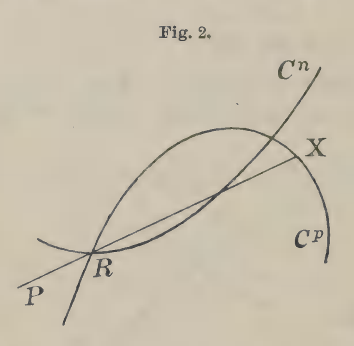
Jeder dieser Doppeltangenten entspricht aber einer Sehne $\mathfrak{S}$ durch den Pol P, auf welcher zwei Punkte A so gelegen sind, dass die Tangenten in diesen Punkten an die Basis parallel werden, d. h. wir erhalten:

Der Ort der Sehnen $\mathfrak{S}$ ist eine Curve der $\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)^{\text{ten}}$ Classe $\mathfrak{S}^{\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)}$. (589.)

Hiermit haben wir die Vermuthung J. Steiner's als richtig erfunden.

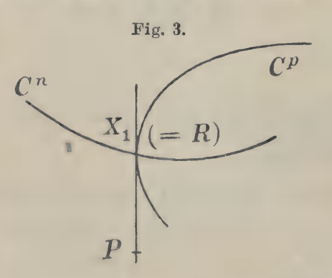
b) Die Ortscurve $\mathfrak{S}^{\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)}$ gestattet uns noch eine andere Ableitung. Wir gehen zu diesem Zwecke von einem Büschel Curven aus und fragen nach dem Ort, welchen die Sehnen einzelner Curven mit einer festen Basis bestimmen. Es sei zunächst eine Basis C^n (Fig. 2) und ein Büschel $B(C^p)$ durch p^2 Grundpunkte gegeben und ein fester Pol P beliebig angenommen. Ist nun R ein Punkt von C^n, so geht durch denselben eine Curve C^p und die Gerade PR bestimmt jetzt auf dieser Curve C^p noch $(p-1)$ Punkte x, welche die übrigen Schnittpunkte von PR mit C^p sind. Auf der Geraden PR liegt jedoch nicht nur ein Punkt R, sondern es liegen n Punkte R, und also auch $n(p-1)$ Punkte x. Die durch P selbst gehende Curve C^p hat mit der Basis C^n weiter np Punkte R_0 gemein, und für jeden solchen Punkt R_0 fällt ein Punkt x in P. Daraus schliessen wir:

Fig. 2.



Der Ort der Punkte x ist eine Curve $[n(p-1)+np]=n(2p-1)^{\text{ten}}$ Grades, $x^{n(2p-1)}_{np}$ mit P als npfachem Punkte.

Fig. 3.



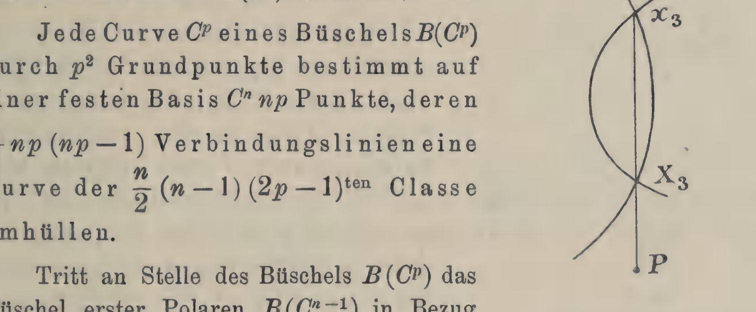
Die Curve $x^{(2p-1)n}_{np}$ hat mit der Basis aber folgende Punkte gemein:

α) $n(2p-1)$ Punkte $x_1(=R)$ [Fig. 3], für welche PR die zugehörige Curve C^p in R berührt und die also auf der Panpolare P^{2p-1} des Pols P in Bezug auf die Curven des Büschels gelegen sind*, und:

* Ziehen wir an alle Curven eines Büschels $B(C^p)$ von einem Pol P Tangenten, so liegen deren Berührungspunkte auf einer Curve C^{2p-1}, die durch P und die Grundpunkte des Büschels geht und die Steiner als Panpolare bezeichnet hat. Deren Ableitung ist sowohl auf analytischem wie synthetischem Wege eine einfache.

β) Eine bestimmte Anzahl Punktepaare x_2 und x_3, die auf demselben Strahl durch P gelegen sind (Fig. 4). Solcher Paare von Punkten kann es nur noch $\frac{1}{2}\left(n^2(2p-1)-n(2p-1)\right)=\frac{1}{2}n(n-1)(2p-1)$ geben.

Durch jeden Pol P gehen also auch $\frac{1}{2}n(n-1)(2p-1)$ Sehnen x_2x_3, welche zwei Schnittpunkte der Basis mit einer der Curven des Büschels $B(C^p)$ verbinden, oder:



Jede Curve C^p eines Büschels $B(C^p)$ durch p^2 Grundpunkte bestimmt auf einer festen Basis C^n np Punkte, deren $\frac{1}{2}np(np-1)$ Verbindungslinien eine Curve der $\frac{n}{2}(n-1)(2p-1)^{\text{ten}}$ Classe umhüllen.

Tritt an Stelle des Büschels $B(C^p)$ das Büschel erster Polaren $B(C^{n-1})$ in Bezug auf die Basis und für Pole auf der Geraden G_∞, so erhalten wir sofort die Curve $\mathfrak{S}^{\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)}$.

XII. Ueber eine mit der Curve $\mathfrak{S}^{\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)}$ verwandte Curve.

Durch Projection erhalten wir aus Obigem:

Ziehen wir von jedem Punkt P einer Geraden G (anstatt G_∞) Tangenten an eine Basis C^n und verbinden die Berührungspunkte aller von einem Punkt ausgehenden Tangenten durch Sehnen $\mathfrak{S}$, so ist der Ort dieser Sehnen eine Curve der $\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)^{\text{ter}}$ Classe $\mathfrak{S}^{\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)}$. (599, 489–490.)

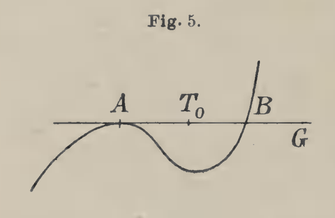
Daraus erhalten wir durch Umkehrung:

Ziehen wir durch irgend einen Punkt Q eine Transversale und in deren Schnitten mit einer Basis C^n Tangenten an letztere, so schneiden sich diese Tangenten paarweise in $\frac{n}{2}n-1)$ Punkten P. Dreht sich nun die Transversale um den Pol P, so liegen von allen entstandenen Punkten P je $\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)$ auf einer Geraden G, oder der Ort des Punktes P ist eine Curve $\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)^{\text{ten}}$ Grades, $Q^{\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)}$. (599, 489–490.)

XIII. Ueber den Ort der Tangenten-Mitten T_0.

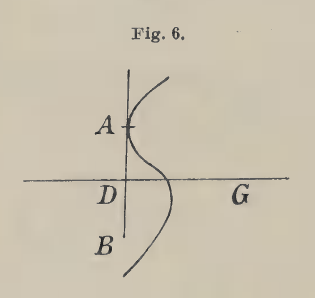
a) Ist A Berührungspunkt einer Tangente einer Basis C^n (Fig. 5), B ein Schnittpunkt derselben mit C^n und T_0 der Halbirungspunkt der Strecke AB, so können wir nach dem Ort der Punkte T_0 fragen. Zur Erledigung dieser Frage dient folgende Betrachtung:

Fig. 5.



Irgend eine Curve C^n und eine Gerade G seien gegeben (Fig. 6); in irgend einem Punkte A der Curve ziehen wir die Tangente AB an dieselbe. Schneidet AB die Gerade G in D und ist D die Mitte von AB, so können wir zunächst den Ort des Punktes B bestimmen. Der letztere hat nämlich mit der Geraden G deren Schnitte mit C^n gemein und zudem noch den unendlich fernen Punkt von G zum $n(n-1)$fachen Punkt, indem $n(n-1)$ Asymptoten des Orts parallel mit G werden und gleichweit, aber auf entgegengesetzter Seite von G, abstehen, wie die $n(n-1)$ parallelen Tangenten der Basis C^n. Der Ort hat also mit G im Ganzen $n+n(n-1)=n^2$ Punkte B gemein; ist also eine Curve vom $n^{2\text{ten}}$ Grade, B^{n^2}. Ausser dem schon genannten $n(n-1)$-fachen Punkte auf G hat die Ortscurve mit der Geraden G_∞ noch die n Schnitte derselben mit der Basis gemein, so dass also G mit G_∞ in Bezug auf die Ortscurve projectivisch die gleichen Eigenschaften besitzen. Die Ortscurve schneidet nun die Basis in n^3 Punkten. Hiervon fallen je $2n$ auf G und G_∞, indem beide Curven in diesen Punkten sich nicht nur schneiden, sondern noch berühren, und es bleiben noch deren $n(n^2-4)$ weitere Punkte B_0 übrig, für welche der Punkt D zum Punkte T_0 auf G wird, d. h. wir erhalten:

Fig. 6.



D e r O r t d e r M i t t e n T_0 i s t e i n e C u r v e $n(n^2-4)^{\text{ten}}$ G r a d e s, $T_0^{\,n(n^2-4)}$. (599.)

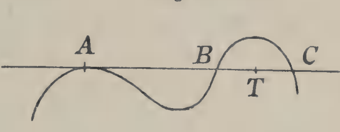
b) Die Curve $T_0^{\,n(n^2-4)}$ hat mit der Basis die unendlich fernen Punkte gemein und zwar dieselben zu (n^2-4)fachen Punkten. Die Asymptoten setzen sich zusammen aus den n Asymptoten der Basis, und zwar ist jede $(n-2)$fache Asymptote des Orts, entsprechend den $(n-2)$ endlichen Schnitten derselben mit der Basis und aus $n(n+1)(n-2)$ Asymptoten, von denen wieder je $(n+1)(n-2)$ parallel mit jeder einzelnen Asymp-

tote der Basis sind, und zwar liegen dieselben in der Mitte zwischen diesen und den zu ihnen parallelen Tangenten der Basis.*

XIV. Ueber den Ort der Punkte T.

a) Schneidet ferner eine Tangente der Basis in A die Curve noch in zwei Punkten B und C (Fig. 7), und ist T der Halbirungspunkt von BC, so können wir ebenso nach dem Ort der Mitten T fragen. Hierzu dient folgende Betrachtung: Die Curve C^n hat mit der Curve $S^{n(n-1)}$ im Allgemeinen $n^2(n-1)^2$ Tangenten gemein, oder wir können sagen:

Fig. 7.



Der Ort der Tangenten-Mitten der Basis, dieselben als Sehnen S angesehen, ist eine Curve $n^2(n-1)^{2\text{ten}}$ Grades.

Diese Curve zerfällt jedoch in:

α) die n Asymptoten der Basis;

β) die Basis selbst;

γ) den Ort der Mitten T_0, $T_0^{n(n-4)}$, und zwar zweifach zählend, und

δ) den Ort der Mitten T.

Ist letzterer eine Curve T^x, so finden wir:

$$x + n + n + 2n(n^2 - 4) = n^2(n-1)^2,$$

oder:

$$x = n(n+1)(n-2)(n-3),$$

Der Ort der Mitten T ist eine Curve des $n(n+1)(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Grades, $T^{n(n+1)(n-2)(n-3)}$. (590.)

XV. Ueber Tangenten, deren Berührungspunkt eine Mitte Q ist.

a) Durch jeden Punkt gehen $n(n-1)(n-2)$ solche Sehnen S_1, deren Mitte Q in der Basis selbst gelegen ist.

b) Ist ferner P ein Grundpunkt eines Büschels $B(C^p)$, so hat die innere Panpolare**, d. i. die Curve J^{2n-1}, den Grundpunkt des Büschels

* Auch hieraus ergiebt sich der Ort der Mitten T_0. Steiner giebt weiter an, die Ortscurve berühre die Doppeltangenten der Basis in ihrer Mitten. Wir glauben hinzufügen zu sollen, dass die Ortscurve diese Doppeltangenten in ihrer Mitten mit zwei Zweigen, also sich selbst berührt, und nicht, wie Steiner annahm, nur mit einem. Die weiteren Resultate Steiner's können wir füglich übergehen.

** Durch jeden Punkt P gehen $\frac{n}{2}(n-1)$ Sehnen einer Curve C^n, die in P ihre Mitte haben, die Endpunkte aller dieser Sehnen liegen auf einer Curve des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, der inneren Polare, des Pols in Bezug auf die Curve C^n. Bildet man diese Sehnen in Bezug auf alle einzelnen Curven eines Büschels, so liegen alle Endpunkte der Sehnen, wie wir bei anderer Gelegenheit zeigen werden, auf einer Curve $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades, die Steiner die „innere Panpolare" nennt.

zum dreifachen Punkte, indem unter den Curven eines Büschels stets drei solche sind, die irgend einen Grundpunkt zum Wendepunkt haben. Diese Curve J^{2n-1} hat mit irgend einer Geraden durch P nur noch $(2n-4)$ Punkte gemein. Es giebt also namentlich auch $(n-2)$ solche Curven des Büschels, die auf der durch P gehenden Geraden zwei solche Punkte bestimmen, dass P gerade der Mittelpunkt ihrer Entfernung ist.

c) Ziehen wir also durch irgend einen Pol P_0 in Bezug auf alle Curven die möglichen Sehnen S_1, so liegen auf jeder dieser Curven $n(n-1)(n-2)$ Mitten Q_1, die von den Grundpunkten verschieden sind, während der Grundpunkt P in Bezug auf die Sehne P_0P je $(n-2)$mal zur Mitte Q_1 wird. In Bezug auf die durch P_0 gehende Curve des Büschels finden wir weiter noch, dass der Punkt P_0 auch $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$mal zum Punkte Q_1 wird. Hieraus erhalten wir wieder:

Liegt die Mitte Q_1 einer Sehne S_1 auf einer Curve C^n eines Büschels $B(C^n)$, während sie durch einen festen Punkt P_0 gehen muss, so liegen auf irgend einer Curve C^n des Büschels

$$n(n-1)(n-2)+n^2(n-2)=n(2n-1)(n-2)$$

Punkte Q_1 und der Ort des Punktes Q_1 ist eine Curve vom Grade $(n-2)(2n-1)$, $Q^{(n-2)(2n-1)}$, welche die Grundpunkte des Büschels zu $(n-2)$fachen Punkten und P_0 zum $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$fachen Punkte hat.

d) Ist wieder ein Curvenbüschel und eine Gerade G gegeben, so folgt, wenn wir in derselben irgend einen Pol P_0 annehmen, dass unter den Curven insbesondere auch $\left\{(2n-1)(n-2)-\frac{1}{2}(n+1)(n-2)\right\}=\frac{3}{2}(n-1)(n-2)$ solche sind, die auf G drei Punkte A, Q_1, B derart bestimmen, so dass Q_1 gerade Mitte von AB ist. Durchschneidet ferner eine der Curven C^n die Gerade G in einem Punkte M, so ist M Mitte von $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$ Sehnen S_1 dieser Curve. Durch jeden Punkt von G gehen also $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$ Sehnen S_1 dieser Curven, während noch $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)$ derselben mit G zusammenfallen. Dies giebt:

Liegt die Mitte der Sehne S_1 einer Curve C^n auf dieser Curve und einer Geraden G, so ist der Ort dieser Sehne S_1 eine Curve der $(2n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Classe, $S^{(2n-1)(n-2)}_{\frac{3}{2}(n-1)(n-2)}$ mit G als $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)$facher Tangente.

e) Wir fanden weiter, dass, wenn wir an alle Curven des Büschels in ihren Schnitten mit G Tangenten ziehen, der Ort dieser Tangenten eine Curve $(2n-1)^{\text{ter}}$ Classe G^{2n-1}_{2n-2} mit G als $(2n-2)$facher Tangente ist. Die Curven $S^{(2n-1)(n-2)}_{\frac{3}{2}(n-1)(n-2)}$ und G^{2n-1}_{2n-2} haben ausser G noch:

$$(2n-1)^2(n-2)-3(n-1)^2(n-2)=(n-2)(n^2+n-2)$$

Tangenten gemein. Hierunter sind jedoch $6(n-1)$ Tangenten W_0 mit inbegriffen*, für welche die zugehörige Curve C^n in G einen Wendepunkt besitzt, und die also Wendetangenten einzelner Curven sind. Durch den unendlich fernen Punkt von G gehen ebenso $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Sehnen S_1, die mit G_∞ zusammenfallen, während die übrigen $(n-2)$ Sehnen S_1 durch diesen Punkt mit der Asymptote einer Curve C^n in diesem Punkte zusammenfallen. Es bleiben also nur noch

$$(n-2)(n^2+n-2)-6(n-1)-(n-2)=(n-1)(n-3)(n+4)$$

andere gemeinsame Tangenten beider Curven übrig, und auf jeder Geraden G liegen demnach auch $(n-1)(n-3)(n+4)$ solche Punkte Q_1, dass die Tangente in diesem Punkte an die durch ihn gehende Curve des Büschels auf letzterer noch zwei solche Punkte bestimmt, A und B, dass Q_1 gerade Mitte der Strecke AB wird, oder:

Werden auf einer Tangente einer Curve eines Büschels $B(C^n)$ durch die Curve ausser dem Berührungspunkte Q_1 noch zwei solche Punkte A und B bestimmt, die von Q_1 gleichweit abstehen, so ist der Ort des Berührungspunktes Q_1 eine Curve $(n-1)(n-3)(n+4)^{\text{ten}}$ Grades,

$$Q_1^{(n-1)(n-3)(n+4)}.$$

f) Ist wieder P ein Grundpunkt des Büschels $B(C^n)$, so haben von allen Curven desselben drei in diesem Punkte einen Wendepunkt. Ziehen wir ferner in P an jede Curve des Büschels eine Tangente, so hat dieselbe mit der Curve noch weitere $(n-2)$ Punkte D gemein. Da D zudem dreimal mit P zusammenfällt, so enthält jede durch P gehende Gerade $n-2+3=(n+1)$ Punkte D, oder:

Ziehen wir in einem der Grundpunkte P des Büschels $B(C^n)$ Tangenten an jede einzelne Curve, so ist der Ort der übrigen Schnittpunkte D dieser Tangente und der zugehörigen Curve C^n eine Curve $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades $D_3^{(n+1)}$ mit P als dreifachem Punkte.

Drehen wir die Curve $D_3^{(n+1)}$ um P um einen Winkel von 180^0, so hat die gedrehte Curve mit der ursprünglichen $(n+1)^2$ Punkte gemein. Hiervon fallen $(n+1)$ auf G_∞ und zwölf in den Punkt P. Die übrigen (n^2+n-12) ordnen sich zu $\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-6\right)$ Paaren an, die auf je einem durch P gehenden Strahle liegen. Daraus erhalten wir aber:

Die Curve $Q_1^{(n-1)(n-3)(n+4)}$ hat die Grundpunkte des Büschels zu $\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-6\right)$fachen Punkten.

---

* Der Ort der Wendepunkte der Kurven eines Büschels ist vom Grade $6(n-1)$.

g) Ausser den Grundpunkten hat die Curve

$$Q_1^{(n-1)\,(n-3)\,(n+4)}$$

mit irgend einer Curve des Büschels noch:

$$n\,(n-1)\,(n-3)\,(n+4) - n^2\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 6\right) = \frac{n}{2}\,(n-2)\,(n-3)\,(n+4)$$

Punkte Q_0 gemein. Dies giebt uns:

Jede Curve hat $\frac{1}{2}\,n\,(n-2)\,(n-3)\,(n+4)$ solche Tangenten, in welchen irgend zwei Schnitte c und d vom Berührungspunkte $a_0\,(=Q_0)$ gleich weit entfernt sind.* (591.)

XVI. Ueber eine zweite Gruppe besonderer Tangenten der Basis C^n.

Ausser den bereits früher erwähnten Punkten hat die Ortscurve $T^{n(n+1)(n-2)(n-3)}$ mit der Basis noch weitere $n(n-2)(n-3)(n^2-n-4)$ Punkte gemein. Dieselben enthalten die obigen Punkte a_0, und zwar sind in jedem solchen Punkte zwei Punkte T vereinigt, die Ortscurve berührt also die Basis in diesen Punkten. Ziehen wir diese zweifach zählenden Punkte von obiger Zahl ab, so bleiben noch deren

$$n\,(n-2)\,(n-3)\,(n^2-2n-8) = n\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n+2)$$

weitere übrig, woraus wir wieder schliessen:

In jeder Basis giebt es $n\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n+2)$ solche Tangenten, in welchen von den übrigen Schnitten ein Schnitt b in der Mitte zwischen zwei Schnitten c und d liegt.** (591.)

---

* Auf das gleiche Resultat kommt Bischoff in Bd. 56 des Journals für Mathematik auf analytischem Wege. Er stellt dort die Gleichung der Curve $\frac{1}{2}\,(n-2)\,(n-3)\,(n+4)^{\text{ten}}$ Grades aus, die durch die Punkte a_0 geht. Dieselbe ist in der von Bischoff gegebenen Form:

$$\left(u_2\,\frac{\delta}{\delta x} - u_1\,\frac{\delta}{\delta y}\right)\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Das von Steiner vermuthete Resultat war schon aus dem Grunde fraglich, als dasselbe für $n=2$ den Werth $+4$ giebt, der keinen Sinn hat. Dass die Punkte a_0 selbst auf Curven niederen Grades liegen, folgt aus den gemeinsamen Punkten von $Q^{(n-1)\,(n-3)\,(n+4)}$ mit C^n, wenn man die n^2 Grundpunkte als auf $\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 6\right)$mal auf einer anderen Curve C^n liegend ansieht. Dieses Beispiel zeigt so recht die Schwierigkeit in der Behandlung der hierher gehörigen Fragen.

** Selbstverständlich ist auch das von Steiner für diesen Fall vermuthete Resultat ein unrichtiges.

XVII. Ueber die Transversale S^a.

a) Die gemeinsamen Punkte der Ortscurve $S^{n(n-1)}$ und A^n (575) bestehen aus

α) dem $\frac{n}{2}(n-1)^2$ fach zählenden Punkte P,

β) aus $n(n-1)$ Punkten auf G_∞ und

γ) aus $\frac{n}{2}(n-1)^2$ weiteren Punkten.

Hieraus können wir jedoch sofort wieder schliessen:

Bei einer beliebigen Curve C^n ist der Ort derjenigen Transversale S_a, in welcher der Schwerpunkt* in der Mitte zwischen zwei Schnitten a gelegen ist, eine Curve $\frac{1}{2}n(n-1)^{2\text{ter}}$ Classe, $Q_a^{\frac{1}{2}n(n-1)^2}$. (591.)

b) Ebenso haben die zu der Geraden G gehörigen $S^{n(n-1)}$ und S_g^n (578) im Allgemeinen $n^2(n-1)$ Tangenten gemein; diese setzen sich zusammen aus:

α) der Geraden G für $\frac{n^2}{2}(n-1)$ zählend,

β) den n Asymptoten der Basis, und

γ) $\frac{n}{2}(n+1)(n-2)$ weiteren Tangenten,

woraus wir wieder schliessen:

Der Ort der Schwerpunkte Q_a der Transversale S_a ist eine Curve des $\frac{n}{2}(n+1)(n-2)^{\text{ten}}$ Grades $Q_a^{\frac{n}{2}(n+1)(n-2)}$. (591.)

XVIII. Ueber die Schnittpunkte der Basis und der Curve $Q_a^{\frac{n}{2}(n+1)(n-2)}$. Ist für den Fall $n=5$.

a) Ist die Basis C^5 gegeben, so wird die zu ihr gehörige Ortscurve $Q_a^{\frac{n}{2}(n+1)(n-2)}$ zu einer Curve des 45. Grades, welche mit der Basis 225 Punkte gemein hat. Diese 225 Punkte sind aber von zweierlei Art, es können nämlich:

α) Punkte sein, welche Mitten a von Doppelsehnen S_2 sind, und zwar zählt jeder dieser Punkte zweifach, und

β) Punkte, in welchen die Tangente die Eigenschaft hat, dass ihr Berührungspunkt zugleich Schwerpunkt der Tangente selbst ist.

b) Um die erstere Anzahl zu bestimmen, können wir von dem Ort der Mitten der Doppelsehnen selbst ausgehen. Der Ort dieser Mitte wird für die Basis C^5 eine Curve Q_2^{45}, welche mit der Basis ebenfalls 225 Punkte gemein hat. Diese Punkte setzen sich aber zusammen aus:

α) 15 Punkten auf G_∞, indem auf jeder Asymptote der Basis drei derselben vereinigt sind;

---

* Ueber die Bezeichnung Schwerpunkt einer Geraden vergl. Steiner's ges. Werke Bd. 2, S. 574.

β) aus $\frac{n}{2}(n-2)(n-3)(n+4)=135$ Punkten a_2, in welchen a_2 auf der Tangente der Basis in a_2 zwei Punkte b und c so bestimmt werden, dass a_2 die Mitte von bc ist (XV.), und aus:

γ) 75 weiteren Schnitten, die Mitten von Doppelsehnen sind. Dies giebt uns:

Es giebt in einer Curve fünften Grades C^5 im Allgemeinen 75 eigentliche Doppelsehnen, welche ihre Mitte in der Basis selbst haben. (592.)

c) Um die Anzahl Tangenten zu erhalten, deren Berührungspunkt Schwerpunkt ist, haben wir nur in dem Resultat $(n-2)n^2$ für n den Werth 5 einzusetzen und erhalten für die Anzahl dieser Tangenten ebenfalls den Werth 75.

Hiermit sind in der That auch alle 225 Schnitte beider Curven bestimmt, und das in XV. von uns gegebene Resultat für den Fall $n=5$ wenigstens als richtig bestätigt anzusehen.

Allgemeine Bemerkung.

Alle obigen Sätze gehen durch Projection in scheinbar allgemeinere über, indem an die Stelle des Schwerpunktes und der Mitte Q gewisse harmonische Punkte treten. Ausserdem können auch andere Gruppen von Punkten auf der Transversale betrachtet werden. Hierher gehören namentlich die Gruppen von vier harmonischen Punkten. Da diese Fragen, streng genommen, nur Folgerungen aus den obigen Sätzen sind, so mögen sie im Anschluss an dieselben hier behandelt werden.

XIX. Ueber die Geraden, welche mit der Basis vier harmonische Punkte gemein haben.

a) Es kann zunächst verlangt werden, dass durch den Punkt P irgend eine Transversale so gezogen werde, dass von den n Schnitten mit der Basis drei derselben mit P vier harmonische Punkte bilden. Um diese Frage zu lösen, können wir den Punkt P zunächst auf der Geraden G_∞ annehmen, dann heisst die obige Frage: Wie viele einfache Sehnen, deren Mitte S_1 auf der Basis gelegen ist, gehen durch P, sind also parallel. Aus dem Ort $S_1^{n(n-1)(n-2)}$ dieser Sehnen folgt jedoch, dass sie zu $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ parallel sind, oder mit anderen Worten: durch jeden Punkt auf G_∞ gehen $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ dieser Sehnen. Hieraus erhalten wir durch Projection sofort:

Soll auf irgend einer durch P gehenden Geraden S der Punkt P mit drei Schnitten der Geraden und der Basis vier

harmonische Punkte bilden, so giebt es $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ solcher Geraden S.

b) Auf irgend einer Transversale giebt es ferner noch $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ solcher Punkte N, die mit irgend drei der Schnitte der Transversale mit der Basis vier harmonische Punkte bilden. Hieraus folgt:

Dreht sich eine Transversale S um einen Punkt P und bestimmt man zu je drei der Schnitte a, b, c, d... derselben mit der Basis die drei vierten harmonischen Punkte, N, so ist der Ort dieser Punkte eine Curve $n(n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, $N^{n(n-1)(n-2)}_{\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)}$ mit P als $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$fachem Punkte.

c) Die Ortscurve $N^{n(n-1)(n-2)}_{\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)}$ geht auch durch die $n(n-1)$ Berührungspunkte der Tangente von P an die Basis, und hat diese zudem zu $3(n-2)$fachen Punkten. Die übrigen $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Schnitte der Ortscurve und der Basis liegen zu je vier, die eine harmonische Gruppe bilden, auf einer Geraden durch P. Daraus folgt wieder, dass durch P $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$ solche Transversalen hindurchgehen, die die Eigenschaft haben, dass auf ihnen vier harmonische Curvenpunkte liegen, oder:

Der Ort derjenigen Transversale S_1, welche eine gegebene Curve n^{ten} Grades, C^n, in vier harmonischen Punkten schneidet, ist eine Curve $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)^{\text{ter}}$ Classe $S^{\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)}$. (593.)

d) Schneidet eine Wendetangente die Basis in einem weiteren Punkte q, so gehört die Wendetangente der Ortscurve für diesen Punkt q an und überdies ist der Wendepunkt derselben zugleich Berührungspunkt, und zwar tritt für jeden weiteren Punkt, der die Wendetangente mit der Basis gemein hat, eine solche Berührung ein, oder:

Die obige Ortscurve berührt die Basis in ihren Wendepunkten, und zwar in jedem mit $(n-3)$ Zweigen. (593.)

e) S und S_1 mögen irgend zwei solche Transversalen sein, auf denen vier harmonische Punkte a, b, c, d und a_1, b_1, c_1, d_1 liegen. Aus dem Umstande, dass

$$aa_1,\ bb_1,\ cc_1,\ dd_1 \text{ und } S \text{ und } S_1$$

einen Kegelschnitt K^2 berühren, folgt eine einfache Construction des Berührungspunktes jeder Geraden S mit der Ortscurve, wenn wir S mit S_1 zusammenfallen lassen. Ist insbesondere die Gerade S derart gelegen, dass sie die Basis berührt, und deren Berührungspunkt mit drei weiteren Schnitten vier harmonische Punkte bildet, so berührt auch die Ortscurve die Basis in dem Berührungspunkte der Geraden S. Da es für $n > 4$ im Allgemeinen stets solche Tangenten giebt, so berührt für diesen Fall die Ortscurve die gegebene Curve noch in einer bestimmten Anzahl von Punkten. (593.)

XX. Ueber Transversalen, welche mit der Basis C^n vier harmonische Punkte gemein haben.

Ist die Basis vom vierten Grade, so ist die Ortscurve $S^{\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)}$ von der sechsten Classe, also eine S^6, welche die Basis in ihren 24 Wendepunkten berührt. Da weiter die Basis von der zwölften Classe ist, so hat sie mit der Ortscurve 72 Tangenten gemein; diese sind aber die Wendetangenten der Basis, jede dreifach zählend.

Weiter besitzt die Ortscurve keine Doppeltangente und keine Wendetangente, ist also vom 30. Grade und hat mit der Basis ausser deren 24 Berührungspunkten also noch 72 andere Punkte $a_0\,(=a)$ gemein, und die zugehörige Gerade schneidet die Basis noch in drei Punkten b, c, d, die mit a_0 harmonisch sind, und deren zugehörige Tangenten B, C', D schneiden sich in einem Punkte. Durch die 72 Punkte a_0 gehen Curven 18. Grades. (593.)

Dass sich die Tangenten in diesem Falle in einem Punkte schneiden, folgt aus der obigen angedeuteten Construction des Berührungspunktes. Die Curve 18. Grades bildet mit der durch die Wendecurve gehenden Curve sechsten Grades, dieselbe doppelt gezählt, eine Curve 30. Grades u. s. w.

XXI. Ueber Transversalen, welche in einer Basis C^5 vier harmonische Punkte bestimmen.

Ist die Basis vom fünften Grade, so wird sie in jedem ihrer Wendepunkte von der Ortscurve $S^{\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)} = S^{30}$ mit zwei Zweigen berührt. Da die Curve ferner von der 30. Classe ist, so zerfallen ihre 600 gemeinsamen Tangenten derselben mit der Basis in die 45 je sechsfach zählenden Wendetangenten der Basis, und in 165 je zweifach zählende Tangenten, oder:

Bei der Basis C^5 ist die Ortscurve eine S^{30}; sie berührt die Basis in deren 45 Wendepunkten mit je zwei Zweigen und ausserdem noch in 165 Punkten a einfach. (593.)

Daher gilt weiter:

In einer Curve C^5 giebt es im Allgemeinen 165 solche Tangenten, bei welchen der Berührungspunkt a mit den drei anderen Schnitten vier harmonische Punkte bildet. (593.) U. s. w.

XXII. Ueber harmonische Punkte auf den Tangenten einer Basis C^4.

In irgend einer Curve vierten Grades giebt es 32 solche Tangenten, in welchen der Berührungspunkt die Mitte zwischen den beiden anderen Schnitten mit der Basis ist. Bestimmen wir zu den Berührungspunkten a jeder Tangente den vierten, zu ihren weiteren Schnitten harmonischen Punkt, α, so dass also $a b \alpha c$ vier harmonische Punkte sind, so folgt durch Projection

aus dem Obigen sofort, dass auf jeder Geraden 32 Punkte α gelegen sind. Wir erhalten also*:

Der Ort der Punkte α ist eine Curve des 32. Grades, welche die Basis in deren Wendepunkten dreipunktig berührt, und überdies durch die 56 Berührungspunkte ihrer Doppeltangenten geht. (541, 594.)

In einer Basis C^4 giebt es weiter 64 solche Tangenten, in denen irgend einer der beiden Schnitte, etwa b, in der Mitte zwischen dem Berührungspunkte a und dem anderen Schnitt c liegt.** Durch Projection folgt daraus:

Bestimmt man auf einer Tangente einer C^4, welche die Basis in a berührt und in b und c schneidet, zwei Punkte β und γ derart, dass $abc\beta$ und $acb\gamma$ zwei harmonische Punktreihen sind, so ist der Ort der Punkte β und γ eine Curve des 64. Grades, welche die Basis in jedem ihrer Wendepunkte mit zwei Zweigen dreipunktig und in jedem ihrer 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten zweipunktig berührt. (594.)

Die 24 Punkte der Basis, die Wendepunkte sind, liegen auf Curven sechsten Grades, wodurch wieder folgt, dass die 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten der Basis nothwendig auf Curven 14. Grades gelegen sind, indem erstere sechsfach gezählt und letztere zweifach gezählt gerade eine Curve 64. Grades geben.

Weiter erhalten wir sofort:

Die Curve C^4 hat 64 solche Tangenten, in welchen ein Schnitt, etwa b, in der Mitte zwischen dem Berührungspunkte a und dem anderen Schnitte c gelegen ist, und dass diese 64 Tangenten den Asymptoten der Ortscurve parallel sind. (594.)

XXIII. Ueber harmonische Punkte auf einer Basis C^5.

In gleicher Weise erhalten wir aus XX. und anderem, wenn wir für die Curve C^5 in jeder Tangente für deren Berührungspunkte a und deren Schnittpunkte b, c, d die Punkte β, γ, δ so bestimmen, dass:

$$ab\beta c, \quad ac\gamma d, \quad ab\delta d$$

je vier harmonische Punkte sind, den Satz:

Der gemeinsame Ort der drei Punkte β, γ, δ ist eine Curve x^{ten} Grades, welche die Basis in ihren 45 Wendepunkten mit zwei Zweigen dreipunktig und dieselbe in $165.3 = 495$ har-

* Der hier gegebene Satz wurde bereits früher von Hesse im Journal für Mathematik Bd. 36, S. 161, gegeben, und hat Hesse aus demselben dort eine Reihe Folgerungen gezogen.

** Diesen Satz, den Steiner S. 590 giebt, haben wir oben als eine einfache Folgerung aus den Hauptsätzen übergangen.

monischen Schnitten (b, c, d) der vorgenannten 165 harmonischen Tangenten, sowie in den 240 Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneidet, und welche auch die Doppeltangenten doppelt berührt. Jede Tangente der Basis, in welcher zwei der drei Schnitte b, c, d gleichweit vom Berührungspunkte a abstehen, ist einer Asymptote der Ortscurve parallel. (594.)

XXIV. Ueber Transversalen, die eine Basis in Punkten einer Involution schneiden.

a) Die Doppelsehnen einer Curve C^n sind ferner zu je $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ parallel. Durch Projection geht dies über in:

Durch jeden Punkt P gehen $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ solche Transversalen S_x, welche vier solche Punkte a, b, c, d mit einer Curve C^n gemein haben, dass diese vier Punkte sich zu zwei Paaren von Punkten, etwa ab, cd einer Involution, anordnen lassen, die P zum Doppelpunkte hat.

Da auch auf jeder Geraden irgend vier Punkte a, b, c, d sich auf dreierlei Arten zu vier einer Involution angehörigen Punkten ordnen lassen, so erhält man aus diesen vier Punkten sechs Doppelpunkte dieser drei Involutionen. Auf jeder Geraden liegen n Punkte der Basis und diese lassen sich zu $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$mal vier Punkten ordnen, und die Anzahl der zu diesen Punktgruppen gehörigen Doppelpunkte ist somit $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$. Da durch jeden Punkt der Geraden noch $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Gerade S_x gehen, so folgt:

Wird eine Transversale S um einen Punkt P herum bewegt, so beschreiben die zu je vier auf der S gelegenen Curvenpunkte gehörigen sechs Doppelpunkte der Involutionen, die vier Punkte bestimmen, eine Curve $\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Grades $S^{\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)}_{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)}$, welche den Pol zum $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$-fachen Punkte hat.

b) Die Ortscurve hat ferner mit der Basis $\frac{3}{8}n^2(n-1)(n-2)(n-3)$ Punkte gemein. Ziehen wir jedoch von P an die Basis eine Tangente, so kann deren Berührungspunkt a mit irgend zwei Schnitten b und c derselben auf dreierlei Arten zu einer Involution geordnet werden, bei welcher a Doppelelement ist. Da diese Punkte zu $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$mal sich zu Zweien anordnen, ergiebt sich also, dass die Ortscurve die Basis in jedem dieser

Punkte mit $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Zweigen je dreipunktig berührt, oder mit ihr $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)$ Punkte gemein hat. Da es $n(n-1)$ solche Punkte a giebt, so haben wir von den gemeinsamen obigen Punkten $\frac{3}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ abzuziehen und es bleiben noch deren $\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-4)$ übrig, die solche Punkte x der Basis sind, welche Doppelpunkte von einer durch vier andere Schnitte der Basis mit P_x gebildeten Involution sind. Durch P gehen also $\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ solche Transversalen, welche auf der Basis fünf Punkte a, b, c, d, e derart bestimmen, dass einer derselben, etwa a, Doppelpunkt der durch die übrigen gebildeten Involution ist, oder:

Der Ort derjenigen Transversale S_x, bei welcher unter ihren Schnitten mit der Basis fünf solche sind, dass durch dieselben eine Involution bestimmt wird, deren eine Doppelpunkt selbst einer dieser Schnitte ist, ist eine Curve von der $\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^{\text{ten}}$ Classe, $S_x{}^{\frac{3}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$. (595.)

Hiermit haben wir sämmtliche von J. Steiner in seiner Abhandlung: „Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften algebraischer Curven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren“, so weit sie den §§ 26-27 angehören, bewiesen. (Vergl. Steiner's ges. Werke Bd. 2, S. 583—596 oder das Journal für Mathematik Bd. 47, S. 7—108.) Wenn der Altmeister Steiner selbst bemerken zu müssen glaubt, dass vielleicht einige seiner Resultate fehlerhaft seien, so mag es wohl auch dem Verfasser gestattet sein, bei der Schwierigkeit der Behandlung aller hierher gehörigen Fragen für seine Person die gleiche Nachsicht bei etwaigen Unrichtigkeiten zu beanspruchen. Wohl hat er Alles vermieden, was ihm irgendwie fraglich in der Schlussfolgerung erschien, aber bei dem Weg, den er einschlug, um womöglich nur durch geometrische Betrachtungen auf diese Resultate zu kommen, mag auch ihm das eine oder andere Uebersehen zu Schulden gekommen sein, umsomehr, als die hier gegebene Behandlung dieser Fragen auf beinahe vollständig neuer Grundlage sich aufbaut.

Stuttgart, im Juni 1891.

XXIII.

Ueber die Tripel entsprechender Krümmungs-Mittelpunkte, welche bei der ebenen Relativ-Bewegung dreier starrer Systeme auftreten.

Von

Prof. Dr. Rodenberg
in Hannover.

Hierzu Taf. IX Fig. 1—4.

Für die Untersuchung der in der Ueberschrift gekennzeichneten Bewegung hat sich der Begriff des Tripels, d. h. dreier Punkte, von denen je zwei sich als Krümmungs-Mittelpunkte der Relativbewegung der beiden zugehörigen Systeme entsprechen, als besonders zweckmässig erwiesen. Obschon ich in meinem „Beitrag zur systematischen Behandlungsweise der ebenen Relativbewegung starrer Systeme“*, sowie auch früher bereits darauf hingewiesen habe, dass derartige Tripel stets in gewisser Anzahl auftreten müssen, so blieb doch die Frage nach der Construction und der genauen Zahlenangabe der Tripel unerledigt. Nur das Vorhandensein eines stets reellen Tripels auf der Polgeraden der drei Systeme ist auf S. 241 des B. festgestellt worden, und zwar, was wesentlich ist, ohne Bezugnahme auf ein weiteres Tripel.

Auf Grundlage dieser Thatsache soll nun im Folgenden die angegebene Lücke in der Theorie der Tripel ausgefüllt werden. Die Entwickelung wird gleichzeitig die Mittel zu einer befriedigenden Erledigung des besonderen Falles der Bewegung dreier Systeme um drei feste Punkte einer starren Geraden an die Hand geben, dessen kinematische Behandlung bisher noch der nöthigen Strenge entbehrte. Hierbei sei daran erinnert, dass ein Tripel sich während der beiden consecutiven Zeitelemente, welche ja bekanntlich für die ganze vorliegende Frage nur in Betracht kommen, wie ein starres Dreieck verhält, so lange seine Punkte nicht in gerader Linie liegen, während bei dem geradlinigen Tripel auf der Polgeraden im Allgemeinen diese Starrheit nur für eines jener beiden Zeitelemente besteht.

* Siehe diese Zeitschr. Jahrg. 1892 S. 219 flgg. Diese Arbeit soll in Zukunft kurz durch „B.“ bezeichnet werden.

Das letztere Tripel zeigt also einen ganz besonderen Charakter; Sätze, welche für zwei Tripel ausserhalb der Polgeraden gelten, werden hinfällig, wenn eins derselben durch das geradlinige Tripel ersetzt wird, sofern nicht in Folge der besonderen Natur der Bewegung auch dieses Tripel noch während des anderen Zeitelementes starr bleibt. Zur Erleichterung der Ausdrucksweise mag in Zukunft ein während zweier Zeitelemente starr bleibendes Tripel kurz als „starres Tripel" bezeichnet werden.

Den Schluss der Note bildet die wirkliche Durchführung der abgeleiteten Constructionen für ein Beispiel der Bewegung mit lauter reellen Tripeln.

Unter Beibehaltung der im B. eingeführten Bezeichnungen sei in Figur 1 die Bewegung der Systeme $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ in kanonischer Form durch die Pole 12, 23, 31 nebst den Rollcurventangenten $t_{12}t_{23}t_{31}$ und dem Tripel $T_1T_2T_3$ auf der Polgeraden p gegeben. $T_1 23$, $T_2 31$, $T_3 12$ sind dann nach B., Satz 15, drei Punktpaare einer Involution. Ist nun $A_1A_2A_3$ ein Tripel ausserhalb p, so betehen nach $B.$, Satz 16, die Winkelrelationen

$$\angle t_{12} 12 p = \angle A_1\, 12 S = \lambda_{12},$$
$$\angle t_{23} 23 p = \angle A_2\, 23 S = \lambda_{23},$$
$$\angle t_{31} 31 p = \angle A_3\, 31 S = \lambda_{31}.$$

Vermöge der ersten und dritten Gleichung ist, unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Winkel $\lambda_{12}\lambda_{31}$ nach Grösse und Sinn, zwischen den Punkten S und A_1 eine eindeutige quadratische Verwandtschaft V_1 begründet. Denn, durchläuft der eine dieser Punkte eine Gerade, so beschreiben die nicht durch ihn gehenden Schenkel der starren Winkel zwei projective Büschel und erzeugen somit einen jener Geraden entsprechenden Kegelschnitt. Solche Punktpaare SA_1, welche insbesondere mit T_1 auf einer und derselben Geraden liegen, erfüllen zwei sich in V_1 entsprechende Curven s_1a_1 und ebenso giebt es die Curvenpaare s_2a_2, s_3a_3 bez. zu T_2T_3. Ist nun S irgend ein Schnittpunkt von s_1 und s_2, welcher nicht Fundamentalpunkt in einer der beiden Verwandtschaften V_1V_2 ist, so geht durch ihn auch s_3, weil bereits alle Relationen zwischen den Winkeln λ_{ik} benutzt und daher auch erfüllt sind. Zu jedem Punkte S gehört aber dann ein einziges Tripel, dessen Punkte die dem S auf $a_1a_2a_3$ entsprechenden sind und daselbst durch die Strahlen ST_1, ST_2, ST_3 verzeichnet werden. Die Anzahl der Punkte S ist also gleich der Anzahl der Tripel.

Die Curven s_ia_i sind sämmtlich dritter Ordnung. Zur näheren Untersuchung betrachten wir in Fig. 2 das Paar s_1a_1. Sei M der Schnittpunkt von $t_{12}t_{13}$, N sein Spiegelbild in Bezug auf die Polgerade. Dann sind die Fundamentalelemente d. Ebene S: N, 12, 13; $\overline{N12}$, $\overline{N13}$, $\overline{12,13}$ und ihnen entsprechen bez. in der

Ebene A_1: $\overline{12,13}$, $\overline{M13}$, $\overline{M12}$; 13, 12, M.

Dem Strahlenbüschel vom Centrum T'_1 der Ebene S entspricht in der Ebene A_1 ein ihm projectives Kegelschnittbüschel und beide erzeugen die durch die Fundamentalpunkte 12, 13, M gehende Curve dritter Ordnung a_1. Da dem Strahle $\overline{12, 13}$ als Kegelschnitt das Geradenpaar $\overline{12M}$, $\overline{13M}$ entspricht, so sind diese Linien bez. die Tangenten von a_1 in 12 und 13. Da ferner dem Strahle $T_1 N$ die Gerade $\overline{12, 13}$ nebst einer anderen nicht durch T_1 gehenden Geraden als Kegelschnitt entspricht, so ist $T_1 N$ die Curventangente in T_1. Endlich geht a_1 noch durch die imaginären Kreispunkte, da jeder derselben sich selbst in der quadrischen Verwandtschaft zugeordnet ist, und diese Eigenschaft besitzen natürlich auch alle übrigen Curven $s_i a_i$. In Folge der vollkommenen Symmetrie, welche die ganze Figur in Bezug auf die Polgerade zeigt, liegt s_1 zu a_1 symmetrisch, die Angabe von s_1 konnte somit unterbleiben; doch sei hervorgehoben, dass s_1 von $\overline{N12}$ in 12, von $\overline{N13}$ in 13, von MT_1 in T_1 berührt wird. Unter Berücksichtigung des entsprechenden Verhaltens von den übrigen Curven können wir jetzt die Anzahl der in Betracht kommenden Schnittpunkte von $s_1 s_2 s_3$ bestimmen, wobei es nach einer oben gemachten Bemerkung genügt, irgend welche zwei derselben, etwa $s_1 s_2$, zu betrachten. Diese haben ausser den imaginären Kreispunkten noch den Pol 12 und in ihm die Curventangente gemein, schneiden sich also ausserdem noch in $9-2-2.1=5$ Punkten und 5 ist somit die Zahl der eigentlichen Tripel. Folglich:

1. Bewegen sich drei starre Systeme in einer Ebene, so giebt es im Allgemeinen fünf starre Tripel. Ausserdem besitzt jeder der unendlich fernen imaginären Kreispunkte die Eigenschaft eines Tripels. Da von jenen fünf eigentlichen Tripeln mindestens eins reell sein muss, so kann man bei allen Untersuchungen, welche sich auf zwei consecutive Relativbewegungen der drei Systeme beziehen, insbesondere also die Beschleunigungen erster Ordnung betreffen, unter Wahrung der vollen Allgemeinheit voraussetzen, dass sich jene Systeme um die Ecken eines **reellen** starren Dreiecks drehen.

Natürlich kann die Tripelzahl bei speciellen Bewegungen mit unbestimmten Curven $s_i a_i$ auch unendlich gross werden. Ein Beispiel für ein derartiges Verhalten bietet das übergeschlossene Parallel-Kurbelgetriebe. Sind $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ zwei starre congruente Dreiecke mit parallelen homologen Seiten und denken wir die dann ebenfalls parallelen Geraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, welche jene Dreiecke gelenkig zu dem genannten Getriebe mit einander verbinden, bez. den Systemen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ angehörend, so sind alle Punkte dieser Systeme Tripelpunkte. Denn jeder Punkt eines der drei Systeme beschreibt in jedem der beiden anderen einen Kreis und alle aus den beiden ursprünglichen congruenten Dreiecken durch Parallelverschiebung ableitbaren Dreiecke sind, wie jene, Tripel.

Durch das Vorstehende ist zwar im Princip die Construction der Tripel erledigt, der wirklichen Ausführung steht jedoch die Erzeugung der auftretenden Curven dritter Ordnung durch allgemeine Kegelschnittbüschel hindernd entgegen. Diese lassen sich durch die zweckdienlichern Kreisbüschel ersetzen, da die imaginären Kreispunkte den Curven angehören. Wir zeigen eine vortheilhafte Umformung unter Bezugnahme auf Figur 2 für die Curve a_1. M wählen wir als Centrum des erzeugenden Strahlenbüschels, machen T_1 und die Kreispunkte zu drei Basispunkten eines ihm projectiven Kreisbüschels und bestimmen dessen vierten reellen Basispunkt P. Da $M12$ die Curventangente in 12 ist, so entspricht diesem Strahle der ihn in 12 berührende Kreis, und da das Entsprechende für 13 gilt, so ist P als der von T_1 verschiedene Schnittpunkt der beiden Kreise bestimmt. Das dritte zur Bestimmung der projectiven Beziehung nothwendige Elementenpaar ergiebt sich aus der Bemerkung, dass NT_1 die Curventangente in T_1 ist, denn es ist dem Kreise, welcher dort ebenfalls NT_1 berührt, der Strahl MT_1 zugeordnet. Darnach sind die projectiven Gebilde in bekannter Weise zu vervollständigen, am bequemsten wohl, indem man zunächst dem geraden Gebilde 13, T_1, 12 bez. das der Mittelpunkte 13′, T'_1, 12′ zuordnet und dann zum ersten das Strahlenbüschel M perspectivisch legt.

Wir wenden uns nunmehr zum gegenseitigen Verhalten der starren Tripel und denken uns in Figur 3 deren zwei gegeben: $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$. Die Seiten $A_i A_k$, $B_i B_k$ dieser beiden perspectivischen Dreiecke schneiden sich im Pole ik. Das Perspectiv-Centrum S gewinnt ebenfalls die Bedeutung als Pol 45 der beiden starren Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ oder σ_4 und $B_1 B_2 B_3$ oder σ_5, aber derart, dass um ihn zwei consecutive Bewegungen möglich sind. Für diese sind also $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ Normalstrahlen und $S12$, $S23$, $S31$ die den Punktpaaren derselben Ziffern zugeordneten Collineationsachsen, d. h. es bestehen die Winkelbeziehungen

$$\angle A_1 S A_2 = \angle 13\, S\, 23$$
$$\angle A_2 S A_3 = \angle 21\, S\, 31$$
$$\angle A_3 S A_1 = \angle 32\, S\, 12$$

und hiervon ausgehend, kann man sich leicht zwei Tripel herstellen. Man kann aber die Beziehung zwischen drei Normalstrahlen und den ihnen paarweise zugeordneten Collineationsachsen noch in einer etwas anderen, und für das Spätere wichtigen Form ausdrücken, worauf meines Wissens bisher noch nicht hingewiesen worden ist. Sei h nämlich der Halbirungsstrahl des Winkels $A_3 S\, 12$ und schreiben wir die zweite der letzten drei Gleichungen

$$\angle A_2 Sh + \angle h S A_3 = \angle 21\, Sh + \angle h S\, 31,$$

subtrahiren

$$\angle h S A_3 = \angle 21\, Sh,$$

so bleibt $\angle A_2 Sh = hS\,31$, d. h. h halbirt ebenfalls den $\angle A_2 S\,31$ und damit auch $\angle A_1 S\, 23$.

Damit ist aber gesagt:

2. Drei Normalstrahlen der Bewegung zweier starrer Systeme und die ihnen paarweise zugeordneten Collineationsachsen sind sechs Strahlen einer gleichseitig hyperbolischen Involution, und zwar sind immer ein Normalstrahl und die Collineationsachse der beiden übrigen Strahlen einander entsprechend.*

Für die beiden Tripel nimmt dieser Satz die folgende Form an:

3. Zwei starre Tripel und die drei Pole der drei Systempaare werden aus dem Perspectivitäts-Centrum, welches der Polgeraden als Achse zugehört, durch sechs Strahlen einer gleichseitig hyperbolischen Involution projicirt und zwar ist dem Verbindungsstrahle der beiden Tripelpunkte eines beliebigen der drei Systeme der Strahl nach dem Pole der beiden übrigen Systeme zugeordnet.

Die Seiten eines Tripeldreiecks bilden mit der Polgeraden ein vollständiges Vierseit, dessen Ecken aus S durch sechs Strahlen einer gleichseitig hyperbolischen Involution projicirt werden und alle solche Punkte S erfüllen daher eine durch jenes Vierseit bestimmte Focalcurve dritter Ordnung. Dem vorhergehenden Satze kann also auch die folgende Fassung gegeben werden:

4. Irgend zwei starre Tripel liegen derart perspectivisch, dass das Perspectivitäts-Centrum ein Schnittpunkt derjenigen zwei Focalcurven dritter Ordnung ist, welche zwei vollständige Vierseite bestimmen, von denen jedes durch die Seiten eines Tripeldreiecks in Verbindung mit der Polgeraden gebildet wird.

Die Sätze 3 und 4 behalten unverändert ihre Giltigkeit, wenn eins der Tripeldreiecke dem Tripel auf der Polgeraden unendlich nahe rückt,

---

* Bemerkenswerth, wenn auch für den vorliegenden Gegenstand nicht von Bedeutung, ist noch die folgende Beziehung. Die Rollcurventangente t der Bewegung von σ_4 gegen σ_5 ist durch die Gleichungen

$$\angle A_3 S t = \angle 13 S A_1 = \angle 23 S A_2$$

gegeben. Die Strahlen h und t sind im Allgemeinen von einander verschieden, sie fallen aber zusammen, wenn jene drei Winkel gleich $t S 12$ sind. Zur Erkenntniss der entspringenden kinematischen Besonderheit bezeichne man A_i durch kl', kl durch A_i'. Dann heisst das Gleichungssystem:

$$\angle 12' S t = \angle A'_2 S 23' = \angle A'_1 S 13' = t S A'_3.$$

Man hat also genau die frühere Form von rechts nach links geschrieben. D. h.: Fällt die Rollcurventangente mit einem Doppelstrahle der hyperbolischen Involution zusammen, so ist mit der gegebenen Bewegung noch eine andere derart verknüpft, dass für diese die ursprünglichen Normalstrahlen und die ihnen zugeordneten Collineationsachsen ihre kinematische Bedeutung mit einander vertauscht haben, während die Rollcurventangente dieselbe geblieben ist.

aber nach wie vor ein starres bleibt. (In anderer Weise kann es überhaupt sich der Polgeraden nicht nähern, da dort nur ein einziges Tripel vorhanden ist.) Die diesem Tripel angehörige Focalcurve besteht dann aus dem Kreise, welcher die Doppelpunkte der Involution, wie sie auf der Polgeraden durch die Tripelpunkte und Pole gebildet wird, als Endpunkte eines Durchmessers enthält, und der jenen Kreis zur Curve dritter Ordnung ergänzenden Polgeraden. Für die zweite eigentliche Focalcurve ist aber der zu S conjugirte Punkt der gemeinsame Schnittpunkt der Rollcurventangenten, d. h. diese Geraden besitzen im vorliegenden Falle einen gemeinschaftlichen Treffpunkt. Das Gesagte folgt einfach aus der Bemerkung, dass zwei beliebige Seiten des vollständigen Vierseits, etwa die durch 12 gehenden Seiten, Tangenten eines Kegelschnittes sind, welcher S und den ihm conjugirten Punkt zu Brennpunkten hat und der durch den letzten Punkt von 12 ausgehende Strahl mit der einen Tangente denselben Winkel einschliesst, wie der nach S gehende Strahl mit der anderen. Darin liegt aber die Construction von t_{12} und nach Uebertragung auf $t_{23} t_{31}$ die Begründung unserer Behauptung. Unter der Voraussetzung, dass in endlicher Entfernung von der Polgeraden ein reelles Tripel vorhanden ist, haben wir demnach bewiesen:

5. Drehen sich drei starre Systeme während zweier consecutiver Zeitelemente um drei Punkte einer starren Geraden, so gehen die Rollcurventangenten der Relativbewegungen von je zweien der Systeme durch einen und denselben Punkt.

Dass die aufgestellte Beschränkung aber überflüssig ist, erhellt aus der Bemerkung, dass dann, und nur dann eins der fünf starren Tripel der Polgeraden unendlich nahe rückt, wenn die Rollcurventangenten einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt besitzen. Die Strahlen $S12$, $S13$, $S23$ bilden nämlich, wie aus Figur 1 ersichtlich, im vorliegenden Falle bez. die Winkel $\lambda_{12} \lambda_{13} \lambda_{23}$ mit der Polgeraden und S ist das Spiegelbild des Schnittpunktes von $t_{12} t_{13} t_{23}$. Wenn also kein gemeinschaftlicher Schnittpunkt dieser Geraden vorhanden ist, so giebt es stets das oben geforderte reelle Tripel ausserhalb der Polgeraden und die gleichzeitige Annahme der Starrheit von $T_1 T_2 T_3$ erweist sich als unzulässig. Satz 5 gilt allgemein.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass, wenn im Laufe der Bewegung das Tripel auf der Polgeraden einmal zu einem starren wird, eins der fünf immer auftretenden starren Tripel mit jenem zusammenrückt und sich nachher, sobald die Bewegung wieder den allgemeinen Charakter angenommen hat, reell wieder ablöst. Dieses Tripel kann im Uebergangsfalle in der That das alleinig reelle sein; insbesondere trifft dies zu, wenn die mehrfach besagte Involution auf der Polgeraden elliptisch ist,

also nicht durch eine gleichseitig hyperbolische Strahleninvolution projicirt werden kann.*

Ein Zusammenrücken von zwei Tripeln ausserhalb der Polgeraden geht in ganz anderer Weise vor sich. Wir nehmen zu diesem Zwecke wieder Figur 3 und construiren die Rollcurventangenten ($\angle t_{12}\, 12\, A_1 = \angle B_1\, 12\, S$ etc.). Fallen dann in Folge allmählicher Aenderung der Figur unter Festhaltung von S, t_{12}, t_{23}, t_{31}, p, die Punkte $A_1 B_1$ in D_1, $A_2 B_2$ in D_2, $A_3 B_3$ in D_3 zusammen, doch so, dass $D_1 D_2 D_3$ ausserhalb der Polgeraden liegen, so wird $\angle t_{12}\, 12\, D_1 = \angle D_1\, 12\, S$ etc., und die Strahlen durch S können als Collineationsachsen der Tripelstrahlen $D_1 D_2$, $D_2 D_3$, $D_3 D_1$ in Bezug auf sich selbst bezeichnet werden. Daraus entspringt die Vorschrift: Zur Schaffung einer Relativbewegung mit Doppeltripel ausserhalb der Polgeraden schneide man drei Strahlenpaare einer gleichseitig hyperbolischen Involution mit einer nicht durch ihren Träger S gehenden Geraden, der späteren Polgeraden, wähle die Schnittpunkte mit drei Strahlen als Pole 12, 23, 31; nehme ferner auf den ihnen bez. entsprechenden Strahlen drei Punkte $D_3 D_1 D_2$ als Ecken eines Dreiecks an, dessen Seiten durch die, gleiche Ziffern mit ihnen tragenden Pole gehen. Macht man dann endlich $\angle S\, 12\, D_1 = \angle D_1\, 12\, t_{12}$ etc., so sind $t_{12} t_{23} t_{31}$ die Rollcurventangenten einer Bewegung, welche $D_1 D_2 D_3$ zum Doppeltripel hat.

Findet insbesondere die Vereinigung der beiden Tripel der Figur 3 auf der Polgeraden statt, so entsteht eine Unterart der im Satze 5 dargelegten Bewegung und wir erhalten als Ergänzung dieses Satzes:

5a. Drehen sich drei starre Systeme während zweier consecutiver Zeitelemente um drei Punkte einer starren Geraden und wird die durch Drehpunkte und Pole der Relativbewegung von je zweien der Systeme gebildete Involution vom Schnittpunkte der Rollcurventangenten durch eine gleichseitig hyperbolische Strahleninvolution projicirt, so sind in jene Drehpunkte mindestens **zwei** starre Tripel gerückt.

---

* Satz 5 wurde zuerst von Herrn Burmester in seiner Arbeit „Ueber die momentane Bewegung der ebenen Mechanismen“, Prager technische Blätter 1890, Heft 2, ausgesprochen, und als unmittelbare Folge von Satz 16 des B. angesehen. Aber, abgesehen von dem fehlenden Nachweise des stets reellen Tripels ausserhalb der Polgeraden, wird auch der von Herrn Burmester zum Beweise des letzteren Satzes benutzte Gleitpunkt 𝔊 der Polgeraden im kritischen Moment unbestimmt, und die Giltigkeit des Satzes erscheint damit zweifelhaft. Der von mir ursprünglich zur Auffindung von Satz 16 benutzte übergeschlossene Mechanismus erhält für jenen Specialfall unendlich kleine Glieder, so dass ich wegen der Uebertragung des allgemeinen Resultats Bedenken trug. Aber die Thatsache, dass zwei gänzlich verschiedene Methoden hier versagen, macht es wahrscheinlich, dass der in Rede stehenden Bewegung nicht ohne tieferes Eingehen auf die Natur der Tripel beizukommen ist. — Auf den Zusammenhang der Focalcurven mit diesem Problem hat Herr Burmester a. a. O. bereits hingewiesen.

Eine besondere Betrachtung verdienen die Bewegungen, bei welchen eine oder mehrere der Verwandtschaften V_i zwischen den Projectivitätscentren S und den Tripelpunkten, welche den Ausgangspunkt unserer Untersuchung bildeten, involutorisch werden. Dann fallen zwei Curven $s_i a_i$ in eine einzige zusammen, deren Punkte sich involutorisch entsprechen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, wie unmittelbar aus Figur 1 zu entnehmen, dass zwei oder alle drei Winkel λ_{ik} rechte sind. Sei z. B. $\lambda_{12} = \lambda_{13} = 90^0$, so entsprechen sich S und A_1 involutorisch; beide Punkte sind Endpunkte des durch T_1 gehenden Durchmessers eines Kreises, welcher einem Büschel mit den Basispunkten 12, 13 angehört.

Damit ist aber ausgesprochen:

6. Sind zwei der Winkel $\lambda_{ik} \lambda_{il}$, welche die Rollcurventangenten $t_{ik} t_{il}$ mit der Polgeraden einschliessen, rechte, so sind die Curven $s_i a_i$ in derjenigen Focalcurve dritter Ordnung vereinigt, welche den Tripelpunkt T_i auf der Polgeraden zum Focalcentrum und die Pole ik, il zu Basispunkten des dem Strahlenbüschel T_i projectiven und mit ihm die Curve erzeugenden Kreisbüschels hat. Die Punkte der Focalcurve entsprechen sich als S und A_i involutorisch.

Sind insbesondere alle Winkel λ_{ik} rechte, so zeigen alle Curven das in 6 angegebene Verhalten. Dann schneiden sich die Rollcurventangenten in dem unendlich fernen Punkte der Normalen zur Polgeraden und das Tripel $T_1 T_2 T_3$ ist ein starres. Dieser Fall ist in Figur 4 zur Anschauung gebracht, und zwar mit der weiteren Besonderheit, dass T_1 die Mitte zwischen 12, 13 und T_2 die Mitte zwischen 21, 23 einnimmt, wodurch T_3 zum unendlich fernen Punkt der Polgeraden wird. Jede der beiden zu $T_1 T_2$ gehörenden Focalcurven zerfällt dann in die Normale zur Polgeraden des betreffenden dieser Punkte und in den um ihn beschriebenen, die zugehörigen Pole enthaltenden Kreis, während die Curve vom Focalcentrum T_3 aus der unendlich fernen Geraden und einer gleichseitigen Hyperbel mit der rellen Achse 12, 13 besteht. Wie es sein muss, schneiden sich alle drei Curven, als $s_1 s_2 s_3$ aufgefasst, in denselben fünf Punkten $S_a S_b S_c S_d S_{t\infty}$ ausserhalb der Polgeraden, und diesen Punkten sind bez. die Tripel $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3 \ldots T_1 T_2 T_3$ zugeordnet. Die Punkte eines beliebigen Tripels, etwa $A_1 A_2 A_3$, sind dritte Schnittpunkte der Strahlen $\overline{S_a T_1}$, $\overline{S_a T_2}$, $\overline{S_a T_3}$ mit den, jetzt als $a_1 a_2 a_3$ aufzufassenden Curven. Nur für das starre Tripel, welches $T_1 T_2 T_3$ unendlich nahe liegt, tritt bei der vorliegenden speciellen Annahme diese Thatsache nicht klar zu Tage, weil die Strahlen $\overline{S_{t\infty} T_1}$, $\overline{S_{t\infty} T_2}$, $\overline{S_{t\infty} T_3}$ selbst Theile der Curven sind, während im Allgemeinen bei einem vorhandenen Treffpunkte der drei Rollcurventangenten die Curven $a_1 a_2 a_3$ nur in $T_1 T_2 T_3$ bez. von jenen Strahlen berührt werden.

Hannover, den 21. April 1892.

Kleinere Mittheilungen.

XVIII. Verkürzte Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen.

Den von Seidel* und in grösserer Allgemeinheit von Stern** aufgestellten Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen, vermittelst derer zur Berechnung von B_m nur die vorangehenden B_{m-1}, B_{m-2} bis $B_{\frac{m+1}{2}}$ bez. $B_{\frac{m}{2}}$ gebraucht werden, sind, soweit mir bekannt, bisher keine anderen ähnlichen Charakters zugesellt worden. Dies möge nun im Folgenden, und zwar unter Anwendung eines anderen als des bisher verwandten Princips der Differenzreihen, geschehen.

Die Mac-Laurin'sche Summenformel lautet:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} h\{f(a)+f(a+h)+\cdots+f(a+kh)\} &= \int_a^b f(x)\,dx+\frac{h}{2}[f(b)+f(a)] \\ &+B_1\frac{h^2}{2!}[f'(b)-f'(a)]-B_2\frac{h^4}{4!}[f'''(b)-f'''(a)] \\ &+B_3\frac{h^6}{6!}[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)]\mp\cdots, \end{aligned}\right.$$

worin

$$b=a+kh$$

ist, und das Restglied nicht hinzugefügt zu werden braucht, da wir für $f(x)$ eine ganze rationale Function nehmen wollen, so dass die rechte Seite von 1) von selbst abbricht. Indem wir unter p und $q\ (\overline{\gtrless} p)$ positive ganze Zahlen verstehen, nehmen wir an:

$$2)\qquad f(x)=x^p(1-x)^q$$

$$3)\qquad a=0,\quad b=1,\quad h=1,\quad k=1.$$

Dann ist $f^{(n)}x$ für mindestens einen der beiden Werthe $x=0$ und $x=1$ nur in den Fällen von Null verschieden, wenn n zwischen p und $p+q$ einschliesslich der Grenzen liegt. Und zwar ist, mit Fortlassung der sowohl für $x=0$, wie für $x=1$ verschwindenden Glieder:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x)=(n)_{n-p}\,p!\,q(q-1)\ldots(q-n+p+1)(-1)^{n-p}(1-x)^{q-n+p} \\ +\cdots+(n)_q\,p(p-1)\ldots(p-n+q+1)(-1)^q q!\,x^{p-n+q}, \end{aligned}$$

und daher nach leichter Umformung:

---

* Sitzungsberichte d. Akad. d. Wissensch. zu München Bd. VII (1877), S. 157.

** Abhandlungen d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen Bd. XXIII (1878).

$$4)\qquad \begin{cases} f^{(n)}(1) = (-1)^q\, n!\, (p)_{n-q} = (-1)^q\, n!\, (p)_{p+q-n}, \\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-p}\, n!\, (q)_{n-p} = (-1)^{n-p}\, n!\, (q)_{p+q-n}, \end{cases}$$

und folglich, wenn n eine ungerade Zahl ist:

$$5)\qquad f^{(n)}(1) - f^{(n)}(0) = n!\, [(-1)^p\, (q)_{p+q-n} + (-1)^q\, (p)_{p+q-n}].$$

Die linke Seite der Gleichung 1), sowie das dem Integral folgende Glied auf der rechten Seite, verschwinden, und das Integral hat den Werth:

$$6)\qquad \int_0^1 x^p\, (1-x)^q\, dx = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{1}{(p+q)_p\, (p+q+1)}.$$

Nunmehr müssen wir die vier Fälle unterscheiden: 1) p ungerade, q gerade; 2) p ungerade, q ungerade; 3) p gerade, q ungerade; 4) p gerade, q gerade.

Ad 1. n erhält die Werthe:

$$n = p,\quad p+2,\quad p+4,\quad \ldots,\quad p+q-2;$$

dann ist, wenn wir es mit dem Zeichen so einrichten, dass die Bernoulli-sche Zahl mit dem kleinsten Index positiv erscheint:

$$7)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{(p+q)_p\, (p+q+1)} + \dfrac{B_{\frac{p+1}{2}}}{p+1} - \dfrac{B_{\frac{p+3}{2}}}{p+3}[(q)_{q-2} - (p)_{q-2}] \\ \qquad + \dfrac{B_{\frac{p+5}{2}}}{p+5}[(q)_{q-4} - (p)_{q-4}] \mp \cdots + (-1)^{\frac{q-2}{2}} \dfrac{q-1}{2} B_{\frac{p+q-1}{2}}, \\ \hfill q > p, \end{cases}$$

worin $\dfrac{q-p}{2}$ statt $\dfrac{(q)_2 - (p)_2}{q+p-1}$ geschrieben ist.

Ad 2. n erhält die Werthe:

$$n = p,\quad p+2,\quad p+4,\quad \ldots,\quad p+q-1,$$

und es entsteht die Gleichung:

$$8)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{(p+q)_p\, (p+q+1)} + \dfrac{B_{\frac{p+1}{2}}}{p+1}[1 + (p)_q] - \dfrac{B_{\frac{p+3}{2}}}{p+3}[(q)_{q-2} + (p)_{q-2}] \\ \qquad + \dfrac{B_{\frac{p+5}{2}}}{p+5}[(q)_{q-4} + (p)_{q-4}] \mp \cdots + (-1)^{\frac{q-1}{2}} B_{\frac{p+q}{2}}, \\ \hfill q \gtreqless p. \end{cases}$$

Ad 3. n erhält die Werthe:

$$n = p+1,\quad p+3,\quad \ldots,\quad p+q-2$$

und es ist:

$$9)\left\{\begin{aligned}&0=\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{(p+q)_p\,(p+q+1)}+\frac{B_{\frac{p+2}{2}}}{p+2}[(q)_{q-1}-(p)_{q-1}]-\frac{B_{\frac{p+4}{2}}}{p+4}[(q)_{q-3}-(p)_{q-3}]\\&\quad+\frac{B_{\frac{p+6}{2}}}{p+6}[(q)_{q-5}-(p)_{q-5}]\mp\cdots+(-1)^{\frac{q+1}{2}}\frac{q-p}{2}B_{\frac{p+q-1}{2}},\\&\qquad\qquad q>p.\end{aligned}\right.$$

Ad 4). n erhält die Werthe:

$$n=p+1,\quad p+3,\quad p+5,\quad \ldots,\quad p+q-1,$$

und die Gleichung wird:

$$10)\left\{\begin{aligned}&0=\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{(p+q)_p\,(p+q+1)}+\frac{B_{\frac{p+2}{2}}}{p+2}[(q)_{q-1}+(p)_{q-1}]-\frac{B_{\frac{p+4}{2}}}{p+4}[(q)_{q-3}+(p)_{q-3}]\\&\quad+\frac{B_{\frac{p+6}{2}}}{p+6}[(q)_{q-5}+(p)_{q-5}]\mp\cdots+(-1)^{\frac{q+2}{2}}B_{\frac{p+q}{2}},\\&\qquad\qquad q\overline{>}p.\end{aligned}\right.$$

Um nun eine Gleichung zu erhalten, welche möglichst wenige Bernoulli'sche Zahlen enthält, ist in 8) und 10) $q=p$ oder, was bis auf den Factor $\frac{1}{2}$ zu demselben Resultate führt, in 7) und 9) $q=p+1$ zu setzen. Das giebt:

$$11)\left\{\begin{aligned}&B_p-\frac{2(p)_3}{2p-2}B_{p-1}+\frac{2(p)_5}{2p-4}B_{p-2}\cdots\mp\cdots+\left\{\begin{aligned}&(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{2}{p+1}B_{\frac{p+1}{2}}\cdots p\ \text{unger.}\\&(-1)^{\frac{p+2}{2}}\frac{2(p)_{p-1}}{p+2}B_{\frac{p+2}{2}}\cdots p\ \text{ger.}\end{aligned}\right.\\&\qquad\qquad=\frac{1}{(2p)_p\,(2p+1)}.\end{aligned}\right.$$

Wir machen nun noch eine zweite Annahme:

$$12)\qquad f(x)=x^p(2-x)^q,\quad a=0,\quad b=2,\quad h=1,\quad k=2;$$

dann ist die linke Seite von 1):

$$f(0)+f(1)+f(2)=1,$$

das Integral:

$$\int_0^2 x^p(2-x)^p\,dx=2^{p+q+1}\int_0^1\xi^p(1-\xi)^q\,d\xi=\frac{2^{p+q+1}}{(p+q)_p\,(p+q+1)};$$

ferner ist, mit Benutzung der Ausdrücke 4):

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-p}n!\,(q)_{p+q-n}(2-x)^{q+p-n}+\cdots+(-1)^q n!\,(p)_{p+q-n}x^{p+q-n}$$

und daher:

$$f^{(n)}(b)=(-1)^q\,n!\,(p)_{p+q-n}.2^{p+q-n}$$

$$f^{(n)}(a)=(-1)^{n-p}\,n!\,(q)_{p+q-n}.2^{p+q-n}$$

und für ungerades n:

$$f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a) = n!\,[(-1)^p\,(q)_{p+q-n} + (-1)^q\,(p)_{p+q-n}]\,.\,2^{p+q-n},$$

so dass sich diese Differenz von 5) nur durch den Factor 2^{p+q-n} unterscheidet.

Daher nimmt in dem ersten der obigen vier Fälle (p ungerade, q gerade und n successive gleich $p,\ p+2, \ldots p+q-2$) die der 7) entsprechende Gleichung folgende Form an:

$$13)\left\{\begin{aligned}(-1)^{\frac{p+1}{2}} = \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}.2^{p+q+1}}{(p+q)_p\,(p+q+1)} + 2^q\,\frac{B_{\frac{p+1}{2}}}{p+1} + 2^{q-2}\,\frac{B_{\frac{p+3}{2}}}{p+3}\,[(q)_{q-2} - (p)_{q-2}] \\ \pm \cdots + (-1)^{\frac{q-2}{2}}\,2^2_{\frac{q-p}{2}}\,B_{\frac{p+q-1}{2}}; \qquad q > p\end{aligned}\right.$$

ähnliche Formen erhalten die Gleichungen in den anderen drei Fällen. Multipliciren wir nun 7) mit 2^{p+q+1} und ziehen 13) davon ab, so erhalten wir:

$$14)\left\{\begin{aligned}(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 2^q\,(2^{p+1}-1)\,\frac{B_{\frac{p+1}{2}}}{p+1} - 2^{q-2}\,(2^{p+3}-1)\,\frac{B_{\frac{p+3}{2}}}{p+3}\,[(q)_{q-2} - (p)_{q-2}] \\ \pm \cdots + (-1)^{\frac{q-2}{2}}\,2^2\,(2^{p+q-1}-1)\,\frac{q-p}{2}\,B_{\frac{p+q-1}{2}}; \qquad q > p,\end{aligned}\right.$$

ebenso in den anderen Fällen:

$$15)\left\{\begin{aligned}(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 2^q\,(2^{p+1}-1)\,\frac{B_{\frac{p+1}{2}}}{p+1}\,[1+(p)_q] - 2^{q-2}(2^{p+3}-1)\,\frac{B_{\frac{p+3}{2}}}{p+3}\,[(q)_{q-2} - (p)_{q-2}] \\ \pm \cdots + (-1)^{\frac{q-1}{2}}\,2\,(2^{p+q}-1)\,B_{\frac{p+q}{2}}; \qquad q \geqq p.\end{aligned}\right.$$

$$16)\left\{\begin{aligned}(-1)^{\frac{p-2}{2}} = 2^{q-1}(2^{p+2}-1)\,\frac{B_{\frac{p+2}{2}}}{p+2}\,[(q)_{q-1} - (p)_{q-1}] - 2^{q-3}\,(2^{p+4}-1)\,\frac{B_{\frac{p+4}{2}}}{p+4}\,[(q)_{q-3} - (p)_{q-3}] \\ \pm \cdots + (-1)^{\frac{q+1}{2}}\,2^2\,(2^{p+q-1}-1)\,\frac{q-p}{2}\,B_{\frac{p+q-1}{2}}; \qquad q > p.\end{aligned}\right.$$

$$17)\left\{\begin{aligned}(-1)^{\frac{p-2}{2}} = 2^{q-1}(2^{p+2}-1)\,\frac{B_{\frac{p+2}{2}}}{p+2}\,[(q)_{q-1} + (p)_{q-1}] - 2^{q-3}\,(2^{p+4}-1)\,\frac{B_{\frac{p+4}{2}}}{p+4}\,[(q)_{q-3} + (p)_{q-3}] \\ \pm \cdots + (-1)^{\frac{q+2}{2}}\,2\,(2^{p+q}-1)\,B_{\frac{p+q}{2}}. \qquad q > p.\end{aligned}\right.$$

Setzen wir nun wiederum in 15) und 17) $p = q$, oder in 14) und 16) $q = p+1$, so erhalten wir:

$$2\,(2^{2p}-1)\,B_p-\frac{(p)_3}{p-1}2^3\,(2^{2p-2}-1)\,B_{p-1}+\frac{(p)_5}{p-2}2^5\,(2^{2p-4}-1)\,B_{p-2}$$

$$18)\quad \mp\cdots+\begin{cases}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\dfrac{1}{\frac{p+1}{2}}2^p\,(2^{p+1}-1)\,B_{\frac{p+1}{2}}\cdots p \text{ unger.}\\[2ex] (-1)^{\frac{p-2}{2}}\dfrac{(p)_{p-1}}{\frac{p}{2}+1}2^{p-1}\,(2^{p+2}-1)\,B_{\frac{p+2}{2}}\cdots p \text{ ger.}\end{cases}=1.$$

Es möge noch bemerkt werden, dass in dieser Gleichung sämmtliche Glieder auf der linken Seite ausser dem ersten, welches eine ungerade ganze Zahl ist, ganze gerade Zahlen sind. Aus den bekannten Thatsachen nämlich, dass $\frac{2^{2k-1}\,(2^{2k}-1)\,B_k}{k}$ eine ganze, und $2\,(2^{2k}-1)\,B_k$ eine ganze ungerade Zahl ist, folgt leicht, dass auch $\frac{2\,(2^{2k}-1)\,B_k}{r}=g$ eine ganze ungerade Zahl ist, falls $k=2^\alpha r$ (r eine ungerade Zahl) gesetzt wird.* Sodann ist in dem Producte $q!$ höchstens die $q-1^{\text{te}}$ Potenz von 2 enthalten, wenn q eine gerade, und höchstens die $q-2^{\text{te}}$ Potenz, wenn q eine ungerade Zahl (>1) ist. Das allgemeine Glied G_k von 18) ist nun:

$$G_k=2^{2p-2k+1}\frac{(2^{2k}-1)\,B_k}{k}.(p)_{2p-2k+1}=2^{2p-2k-\alpha}.(p)_{2p-2k+1}.g.$$

Ist nun:

$$p\,(p-1)\ldots(2k-p)=2^\beta B \quad (B \text{ eine ungerade Zahl}),$$

$$(2p-2k+1)!=2^\gamma C \quad (C \quad " \quad " \quad "),$$

so ist (für $k<p$): $\gamma \overline{\gtrless} 2p-2k-1$, und, da k ein Factor des Productes $p\,(p-1)\ldots(2k-p)$ ist: $\beta\geqq\alpha$, endlich auch $B:C$ eine ganze ungerade Zahl (da $(p)_{2p-2k+1}$ eine ganze Zahl ist) $=D$, und daher:

$$G_k=2^{2p-2k-\alpha+\beta-\gamma}.D.g=2^\delta.Dg,$$

worin $\delta\overline{\gtrless}1$, und nur für $k=p$: $\delta=0$ ist, womit die obige Behauptung erwiesen worden. Andere Substitutionen für $f(x)$ scheinen immer zu weniger einfachen Gleichungen zu führen.

Königsberg, Januar 1892. LOUIS SAALSCHÜTZ.

XIX. Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses.

Es giebt in der Gauss'schen Flächentheorie zwei Grössen, welche wegen ihrer Unveränderlichkeit bei der Biegung einer Fläche von grösster Wichtigkeit sind.

Die erste, die tangentielle oder geodätische Krümmung, verdanken wir Minding**; die andere, das Gauss'sche Krümmungsmaass, Gauss***

---

* Vergl. die Abhandlung von Worpitzky im Journ. f. Mathem. Bd. 94 S. 203.

** Crelle, Bd. 6.

*** Disquis. gener. Act. XII.

selbst. In neuerer Zeit hat man auf verschiedene Weise diese Invarianten darzustellen gesucht; besonders bemerkenswerth ist die Darstellung von Beltrami* durch Differentialparameter. Bei der Aufstellung solch' wichtiger Grössen mag es von Werth sein, dieselben in einfacherer Weise aufzustellen, als dies von Gauss geschehen ist. Gauss beweist die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses, indem er nachweist, dass der Zähler des Ausdrucks für das Krümmungsmaass nur von den Coefficienten des Linienelements und deren Differentialquotienten abhängt. Faye** hat, wenigstens für convexe (positiv gekrümmte) Flächen, der Pariser Academie einen genetischen elementaren Beweis vorgelegt, dessen Gang der folgende ist: Denkt man sich in einem Punkt einer Fläche und in dem einer andern in gleichem Abstand von der Tangentenebene je einen parallelen Schnitt gelegt, so entstehen zwei Ellipsen als Indicatricen; legt man an dieselben die Tangentenkegel, so sind die Flächenstücke um die Punkte auf einander abwickelbar, wenn diese Tangentialkegel gleiche Abwicklungswinkel haben. Da nun diese Abwicklungswinkel, wie sich herausstellt, proportional den Flächeninhalten der Ellipsen, und diese wieder proportional dem Gauss'schen Krümmungsmaass sind, so erfordert die Möglichkeit der Abwicklung der Flächen gleiches Krümmungsmaass. Dieser Beweis, der natürlich nur für positiv gekrümmte Flächen gilt, scheint mir nicht einwandsfrei zu sein; denn ein Flächentheil einer Fläche mit endlicher Krümmung kann, wenn er auch unendlich klein genommen wird, nicht auf einen Kegel, der ja die Krümmung 0 besitzt, abgewickelt werden. Selbst wenn wir voraussetzen, dass die Kegel gleiche Abwicklungswinkel besitzen, so würden sich doch die Ellipsen beim Aufeinanderlegen der Abwicklungen nicht decken, da nur ihre Inhalte, nicht ihre Umfänge und auch nicht die Mantellinien gleich sind. Im Folgenden geben wir einen Beweis, welcher für negativ und positiv gekrümmte Flächen gilt, und der schliesslich auf einen durch Gauss aufgestellten Ausdruck für das Krümmungsmaass zurückführt. Nimmt man einen beliebigen Flächenpunkt 0 zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so lässt sich die Gleichung der Fläche auf die Form bringen:

$$z = \lambda x^2 + \mu y^2 + \text{höhere Glieder in } x, y, z;$$

die z-Achse ist alsdann Flächennormale; die x- und y-Achsen bestimmen die Fortschrittsrichtungen der Krümmungslinien durch den Ursprung. Die zwei Hauptkrümmungsradien des Ursprungs sind $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\mu$ und gehören den Hauptschnitten $y = 0$ und $x = 0$ an. Zieht man vor der Deformation der Fläche von 0 aus geodätische Linien und um 0 einen geodätischen Kreis mit Radius s, so werden nach der Deformation die ersteren Linien, als kürzeste zwischen zwei Punkten, wieder geodätische Linien der deformirten Fläche sein, und der geodätische Kreis demnach wieder geodätischer Kreis der deformirten Fläche.

* Mathem. Annalen, Bd. I.

** Comptes Rendus XCII, 1019–21.

Entwickelt man nun vor der Deformation den Umfang des Kreises nach Potenzen von s und ebenso nach der Deformation, so müssen, da weder Umfang noch Radius ihre Grösse geändert haben, beide Reihen identisch sein.

Ist nun die deformirte Fläche auf die Form

$$z' = \lambda' x'^2 + \mu' y'^2 + \ldots$$

gebracht, so werden die Coefficienten der ersten Reihe von λ, μ; die der letzten von λ', μ' abhängen; durch Coefficientenvergleichung erhält man dann die gesuchte Function. Die Reihenentwicklungen werden nach steigenden Potenzen von s vorgenommen. Eine durch 0 gehende geodätische Linie der Fläche ist eindeutig bestimmt durch den Winkel φ, welchen das Anfangselement derselben mit der x-Achse macht. Ist also

$$\begin{cases} x = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3 + \ldots \\ y = B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + B_3 s^3 + \ldots \\ z = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + \ldots \end{cases}$$

diese geodätische Linie, so müssen sich die Coefficienten eindeutig bestimmen lassen. Die Gleichungen hierfür erhält man aus den Bedingungen:

1. Für $x = y = z = 0$ muss $s = 0$, $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$, $\frac{dz}{ds} = 0$ sein, also $A_0 = B_0 = C_0 = C_1 = 0$

$$1)\qquad \begin{cases} A_1 = \cos\varphi \\ B_1 = \sin\varphi \end{cases}$$

2. Für jedes beliebige s müssen die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = kf'(x)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = kf'(y)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = -k \quad [f'(z) - 1)]$$

erfüllt sein.

3. Für jedes beliebige s muss die Flächengleichung:

$$z = \lambda x^2 + \mu y^2 + \ldots$$

erfüllt sein.

Die Bedingung 2) giebt, wenn für $k - \frac{d^2z}{ds^2}$ gesetzt wird,

$$2A_2 + 6A_3 s + \ldots = 2\lambda (A_1 s + \ldots).(2C + 6C_3 s + \ldots);$$

woraus:

$$2)\qquad \begin{cases} A_2 = 0 \\ 3A_3 = -2\lambda C_2 A_1 \quad \text{und analog:} \\ B_2 = 0 \\ 3B_3 = -2\mu C_2 B_1. \end{cases}$$

Die Bedingung 3) giebt endlich:

$$3)\qquad \begin{cases} C_2 = \lambda \cos^2\varphi + \mu \sin^2\varphi; \text{ somit} \\ A_3 = -\frac{2}{3}\lambda \cos\varphi\,(\lambda\cos^2\varphi + \mu\sin^2\varphi) \\ B_3 = -\frac{2}{3}\mu \sin\varphi\,(\lambda\cos^2\varphi + \mu\sin^2\varphi). \end{cases}$$

Die geodätische Linie ist daher:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \,.\, s - \frac{2}{3}\lambda \cos\varphi\,(\lambda\cos^2\varphi + \mu\sin^2\varphi)\, s^3 + \ldots \\ y = \sin\varphi \,.\, s - \frac{2}{3}\mu \sin\varphi\,(\lambda\cos^2\varphi + \mu\sin^2\varphi)\, s^3 + \ldots \\ z = (\lambda\cos^2\varphi + \mu\sin^2\varphi)\, s^2 + \ldots \end{cases}$$

Lässt man φ von $\delta\varphi$ wachsen, s aber unveränderlich, so kommt man zu einem benachbarten Punkt des mit s beschriebenen geodätischen Kreises. Die Projectionen des Bogenelements $\delta\sigma$ dieses geodätischen Kreises sind daher:

$$\delta x = \delta\varphi \left[-\sin\varphi \,.\, s + \frac{2}{3}\sin\varphi\,(3\lambda^2\cos^2\varphi - 2\lambda\mu\cos^2\varphi + \lambda\mu\sin^2\varphi)\, s^3 + \ldots \right.$$

$$\delta y = \delta\varphi \left[\cos\varphi\, s - \frac{2}{3}\cos\varphi\,(3\mu^2\sin^2\varphi - 2\lambda\mu\sin^2\varphi + \lambda\mu\cos^2\varphi)\, s^3 + \ldots \right.$$

$$\delta z = \delta\varphi \left[-2\sin\varphi\cos\varphi\,(\lambda - \mu)\, s^2 + \ldots \right.$$

also

$$\delta\sigma = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} = s\,\delta\varphi \sqrt{1 + \frac{4}{3}\lambda\mu s^2 + \ldots}$$

Die Wurzel nach Potenzen von s entwickelt:

$$\delta\sigma = s\,\delta\varphi\,(1 + \frac{2}{3}\lambda\mu s^2 + \ldots$$

also:

$$\sigma = s\int_0^{2\pi}\delta\varphi + \frac{2}{3}\lambda\mu s^3 \int_0^{2\pi}\delta\varphi + \ldots$$

$$= 2\pi s + \frac{4}{3}\lambda\mu s^3 \pi + \ldots$$

Für die deformirte Fläche $z' = \lambda' x'^2 + \mu' y'^2 + \ldots$ wird analog:

$$\sigma = 2\pi s + \frac{4}{3}\lambda'\mu' s^3\pi + \ldots,$$

und da beide Reihen für jedes beliebige s übereinstimmen müssen, so muss:

$$4\lambda\mu = 4\lambda'\mu'$$

sein, d. h. das Krümmungsmaass bleibt bei der Deformation ungeändert.

Der obige Ausdruck für $\delta\sigma$ gestattet eine Darstellung des allgemeinen Linienelements dS in geodätischen Coordinaten s und φ; da nämlich

$dS^2 = ds^2 + \delta\sigma^2$ ist, so ist $dS^2 = ds^2 + \left[s^2 + \frac{2}{3}\lambda\mu s^3 + \ldots \right]^2 \delta\varphi^2.$

Setzt man nun $g = s^2 + \frac{2}{3}\lambda\mu s^3 + \ldots$, so wird die Krümmung

$$4\lambda\mu = \frac{1}{g} \left.\frac{\delta^2 g}{\delta s^2}\right|_{s=0},$$

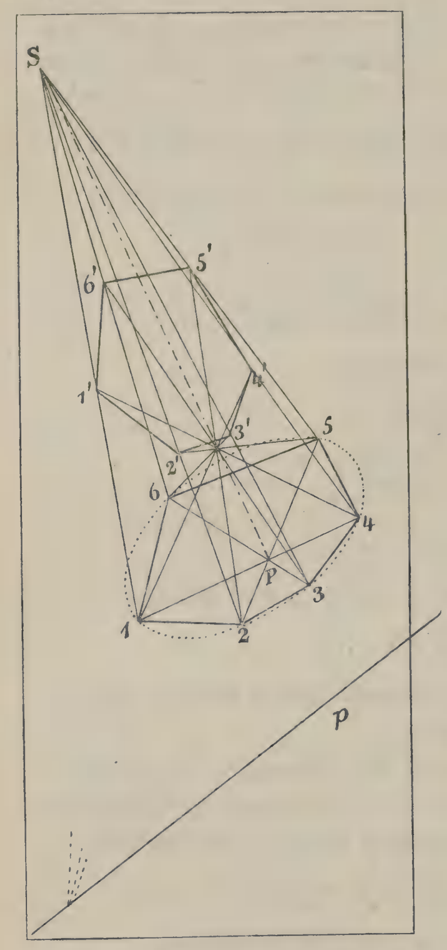
was mit dem Gauss'schen Ausdruck Disquis. general. Act. XIX übereinstimmt.

Cannstatt, Februar 1892. Dr. Ruoss.

XX. Ueber einen stereometrischen Satz von Schlömilch.

(27. Jahrg., S. 380.)

Eine Erweiterung des a. a. O. mitgetheilten Satzes von der vierseitigen Pyramide dürfte folgendes Theorem sein:



Liegen $2n$ Punkte

$$1,\ 2,\ 3\ldots n,\ (n+1),\ (n+2)\ldots 2n$$

auf einem Kegelschnitte, und sind dieselben auf diesem so gruppirt, dass immer je zwei:

$$1 \text{ u. } (n+1),\ 2 \text{ u. } (n+2)\ \ldots\ n \text{ u. } 2n$$

mit einem beliebig angenommenen festen Punkte P in der Ebene des Kegelschnittes in einer geraden Linie liegen, und construirt man nun die Verbindungslinie p aller derjenigen Punkte, welche in Gemeinschaft mit P bezw. die Punktpaare 1 und $(n+1)$ 2 und $(n+2)$ etc. harmonisch trennen, d. h. die Polare p des Punktes P in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt, so kann man von einem Punkte S im Raume die $2n$ Punkte durch Strahlen projiciren; legt man jetzt durch p eine beliebige Ebene, welche die entstandene Pyramide in einem Polygon mit den Ecken

$$1',\ 2',\ 3'\ldots n',\ (n+1)'\ldots(2n)'$$

schneidet, und wählt die Bezeichnung derselben so, dass jedes Punktpaar

$$1 \text{ u. } 1',\ 2 \text{ u. } 2',\ 3 \text{ u. } 3'\ldots 2n \text{ u. } (2n)'$$

mit S auf einem Projectionsstrahle liegt, so treffen sich die Verbindungslinien

$$1(n+1)',\ \ 2(n+2)'\ldots n(2n)'$$
$$(n+1)1',\ \ (n+2)2'\ldots (2n)n'$$

in einem Punkte des Strahles SP.

Eisenach. Dr. Carl Hossfeld.

XXI. Kriterien der Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

Das in Heft 2, Seite 128 dieses Jahrganges unter diesem Titel angegebene Verfahren kann auch so geändert werden, dass man über (unter) die gegebene eine grössere durch n theilbare Zahl setzt. Man wird dann die mittleren Stellen mit Nullen ausfüllen. Zweckmässig wendet man beide Arten vermischt an.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} Z = 41\,33\,58\,82;\; n = 7. \\ 42\,00\,00\,42 \\ \hline 66\,41\,6 \\ 63\,75\,6 \\ \hline 2\,66 \end{array}$$

Ferner sei bemerkt, dass das Weglassen der Nullen am Ende nur gestattet ist, wenn n weder 2 noch 5 als Factoren enthält. Wäre beim dritten Beispiel, S. 128 unter 48, statt 28 die Zahl 98 gesetzt worden, so hätte man aus

$$\begin{array}{r} Z = 57\,87\,02\,34\,8;\; n = 14 \\ 56\,84\,85\,49\,8 \\ \hline 1\,02\,16\,85 \end{array}$$

gefunden, dass 14 nicht in Z enthalten wäre.

Ebenso ist in folgenden Beispielen das Weglassen der Null nicht zulässig.

$$\begin{array}{r} Z = 68\,74\,70;\; n = 35; \\ 70\,00\,70 \\ \hline 1\,26\,00 \\ 1\,40\,00 \\ \hline 14\,00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} Z = 63\,20\,96;\; n = 32. \\ 64\,00\,96 \\ \hline 80\,00 \end{array}$$

Da aber in diesen Fällen die so rasch zum Ziele führende Verkürzung der Stellenzahl wegfiele, entfernt man aus n die Factoren 2 und 5, deren Vorhandensein in Z einfach nachweisbar ist (2 und 5 müssen in der letzten, 4 und 25 in den zwei letzten, 8 und 125 in den drei letzten Ziffern enthalten sein etc.), und wendet dann für n_1, das keine 2 und 5 mehr enthält, die Regel mit Fortlassung der Nullen an:

$$Z = 16\,56\,09\,76\,25\,0;\; n = 175 = 5^2.7$$

$$50 : 25 = 2, \text{ also } n_1 = 7.$$

$$\begin{array}{r} 14\,98\,79\,85\,25 \\ \hline 1\,57\,29\,91 \\ 1\,49\,17\,91 \\ \hline 8\,12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} Z = 51\,44\,17\,80; \\ 52\,00\,07\,8 \\ \hline 5\,59 \end{array} \quad \begin{array}{l} n = 260 = 4\,.\,5\,.\,13 \\ 80 : 20 = 4, \text{ also } n_1 = 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} Z = 89\,35\,76\,97\,6; \\ 92\,00\,00\,04\,6 \\ \hline 2\,64\,23\,07 \\ 2\,53\,02\,07 \\ \hline 11\,21 \\ 11\,50 \\ \hline 29 \end{array} \quad n = 92 = 4.23 \qquad 76 : 4 = 19, \text{ also } n_1 = 23.$$

92 ist nicht in Z enthalten.

Karlsruhe i. B. J. Dörr, cand. math.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXXVII. Jahrgang.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1892.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Philosophie und Pädagogik.

Geschichte der Mathematik.

Arithmetik, Algebra, Analysis.

Synthetische, analytische, descriptive, praktische Geometrie. Geographie.

Mechanik, Physik, Technik.

Historisch-literarische Abtheilung.

Bemerkungen zur Rhythmomachie.

Von

Dr. E. Wappler

in Zwickau.

Herimann der Lahme hat mehrere mathematische Schriften hinterlassen. Hiervon sind die Bücher über das Astrolabium schon im vorigen Jahrhundert von Pez* herausgegeben worden. In neuester Zeit hat Treutlein** die REGVLE HERIMANNI. QVALITER MVLTIPLICATIONES FIANT IN ABACO veröffentlicht. Noch unedirt ist Herimann's Rhythmomachie. Dass Herimann über die Rhythmomachie geschrieben hat, bezeugt zuerst Jakob Philipp von Bergamo***. Von diesem wird Herimann eine Abhandlung De conflictu rythmimachiae beigelegt. Der Zweite, der Herimann als Verfasser einer Rhythmomachie nennt, ist Trithemius†. Nach diesem hat Herimann einen Tractat De conflictu rythmimachiae verfasst, der beginnt: Qui peritus arithmet. Ein Manuscript mit der Ueberschrift: DE CONFLICTU RITHMIMACHIĘ und dem Anfang: Qui peritus arithmeticę huius inuentionis noticiam curet habere findet sich im cod. Monac. 14836 s. XI Bl. 3′–4′. Dieses Manuscript ist zwar anonym, doch sprechen dafür, dass Herimann der Verfasser desselben ist, ausser den angeführten Zeugnissen noch zwei Umstände. Erstens stammt der cod. Monac. 14836 aus dem Jahrhundert, in das Herimann's Lebenszeit fällt, und zweitens enthält er neben dem beregten Manuscript drei andere Manu-

* Thesaurus anecdotorum novissimus. T. III, p. II. Augustae Vindelicorum et Graecii 1721, p 93–140.

** Intorno ad alcuni scritti inediti relativi al calcolo dell' abaco im Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. T. X, p. 643–647.

*** SVPPLEMENTVM Supplementi Chronicarum ab ipso Mundi Exordio vsque ad redemptionis Nostrae Annum. M.CCCCC.X. Venetiis 1513. Bl. 208.

† Catalogus scriptorum ecclesiasticorum. Coloniae 1531, p. 64. — Trithemius ist wieder der Gewährsmann für Mezler (De viris illustribus monasterii S. Galli libri II bei Pez, Thes. anecdot. nov. T. I, p. III, p. 582), Egon (Liber de viris illustribus monasterii Augiae maioris bei Pez, Thes. anecdot. nov. T. I, p. III, p. 688), Jöcher (Allgemeines Gelehrten-Lexicon. Leipzig 1750. Zweiter Theil. S. 1535), Fabricius (Bibliotheca Latina mediae et infimae aetatis. Patavii 1754. T. III, p. 238) und Neugart (Episcopatus Constantiensis. S. Blasii 1803. T. I, p. I, p. 514).

scripte, die sicherlich Herimann gehören*. Die Schrift De conflictu rythmimachiae muss ziemlich verbreitet gewesen sein, da sich von ihr auch Handschriften in Paris, Montpellier, Avranches und Rom finden**. Sie hat jedenfalls die Grundlage zu einer zweiten, im 11. Jahrhundert verfassten Rhythmomachie gebildet. Ein Exemplar davon ist enthalten im cod. Monac. 14836 und zwar von Bl. 4′—6′. Dieses Exemplar hat den Titel: ITĒ DE RIHTM̄ und beginnt: Quinque genera inequalitatis ex equalitate procedere manifestum est. ex libris arithmetice. multiplex. superparticulare. superparciens. Sed reiectis duobus compositis. ex tribus simplicibus huiusmodi conflictum. quidam ex clero Wir^s^hiburgensi. si periti iudicent dabit posteritati. Andere Exemplare von der in Rede stehenden Rhythmomachie werden in Paris, Rom und Dresden aufbewahrt***. Cod. Paris. 7377 C, dem 13. Jahrhundert angehörend, fängt so an (Bl. 17′): Quinque genera inequalitatis ex equalitate procedere manifestum est ex libris arithmeticę multiplex. superparticulare. superpartiens. multiplex superparticularis. multiplex superpartiens. Sed reiectis. duobus. compositis. ex tribus simplicibus huiusmodi conflictum. quidam ex clero Wirzeburgensi nomine asilo. si periti iudicentur dabit posteritati. Eine Note, die auf dem linken Rande von Bl. 17′ steht, enthält gleichfalls den Namen Asilo. Da diese Note noch nicht genau mitgetheilt worden ist†, so lasse ich dieselbe vollständig abdrucken. Ihr Wortlaut ist der folgende:

---

* Von Bl. 16′—24 erstreckt sich der Liber Herimanni de mensura astrolabii; auf Bl. 144′—156′ und 1—2 befindet sich ein Fragment der Libri duo Herimanni de utilitatibus astrolabii; Bl. 6′—10′ umfasst die REGVLE HERIMANNI. QVALITER MVLTIPLICATIONES FIANT IN ABACO, denen jedoch der Anfang (ABBACI tabula tali linearum distinctione diuisa est — ipse summam ueraciter diffiniuit multiplicationis) fehlt (vergl. auch Treutlein a. a. O. S. 591 und 592). Diese Manuscripte sind ebenfalls ohne Angabe des Verfassers.

** Vergl. Pertz Archiv Bd. VIII, S. 382—383 und Bd. XII, S. 232—233 und 297—298. Der cod. Paris. 7185[7] scheint im 12. Jahrhundert gefertigt zu sein. Die im 15. Jahrhundert geschriebene Handschrift 830 der Arsenalbibliothek in Paris hatte früher die Signatur: 55 S. A. L. Der ehemals als Nr. 145 bezeichnete Codex der Stadtbibliothek in Avranches trägt jetzt die Nr. 235. Die Handschrift 366[3] der Bibliothek der medicinischen Schule in Montpellier entstammt dem 14. Jahrhundert.

*** Vergl. Pertz Archiv Bd. VIII, S. 382—383 und Bd. XII, S. 232—233. Im cod. Paris. 7185 schliesst sich an die Rhythmomachie des Herimann die des Würzburger Geistlichen an. Beide Stücke sind bis jetzt als ein einziges aufgefasst worden. Aehnlich dürfte es sich auch verhalten mit cod. 830[3] der Arsenalbibliothek in Paris und cod. Chr. 598 der Vatikanischen Bibliothek in Rom. Das der Königl. öffentl. Bibliothek in Dresden gehörige Exemplar findet sich im cod. C 80 s. XV Bl. 258—258′.

† Vergl. Pertz Archiv Bd. VIII, S. 383 und Peiper, FORTOLFI RYTHMIMACHIA in der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Supplement zur historisch-literarischen Abtheilung des XXV. Jahrgangs. S. 215.

cęsar
Nomen id expelle. quod dicis ∧ aselle. Asilo dicor ego. cui si tria. grammata tollo A. remanebit et. O. quid erit prestantius illo.

Die Rhythmomachie des Asilo hat Odo mit geringen Aenderungen in seine Regulae de Rhythmimachia aufgenommen*. Um dies augenscheinlich zu machen, theile ich ein paar Stellen aus beiden Schriften mit. Man liest in der

Rhythmomachie des Odo	Rhythmomachie des Asilo
Sit tabula ad latitudinem longitudine distincta campis, super qua ex alterutra parte disponantur in ultimis locis omnes species trium generum, multiplicis, superparticularis et superpartientis, usque ad decuplam proportionem (Gerbert I, p. 285).	Sit tabula ad longitudinem et latitudinem distincta campis. supra quam ex ulterutra parte disponantur usque ad decuplam. proportionem. omnes trium generum predictorum species (Cod. Monac. 14836 Bl. 4′—5).
Item retro minores nigros octo existant maiores albi ex genere superparticulari, ut sesquitertii iuncti sint triplis, sesquiquinti quincuplis, sesquiseptimi septuplis, sesquinoni nonuplis (p. 285).	Item retro nigros ex eodem genere .VIII. maiores existant albi. ut sesquitercii iuncti sint triplis. sesquiquinti quincu^{p}lis. sesquiseptimi septuplis. sesquinoni nonuplis (Bl. 5).
In illa parte, ubi ex pari habent denominatas proportiones, est XCI. pyramis (p. 286).	In illa parte ubi denomi^{n}tantur proportiones omnes ex pari. posita ^{est} XCI. pyramis perfecta (Bl. 5′).
Nemo existimet, me inconfuse et inordinate hos calculos posuisse (p. 286).	Nemo arbitretur confuse et inordinate numeros hos positos esse (Bl. 6′).
Qui quaerit binariam monadem, si ternariam triplicet, si quaternariam quadruplicet, si quinariam quintuplicet, si senariam sescuplicet (p. 286).	Qui desiderat superficiem binariam. duplicet monadiam. si ternariam. triplicet. si quaternariam. quadruplicet. si quinariam. quin^{c}duplicet. si senariam. sescuplicet (Bl. 6′).

Da Odo die Rhythmomachie eine novella plantatio nennt**, so kann er nicht lange nach Asilo geschrieben haben. Wenn nun dieser die Rhythmomachie vor 1077 bearbeitete***, so ist es sehr wahrscheinlich, dass die REGULAE DOMNI ODONIS DE RHYTHMIMACHIA noch dem 11. Jahr-

* Odo's REGULAE DE RHYTHMIMACHIA wurden von Gerbert (Scriptores ecclesiastici de musica. T. I. San-Blasianis 1784, p. 285—295) aus einem Wiener Codex s. XIII edirt. — Dass Odo in seine Arbeit die eines anderen Schriftstellers aufgenommen, hat bereits Friedlein (Das Rechnen mit Columnen vor dem 10. Jahrhundert in der Zeitschrift für Mathematik u. Physik. IX. Jahrg. S. 327) erkannt.

** Vergl. Gerbert T. I, p. 292.

*** Nach Bethmann (Pertz Archiv Bd. XII, S. 232) ist der cod. Vat. Lat. 3101, der unter anderm die Rhythmomachie des Asilo enthält, „im Jahre 1077 von Benedictus accolytus mon. S. Arsacii in Süddeutschland geschrieben."

hundert angehören. Eine weitere Stütze hierfür glaubte ich in dem Stück zu finden, welches cod. Monac. 6369 s. XI Bl. 66—66′ enthält. Ich bin jedoch in meiner Erwartung getäuscht worden. Das fragliche Stück ist nicht, wie sich nach Peiper* annehmen lässt, „eine wörtliche Abschrift einiger Capitel von Odo's Werk". Damit ein Jeder die Richtigkeit meiner Behauptung prüfen kann, setze ich das betreffende Stück vollständig hierher. Dasselbe lautet:

Ex innumera uarietate numerorum.pauci et numerabiles inuenti sunt. qui sibi ad efficiendam musicam conuenirent. Sunt autem omnes sex.Epitritus. Emiolius. Duplaris. Triplaris. Quadruplaris. Epogdous. Est epitritus cum, de duobus numeris.maior habet totum minorem**.et insuper eius terciam partem.ut sunt.IIII ad. III; nam in.IIII.sunt.III.et tercia pars trium. id est.I. et hic numerus uocatur epitritus.de quo nascitur simphonia quę appellatur diatessaron; Emiolius est cum, de duobus numeris. maior habet totum minorem*** et insuper eius medietatem.ut sunt. III. ad. II; nam in. III. sunt. II. et media pars eorum.id est. I. ex quo nascitur simphonia que appellatur diapente; Duplaris numerus est cum de duobus numeris minor bis in maiore numeratur.ut sunt. IIII. ad. II. et ex hoc nascitur simphonia cui nomen est diapason.Triplaris autem cum de duobus numeris minor quater in maiore numeratur.ut sunt. III. ad. I. et ex hoc procedit simphonia quę dicitur diapason kai Kediapente. Quadruplaris est cum de duobus numeris minor quater in maiore numeratur.ut sunt. IIII. ad. I. qui numerus facit simphoniam quam dicunt bis diapason; Epogdous est qui intra se habet minorem.et insuper eius octauam partem.ut.VIIII. ad.VIII. quia in VIIII.VIII. sunt.et insuper octaua pars eorum id est.I. hic numerus sonum parit. quem tonvm musici uocauerunt. Sunt igitur simphoniae VI.id est. Diatesseron Diapente.Diapason.Diapason Kediapente. Bis diapason.Epogdous. Sed hic numerus simphoniarum ad musicam petinet.quem vel flatus humanus intendere vel capere potest humanus auditus. Simphonia diatesseron.constat ex duobus tonis et semitonio.et fit ex epitrito. Diapente autem ex tribus tonis et semitonio et fit de emiolio. Diapason constat ex quinque tonis et duobus semitoniis minoribus et fit ex du plari.Diapason Kediapente ex octo tonis et tribus semitoniis minoribus et fit de triplari. Diapason continet tonos. X. et quattuor semitonia minora. Epogdous continet tonum.

Meiner Meinung nach ist das eben mitgetheilte Stück der Harmonica Institutio des Regino Prumiensis†, die jedenfalls auch Odo benutzt hat††, entlehnt†††.

---

* A. a. O. S. 217.

** minorem corrigirt aus minorum.

*** minorem corrigirt aus minorum.

† Vergl. Gerbert T. I, p. 237—238 und 239.

†† Vergl. Gerbert T. I, p. 287—288.

††† Das Stück, welches Gerbert T. I, p. 25 aus einer Wiener Handschrift s. XIII veröffentlicht hat, ist nicht von Isidor von Sevilla. Wenn es von ihm

Im 12. Jahrhundert schrieb Fortolfus eine „Rhythmimachia“. Seine Arbeit hat Peiper* nach der Handschrift der Stadtbibliothek zu Breslau n^{0} 54 s. XII herausgegeben. Fortolfus stimmt mit Odo und Asilo in drei Stellen fast wörtlich überein**. Man vergleiche:

Fortolfus	Odo	Asilo
Duobus igitur huic tabulae assidentibus legitimi ex alterutra parte alternatim fiant tractus, ita ut multiplices trahantur in secundum campum, in ante, retro, dextrorsum, sinistrorsum, angulariter; superparticulares eodem modo in tercium, superpartientes in quartum (Peiper S. 179).	His ita dispositis legitimi fiant tractus ex alterutra parte alternatim, ut multiplices trahantur in secundum ante retro, dextrorsum, sinistrorsum, angulariter: superparticulares in tertium, superpartientes in quartum (Gerbert I, p. 285).	His ita dispositis ex alterutra parte alternatim trahuntur omnes species multiplicis. in ante. retro. dextro^{r}sum sinistro^{r}sum . angulariter. in campum secundum. superparticularis in tercium superparcientis in quartum (Cod. Monac. 14836 Bl. 5′).
Quicumque ergo numerus contrariae partis numerum suo legitimo tractu offenderit, auferat eum (S. 180).	Quicumque numerus contrariae partis numerum in suo legitimo cursu offendit, illum, qui sit eiusdem quantitatis auferat (p. 285—286).	Quicumque numerus in suo legitimo tractu alium eiusdem quantitatis offendat auferat (Bl. 5′).
Tali praedae subiaceant omnes pariter pares uel pariter impares, impariter pares, secundi et compositi. Soli primi et incompositi uagentur tuti, nisi ita sunt aduersariis septi, ut per legitimos tractus euadere non possint (S. 182).	Tali praedae subiacent omnes pariter partes, aut pariter impares, vel secundi et compositi; sed primi et compositi vagentur tuti, non ita sint adversariis circumsepti, ut per legitimos cursus non possint evadere (p. 286).	Tali prede subiaceant omnes pariter pares. vel pariter impares. vel impariter pares. vel secundi et compositi. soli primi et in^{com}positi uagentur tuti. nisi ita undique sint circumsepti aduersariis. ut per legitimum tractum non possint euadere (Bl. 6).

wäre, so fehlte es sicher nicht in dem 1483 zu Venedig gedruckten liber etymologiarum Isidori hispalensis episcopi. Möglicherweise ist es den REGULAE DOMNI ODONIS DE RHYTHMIMACHIA entnommen (vergl. dazu Gerbert T. I, p. 287—288). Hierfür spricht besonders seine Ueberschrift. Dieselbe lautet: Hoc excerptum est de Rhythmimachia. Aus den Rhythmomachien des Herimann und Asilo kann das in Rede stehende Stück deshalb nicht entlehnt sein, weil es sich darin nicht findet. Dasselbe gilt von den drei Rhythmomachien, von denen nun im Texte zu handeln ist.

* A. a. O. S. 169—197.

** Die Uebereinstimmung zwischen Fortolfus und Odo hat schon Peiper S. 179, 180 und 182 bemerkt.

Aus dem 12. Jahrhundert stammt auch eine anonyme Rhythmomachie. Beleg dafür ist die Handschrift, welche im Libri'schen Katalog (1859) unter Nummer 483 beschrieben wird*. Ein zweites Exemplar von der in Frage stehenden Rhythmomachie enthält ohne Zweifel das Msc. Dresd. C 19 Nr. 3 s. XV. In demselben liest man:

Non aliter rithmachia presentat opere Arithmetice quam Musica in cytharis et organis et dependet musicis instrvmentis.et geometria in Abaci opere et astronomia in horoscopis et astrolabij solercia consistit (Bl. 1).

(I)Nuentor ludi Boecius apud Romanos fuit (Bl. 1).

Nach Libri (S. 104) stand in der erwähnten Handschrift:

Non enim aliter arismetice opus rithmachia representat quam musica in cytharis et organis, et geometria in abaci opere et astronomia in hoscopis et astrolabii sollertia consistit. Inventor ludi hujus apud Romanos Boetius fuit, quemadmodum arismetice apud Graecos Pytagoras et Nicomacus et alii quapropter his premissis ad negotium transeamus.

Das beregte Dresdner Manuscript hat noch:

Ex parte imparium multiplices.tripli quincupli septupli (Bl. 1').

Piramis alia par alia impar | Par est qui paris numeri aggregacione constat (Bl. 4').

In dem Facsimile, welches Libri (pl. XXIX) von der Handschrift n⁰ 483 giebt, ist zu lesen:

imparium multiplices.tripli quincupli septupli.

Pyramis alia par.alia impar.par.que**.

Das Msc. Dresd. C 19 Nr. 3 zerfällt in 48 Abschnitte. Die Ueberschriften der 48 Abschnitte lauten wörtlich:

1. Prelocucio De Rithmachia (Bl. 1).
2. De Nomine et materia ludi (Bl. 1).
3. De intencione et fine et cui parte philozophie supponatur (Bl. 1).
4. De inventore ludi (Bl. 1).
5. De Tabula Rithmachie (Bl. 1').
6. De Numeris Tabule (Bl. 1').
7. Quid Numerus et diuisio eius (Bl. 1').
8. Diuisio paris et impais numeri et de pariter pari (Bl. 1').
9. Sic cognoscas pariter pares (Bl. 2).
10. De Pariter impari (Bl. 2).
11. Vt scias vnde nascantur (Bl. 2).
12. De impariter pari et eius natiuitate (Bl. 2).
13. Quod predicti ex parte vtraque numeri inueniantur (Bl. 2).

---

* Auf diese Handschrift bin ich durch Peiper S. 213—214 aufmerksam geworden.

** Zwei weitere, aber weniger belangreiche Uebereinstimmungen zwischen dem Facsimile von der Handschrift n⁰ 483 und dem Dresdner Manuscript C 19 Nr. 3 werde ich später erwähnen.

14. Diuisio imparis numeri et de primo et incomposito (Bl. 2′).
15. De Secundo et incomposito (Bl. 2′).
16. De per se secundis compositis ad alios primis ‖ et in compositis (Bl. 2′).
17. Quid sit quod parium et imparium species in tabula confuse inveniuntur (Bl. 2′).
18. De primis et incompositis et perfectis et diminutis et superfluis (Bl. 2′).
19. Vnde cognoscas perfectos (Bl. 3).
20. De numeris relatiuis et quid multiplex uel superparticularis (Bl. 3).
21. Quid Numerus superparciens (Bl. 3).
22. Quid alij multiplices superparticulares et multiplices superparcientes (Bl. 3).
23. De Natiuitate numerorum ‖ ad aliquid (Bl. 3).
24. Regula natiuitatis ipsarum (Bl. 3).
25. De recte positis superparticularibus et superparercientibus (Bl. 3′).
26. De Reuocacione numerorum in suam originem (Bl. 3′).
27. Regula Reuocacionis (Bl. 3′).
28. Racio tractuum in tabula (Bl. 4).
29. De his qui licite in omnes campos eunt (Bl. 4).
30. Quomodo eant piramides (Bl. 4).
31. De Trigonis (Bl. 4).
32. Quomodo trianguli et multanguli fiant (Bl. 4).
33. Quomodo ex triangulis formentur omnes (Bl. 4′).
34. De Solidis numeris et Piramide (Bl. 4′).
35. Diffinicio diuersorum solidorum numerorum (Bl. 5).
36. De Spericis Numeris (Bl. 5).
37. De constitucione Cuborum (Bl. 5).
38. Regule aufferendi in tabula.et de Armoniaca inferendi (Bl. 5).
39. Quod nullus numerus armoniam ledere potest (Bl. 5).
40. Quid sind Medietates (Bl. 5).
41. Quot sint Medietates (Bl. 5′).
42. De Arithmetica medietate (Bl. 5′).
43. De Geometrica (Bl. 5′).
44. De Armonica (Bl. 5′).
45. Qui ex parte parium trium medietatum sint numeri (Bl. 5′).
46. Qui ex parte Imparium (Bl. 5′).
47. Quarum medietatum numeri magis uel minus habundent (Bl. 5′)
48. De consonancijs que sunt in armoniacis medietatibus (Bl. 5′).

Die Prelocucio De Rithmachia * beginnt mit den Worten (Bl. 1) (Q)Vandoquidem fortiter in theatro philosophię sudantes ardua. Der Ab-

---

* Libri's Handschrift n° 483 hatte den Titel: Incipit Rithmachia. Vergl. pl. XXIX.

schnitt De Nomine et materia ludi fängt so an (Bl. 1): (N)Omen ludi est Rithmachia: Et dicitur Rithmachia quasi numerorum pugna Nam Rith numerus machia pugna interpretatur Pugnat quippe ibi pulcherrime virtus numeri Materia est par et impar numerus. Der Abschnitt De intencione et fine et cui parte philozophie supponatur schliesst mit den Worten (Bl. 1): Non aliter rithmachia presentat opere Arithmetice — et astrolabij solercia consistit. Der Abschnitt De inventore ludi beginnt (Bl. 1): (I)Nuentor ludi Boecius apud Romanos fuit cuius petre ac tabule pro memoriali aduc seruantur et ostenduntur in palacio Salustiano Romę. Der Abschnitt, der die Ueberschrift hat: Regule aufferendi in tabula. et de Armoniaca inferendi, fängt so an (Bl. 5): (M)Odo post multa dicendum est quomodo numerus numerum auffert Trahe eos sicut trahendi sunt quod prediximus. et istas serua regulas Quicumque numerus contrarie partis numerum eiusdem quantitatis in suo legittimo tractu offendit auffert eum. Der letzte Abschnitt beginnt (Bl. 5′): (P)roponamus duas armonias parem et imparem und schliesst (Bl. 6): Nam par armonia propter impares partes Impar dicetur et econuerso*. Auf dem rechten Rande von Bl. 1 steht von der Hand Johann Widmann's von Eger**:

Hic habetur quod nisi arte maxima compertus Rithmachię ludum non attingat.
Hic ponit nominis Interpretationem.
Hic quę sit ludi istius materiam ostendit.

Da Widmann auch den Abschnitten, welche betitelt sind: Regula natiuitatis ipsarum, De Solidis numeris et Piramide und De constitucione Cuborum Figuren hinzugefügt hat, so dürfte die Annahme nicht ungerechtfertigt sein, dass das Dresdner Manuscript C 19 Nr. 3 einst im Besitze Widmann's gewesen ist.

Der cod. Paris. 7377 C, welcher, wie erwähnt, dem 13. Jahrhundert angehört, enthält auf Bl. 16—17 auch eine anonyme Rhythmomachie. Diese beginnt ohne Titel: Omnis inęqualitas ex ęqualitate procedit. ut boetius in libris arithmeticę. dicit. Inequalitatis species. V. sunt. Multiplex. superparticularis Superparciens. Multiplex. superparticularis. Multiplex superparciens Sed tribus primis et simplicibus assumptis. ex his uero compositis duabus reiectis. quidam si iudicio placet sapientium. huiusmodi constituit numerorum conflictum. Vergleicht man damit den Anfang der Asilo'schen Rhythmomachie (s. S. 2), so bemerkt man eine grosse Aehnlich-

---

* Libri's Handschrift n⁰ 483 endigte: tur Explicit liber feliciter. Amen; Vergl. pl. XXIX.

** Widmann's Handschrift kenne ich aus dem cod. Dresd. C 80. In diesem Codex sind mehrere Stücke und zahlreiche Notizen von Widmann eigenhändig geschrieben. Vergl. dazu mein Programm: Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. Zwickau 1887 und meine Abhandlung: Beitrag zur Geschichte der Mathematik in der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Supplement zur historisch-literarischen Abtheilung des XXXIV. Jahrgangs.

keit. Bl. 16′ endigt mit den Worten: Ex impari proportione minimi erunt nigri. VIII. medii albi. VIII. maximi uiridis coloris. VIII. und Bl. 17 fängt so an: ę medietates armonicę. Ex pari proportione statuendę sunt
tripli dupli tripli dupli quincupli
.II.III.VI.vel.VI.VIII:XII.vel.IIII.VI.XII.vel.XV.XX.XXX.vel.VIIII.XV.XlV.
Zwischen maximi uiridis coloris. VIII. und ę medietates armonicę ist meines Erachtens eine kleine Lücke. Der Schluss stimmt mit einer Stelle von Odo's Regulae de Rhythmimachia fast völlig überein. Er lautet: Ex pari proportione. II. ab hostibus undique circumuentus captiuatur. Vnus. IIII. cum pyramide cadit. alter. IIII. potest ab hostibus obsideri. non tamen auferri. VI. per ternarium in secundo campo cadit. VIII. per coniunctos. V. et III. — . CXXI. per XVI. in septimo. remanente. VIIII. vel. C. XX. per. XX. in sexto. CXXV. per XXV. in nono. CCClXI. per XlVIIII. in septimo. remanente. XXV.* Ausser der in Rede stehenden ist mir keine Rhythmomachie aus dem 13. Jahrhundert aufgestossen. Peiper** irrt, wenn er behauptet, Jordanus Nemorarius habe eine Rhythmomachie verfasst. Die Schrift, welche Jacobus Faber Stapulensis unter dem Titel: Rithmimachie ludus qui et pugna numerorum appellatur edirt hat***, ist nicht von Jordanus. Wenn sie von ihm wäre, so stände sicher am Ende: Rithmimachie Jordani Finis und nicht blos Rithmimachie Finis. Die drei anderen Schriften, welche zusammen mit dem Rithmimachie ludus qui et pugna numerorum appellatur gedruckt worden sind, haben am Schluss: Decimi elementorum Arithmetices Jordani finis, Quarti elementorum Musices Jacobi Stapulensis finis und Epitomes librorum Arithmeticorum Boetij finis.

Im 14. Jahrhundert ist nach dem Werke von Asilo eine siebente Rhythmomachie verfasst worden. Von derselben kenne ich vier Manuscripte; eins findet sich im cod. Ampl. Q 2 s. XIV Bl. 37—37′†, eins im cod. Ampl. Q 325 s. XIV Bl. 45 und 46′††, eins im cod. Dresd. C 80 Bl. 267′—268 und ein viertes im Codex 830 der Bibliothèque de l'Arsenal in

---

* Vergl. dazu Gerbert T. I, p. 286 und 287.

** A. a. O. S. 224.

*** Es giebt zwei Ausgaben. Beide erschienen in Paris (1496 und 1514). Ich citire nach der zweiten Ausgabe.

† Zu diesem Manuscript gehören noch ein Abschnitt (Ita tamen quod sicut maximus se habet ad minimum — has itaque victorias seu armonias studiosi lectoris ingenio relinquimus assignandas) von Bl. 1 und drei Figuren (die Hauptfigur stellt die Tafel des Spieles dar) auf Bl. 1′.

†† Dieses Manuscript beginnt ohne Titel: ℂ quinque sunt genera inequalitatis ex equalitate procedere secundum arismetice libros est manifestum ⫶ sunt autem hec genus multiplex genus superparticulare genus superpartiens genus multiplex superparticulare genus multiplex superpartiens ⫶ relictis itaque duobus compositis ex tribus simplicibus restat dicendum ⫶ ... ex hijs tribus generibus scilicet ex multiplice et superparticulari et superpartienti nascitur quidam conflictus qui richmarchia nuncupatur id est numerorum pungna und schliesst: has itaque victorias siue armonias studiosi lectoris ingenio relinquimus assignandas quas super pre-

Paris*. Diese Manuscripte, welche sämmtlich anonym, sind wahrscheinlich Abschriften von der Rhythmomachie des Thomas Bradwardinus. Auf diese Vermuthung haben mich zwei Handschriften gebracht, welche früher in der Bibliotheca Amploniana zu Erfurt vorhanden waren**. Die eine dieser Handschriften enthielt: Item liber profundi mathematici Bracwerdin de rithmimachia, id est de pugna numerorum, optimus. Calculus Victorii de arismetrica. Tractatus Boecii de numero, pondere et mensura totus arismetricus. Tota arismetrica Boecii cum figuris et notis ut supra und die andere: Item commentum super tractatum Bracwerdin de rithmimachia. Algorismus de minuciis per totum. Liber de proporcionibus bonus. Practica geometrie. Canones astrolabii cum multis aliis. Questiones super spera materiali. Commentum bonum super computo cyrometrali. Breviloquium Almanzoris in astrologia***.

Ein Anonymus, der im 15. Jahrhundert gelebt, hat die Rhythmomachie des Asilo durch Zusätze erweitert. Seine Arbeit ist enthalten im cod. Vindob. 5216 s. XV Bl. 59—62. Der Titel des Ganzen lautet: De Ludo Richomachie und der Anfang: QVinque genera Inequalitatis ex equalitate procedere manifestum est ex libris arismetrice multiplex | superparticulare | Superparciens | Multiplex superparticulare Multiplex superparciens Si reiectis duobus...compositis ex tribus simplicibus huiusmodi conflictum quidam ex clero Wirtembergensi† Si periti Iudicent dat posterioritati. Die

missa sereno cordis oculo nullatenus ignorabit et hec de rithmachia intellegenti lectori dicta sufficiant.

* Mittheilungen über dieses Manuscript verdanke ich Herrn Henri Martin in Paris.

** Nach Pommersfelden, wo mehrere Amplonianische Handschriften sich befinden, sind die in Frage stehenden nicht gekommen (Briefliche Mittheilung vom Gräfl. v. Schönborn'schen Domänenamt in Pommersfelden).

*** Vergl. Schum, Beschreibendes Verzeichniss der Amplonianischen Handschriftensammlung in Erfurt. Berlin 1887. S. 798 und 799. — Das Stück, welches im cod. Ampl. Q 2 Bl. 38—50′ — ich zähle die angehefteten Zettel, auf denen Glossen von zweiter Hand stehen, nicht als Blätter — umfasst, beginnt ohne Titel: Ouidius qui philosophus fuit atque poeta und schliesst: Pondere mensura numero qui cuncta creauit Explicit theorica numerorum Magistri bragwerdin. Amplonius hat es, obwohl in ihm die Rhythmomachie mit keinem Worte erwähnt wird, bezeichnet als: Liber metricus Rithmimachie i. e. de pugna numerorum, optimus et subtilissimus profundi mathematici Bragwerdin, deserviens valde premissis libris Ovidii de vetula et arismetrice (vergl. Schum a. a O. S. 791). Zur Aufstellung dieses falschen Titels ist Amplonius jedenfalls durch den Index veranlasst worden. In demselben liest man (Vorderseite des Vorblattes): 2° liber Rithmimachie id est de pugna numerorum.profundi mathematici Bragwerdinj et deseruit libris de vetula.econtra liber de vetula ipsi. Da mit n° 2 ohne Zweifel das Stück gemeint ist, welches von Bl. 38—50′ sich erstreckt, so hat auch der Schreiber des Index sich geirrt.

† Die Bezeichnung wirtembergensis stimmt nicht zu der Vermuthung Peiper's (a. a. O. S. 215 und 216), dass man bei dem vielfach genannten Asilo an Adalbero, Grafen von Lambach, der 1045 Bischof von Würzburg wurde, denken könne.

Zusätze beginnen (Bl. 60′): Sequitur prima regula Ex pari proporcione binarius ab hostibus vndique circumuentus captiuatur vnus quaternarius cum piramide 91. cadit | alter potest ab hostibus obsideri non tamen aufferri | trinarius aduersarie partis senarius In campo. Secundo | bis In tria 6. sunt | nouenarius In tercio | ter quippe. 3. nouem erunt und endigen (Bl. 61′): Superoctiparciens 289 ad 153 Superans eum octo partibus id est octies 17 nonies 17 153 Sepcies decies 17. 289. Supernoniparciens 361 ad 190 Superans eum. 9. partibus id est nonies 19 361 Si quis hec plane viderit Richomachiam scire valebit et cetera. Den Schluss des Ganzen bilden drei Figuren. Hiervon stellt die Hauptfigur die Tafel des Spieles dar*.

Dem 16. Jahrhundert gehört die erste Bearbeitung der Rhythmomachie in deutscher Sprache an. Sie rührt von Abraham Riese, dem zweiten Sohne des Rechenmeisters Adam Riese, her. Die beiden Theile, aus denen sie besteht, bilden zusammen den cod. Dresd. C 433 s. XVI. Der erste Theil (Bl. 2 – 21′) ist betitelt: Arithmomachia Durch Abraham Riesen und der zweite (Bl. 26—44′): Endliche erclerung Churfurstlicher Sexischer Arithmomachiae. Durch Abraham Riesen Anno 1562. Der Titel des zweiten Theils lässt vermuthen, dass die ganze Arbeit für Kurfürst August gemacht worden ist**. Abraham Riese benutzte entweder das Werk des Asilo oder eine Nachbildung dieses Werkes. Dies erhellt schon aus dem Anfang seiner Arithmomachia. Derselbe lautet folgendermassen (Bl. 2—2′): Das die funff genera Proportionis inaequalitatis, aus der Proportion aequalitatis ihren vrsprung haben, Daruon ist genugsam in Arithmetica Speculatiua gehandelt. Die funff genera aber Proportionis inaequalitatis seind, Multiplex, Superparticulare, Superpartiens, Multiplex superparticulare, vnd Multiplex Superpartiens. Vnder diesen seind Drey genera, als Multiplex, Superparticulare, vnd superpartiens. Zwischen welchen ein Kampf, schlacht vnd streich aus Zwiespaltt, von wegen der geraden vnd vngeraden tzalen sich ehrheben, Vnd dieser kampff wurdt Arithmomachia genandt.

Im Anschluss an die vorstehenden Bemerkungen erlaube ich mir, den vollständigen Text der Rhythmomachien des Herimann und Asilo aus der Münchener Handschrift n⁰ 14836 mitzutheilen.

---

* Die Zusätze des Anonymus und einiges andere findet man in der Dresdner Handschrift C 80 auf Bl. 259—265′. Zur Ausfüllung des leeren Raumes von Bl. 260 und 260′ hat Johann Widmann von Eger Bemerkungen (sind von Bl. 263 abgeschrieben) und eine Figur (stellt die Tafel der Rhythmomachie dar) beigefügt. Bemerkt sei noch, dass Bl. 258—258′ (vergl. dazu Seite 2, Note 3) und Bl. 259—265′ zwei verschiedene Hände geschrieben haben.

** Eine weitere Stütze hierfür liegt darin, dass Abraham Riese auf Wunsch des Kurfürsten August die in den Dresdner Handschriften C 81 und C 81ᵇ enthaltenen „künste“ verfasst hat. Die von Berlet (Ueber Adam Riese. Programm der Realschule zu Annaberg für 1855. S. XXXI) aus diesen „künsten“ mitgetheilten Worte habe ich mit einigen Abweichungen in der Handschrift C 81 auf Bl. 76 gefunden.

Bl. 3'. || DE CONFLICTU RITHMIMACHIĘ.

Qui peritus arithmeticę huius inuentionis noticiam curet habere. certus sit omnes species trium generum. multiplicis. superparticularis. superpartientis. usque ad decuplam proportionem in hoc conflictu repperiri. ita. ut consti-
5 tuantur ex altera parte tabulę q[qve] denominantur ex pari. ex altera q[ve] ex inpari. Species multiplicis legitimos tractus habeant in ante. retro. dextrosum; [sinistrorsum] angulariter in campum secundum. superparticularis in tercium. superpartiens[ti] in quartum. Quicumque numerus ex altera parte alium numerum eiusdem quantitatis per hos tractus offendat. auferat.
10 Et si numerus contrarię partis circumponatur partibus que multiplicatę aut coniunctę effic,[i]ant eiusdem summam auferatur. aut si quantitas camporum interiacentium alienum et proprium cum proprio multiplicata alieni efficiant. summam auferatur. In illa parte tabulę ubi omnes species denominantur ex pari. posita est py[ra]mis. XCI. Quam si offendat sua basis.
15 XXXVI. aut numerus qui cum quantitate interiacentium camporum basim
Bl. 4. efficiant. | non solum pyramidem. sed omnes tetragonos unde existat auferat. Idem fiat de puranude [piramide] contrarię partis. CXC. cuius basis est lX[u]IIII. Qui tendat ad ui[c]toriam ex alterutra parte omnibus; modis [vel motis] prime positionis locis. studeat in parte contrarię medietatis efficere. armonicam arithmedicam[ti ce].

2) inuentionis corrigirt aus inuenti. — 13) auferatur corrigirt aus auferat.

---

1) DE CONFLICTU RITHMIMACHIĘ] LVDVS QVI DICITVR RITHMIMACHIA *P* (mit *P* bezeichne ich den cod. Paris. 7185). — 2) arithmeticę] arhimeticę *P*; inuentionis] inuenti *P*; curet] curat *P*. — 3) superpartientis] superparcientis *P*. — 4) repperiri] reperire *P*. — 5) q[qve]] quę *P*; pari] inpari *P*; ex vor altera fehlt in *P*; q[ve]] quę *P*. — 6) inpari] pari *P*. — 7) angulariter] [sinistrorsum] sinistrosum. angulariter *P*. — 8) superpartiens[ti]] superparcientis *P*. — 9) eiusdem] eiusque *P*. — 10) que] quę *P*. — 10-11) multiplicatę] multiplicate *P*. — 11) coniunctę] iunctę P; effic,[i]ant] faciant *P*; aut] Aut *P*. — 13) efficiant] efficiat *P*; species] denominatiui *P*. — 14) pari] inpari *P*; py[ra]mis] piramis *P*; XCI] nonaginta unus *P*. — 15) XXXVI] triginta sex *P*; interiacentium camporum] camporum interiacentium *P*. — 15-16) basim efficiant] efficiat basim *P*. — 16) pyramidem] piramidem *P*; vor omnes hat *P* noch: et; existat] existit *P*. — 17) puranude [piramide]] pira... e *P*; CXC] centum nonaginta *P*; lX[u]IIII] sexaginta quattuor *P*. — 18) tendat] tendit *P*; ui[c]toriam] uictoriam *P*; modis [vel motis]] modis *P*; prime] primę *P*; positionis] posicionis *P*. — 19) contrarię] contraria *P*; medietatis] medietates *P*; hinter armonicam steht in *P* noch: et; arithmedicam[ti ce]] arimeticam[l] *P*.

minimo
Quarum utraque in tribus termi constans . maximo . medio . ~~teeinme~~ . tali diligentia ponenda est. ut nullus ex alienis terminis possit interrepere. Et
vel ex terminis utraque
qui primus ex terminus ponitur indicetur aduersario. In altera parte copia
t
est arithmedicam cum propriis efficere. Ad armonicam necesse est acquirere
I
unum per predam. ut cum in altera parte sint armonici VIII . et VI . ex 5
t
altera parte XII. sit acquisitus. Idem ad XV . et XX . XXX . ad XXV . et X*l*V . CC . XXV . ad VII . et XII . X*l*II . ad XC . et XXX . X*l*V . Quorum omnium proprietas est. ut sicut maximus est ad minimum . ita differencia sit maximi
t
et medii ad differenciam medii et minimi . Arithmedicorum autem quoniam facilior inuentio est . unum pono exemplum . ut *l*VI . XXXVI . XVI . Quorum 10 proprietas est ut differencia que est inter maximum . et medium . sit inter
vel get
medium et minimum . || Ceteros inuestiger si quem his diligentiam adhibere Bl. 4'.
test
delectat. Qui sic non possit uenire ad uictoriam perfectam . et maximam conetur ponere armoniam. que . IIII . existens terminis . XII . VIIII . VIII . VI. ternas in se continet medietates . et insuper omnium musicarum proportiones simphoniarum. 15

1) Nach termi findet sich das Zeichen ,. Unter Wiederholung dieses Zeichens steht auf dem rechten Rande: nis.

---

minimo
1) termi] terminis *P*; vor constans hat *P* noch: est; ~~teeinme~~] minimo *P*; hinter
vel ex terminis utraque
minimo steht in *P* noch: Et; tali] talis *P*. — 3) ex terminus] ex terminis *P*; altera]
t
utraque *P*. — 4) arithmedicam] arhimeticam *P*; cum propriis fehlt in *P*; armonicam]
I
armoniam *P*; acquirere] adquirere *P*. — 5) predam] prędam *P*; VIII] nouem *P*; VI] sex *P*.
t
— 6) parte fehlt in *P*; XII] duodecim *P*; sit acquisitus] adquirendi sunt *P*; Idem] Item *P*. — 6-7) XV . et XX . XXX . ad XXV . et X*l*V . CC . XXV . ad VII . et XII . X*l*II . ad XC . et XXX . X*l*V] quindecim . et uiginti . triginta. Ad uiginti quinque. et quadraginta quinque . ducentos uiginti quinque Ad septem et duodecim . quadraginta duo Ad nonaginta . et triginta . quadraginta quinque. — 7) vor Quorum hat *P* noch: Ad uiginti v . et ducentos uiginti quinque . quadraginta quinque. 8) differencia] differentia *P*. — 9) differenciam] differentiam *P*; medii] maximi
t
P; Arithmedicorum] Arhimeticorum *P*; quoniam] quia *P*. — 10) *l*VI. XXXVI. XVI] quinquaginta. sex. triginta sex. sedecim *P*; Quorum] quorum *P*. — 11) differencia] dif-
vel get
ferentia *P*; que] quę *P*. — 12) inuestiger] inuestiget *P*. — 13) delectat] delectet *P*;
test
possit] possit *P*. — 14) IIII] quatuor *P*; XII . VIIII . VIII . VI] duodecim . nouem septem. sex *P*. — 15) continet] recontinet *P*; proportiones simphoniarum] symphoniarum proportiones *P*.

vt *l*XV.VIIII.V.*l*XXXI.VIIII.etVIII.XV.III.et V.XC.VI.et XV. C.XXV.et IIIIXVI.IIII.et III[I].C.XXVI.et XX.VIIII.V.et III.XVI.VIIII et VII.*l*XXXI.*l*VI.XXXIII.et XX.XXVIII.XX.et VIII. Pyramis XCI.cons(a)tṭt ex teragonis.XXXVI.XXV.XVI.VIIII.III.I.et uocat

5 perfecta.cuius basis est XXXVI. Basi latera VIIII.et III. Pyramis.CXC. constat ex teragonis X*l*IIII.(x*l*VIIII) x*l*VIIII.XXXVI.XXV.XVI.et tercurta uocatur. Cuius basis est *l*XIIII.basi latera.VIII.et XVI.

ITE̅ DE RIHTM̅.

Quinque genera inęqualitatis ex equalitate procedere manifestum est.ex

10 libris arithmetice.multiplex.superparticulare.superparciens. Sed reiectis duobus compositis.ex tribus simplicibus huiusmodi conflictum.quidam ex clero Wir(s)hiburgensi.si periti iudicent dabit posteritati. Sit tabula ad longitudinem et

Bl. 5. lati ‖ tudinem distincta campis.supra quam ex ulterutra parte disponantur usque ad decuplam.proportionem.omnes trium generum predictorum species. Hinc

10 Nach superparciens steht das Zeichen ђd und auf dem unteren Rande steht nach dem Zeichen ђђ Folgendes: multiplex (sub) superparticulare.multiplex (sub) superpartiens.

1-3) vt *l*XV.VIIII.V.*l*XXXI.VIIII.et VIII.XV.III.et V.XC.VI.et XV. C.XXV.et IIIIXVI.IIII.et III[I].C.XXVI.et XX.VIIII.V.et III.XVI.VIIII.et VII.*l*XXXI.*l*VI.XXXIII.et XX.XXVIII.XX. et VIII] ut quadraginta quinque. nouem.et quinque.octoginta unus.nouem.et nouem.quindecim.tres.et quinque. nonaginta.sex.et quindecim.centum uiginti v.et quatuor.sedecim.quatuor.quatuor.centum uiginti.sex.uiginti.ducenti uiginti quinque.nouem.duodecim.et nouem.quinque.et quatuor.sedec(i)ęm.nouem.septem.octoginto unus.quinquaginta. sex.et uiginti quinque quinquaginta sex.et uiginti quinque quinquaginta sex. triginta unus.uiginti.uiginti octo.uiginti.et nouem *P*. — 4) Pyramis] Piramis *P*; XCI] nonaginta *P*; cons(a)ttt] constat *P*; teragonis] tetragonis *P*; XXXVI.XXV. XVI.VIIII.III.I] triginta sex.uiginti quindecim.nouem.quatuor.unus *P*; uocat] uocatur *P*. — 5) XXXVI] triginta sex *P*; Basi] basis *P*; VIIII. et III] nouem.et tres *P*; Pyramis] Piramis *P*; CXC] centum nonaginta *P*. — 6) teragonis] tetragonis *P*; *l*XIIII.(x*l*VIIII) x*l*VIIII.XXXVI.XXV.XVI] sexaginta nouem.uiginti VI.uiginti quinque.sedecim *P*; tercurta] tercurtata *P*. — 7) *l*XIIII] sexaginta IIII *P*; basi] basis *P*; VIII. et XVI] octo.et sedecim *P*. — 8) ITE̅ DE RIHTM̅]REGVLA DE RITHMACHIA id est de numeri pvg(na) *p* (mit *p* bezeichne ich den cod. Paris. 7377 C). — 9) equalitate] ęqualitate *p*. — 10) arithmetice] arithmeticę *p*; superparciens] superpartiens *p*; vor Sed hat *p* noch: multiplex superparticularis.multiplex superpartiens. — 11-12) Wir(s)hiburgensi] Wirzeburgensi *p*. — 12) vor si steht in *p* noch: nomine asilo; iudicent] iudicentur *p*; ad] in *p*; longitudinem longitudine *p*. — 13) latitudinem] latitudine *p*; vor distincta hat *p* noch: ut cernitis; ulterutra] alterutra *p*; nach parte steht in *p* noch: in ultimis campis. — 14) trium generum predictorum] predictorum trivm generum *p*; Hinc] Hic *p*. —

VIII . albi minores ex pari denominatas habentes proportiones . duplam vt IIII . ad II . quadruplam vt XVI . ad IIII sescuplam vt XXXVI . ad VI . octuplam ut lXIIII . ad VIII. His opponantur eiusdem generis VIII . nigri . minoris ex impari denominatas habentes proportiones . triplam . vt VIIII . ad III . quincu[p]lam . vt XXV . ad V . septuplam . vt XlVIIII . ad VII . nonu[p]lam . ut . lXXXI . ad VIIII. Retro albos . VIII . existant rubri ex genere superparticulari . ut sesqualteri iuncti sint duplis . sesquiquarti quadruplis . sesquisexti sescuplis . sesquioctaui octuplis. Item retro nigros ex eodem genere . VIII . maiores existant albi . ut sesquitercii iuncti sint triplis . sesquiquinti quincu[p]lis . sesquiseptimi septuplis . sesquinoni nonuplis. Retro rubros . VIIII . existant maiores nigri ex genere superparcienti . ut superbiparcientes sesquiquartis . supersexpa[r]cientes sesquisextis . superoctoparcientes sesquioc || tauis. Item retro albos maiores . VIII . existant ex eodem Bl. 5'. genere coloris et uiridis . ut supertriparcientes iuncti sint sesquiterciis . super, [quinque] partientes sesquiquintis . superseptemparcientes sesquiseptimis . sesquinonis . super VIIII . parcientes. His ita dispositis ex alterutra parte alternatim trahuntur omnes species multiplicis . in ante . retro . dextro[r]sum sinistro[r]sum . angulariter . in campum secundum . superparticularis in tercium superparcientis in quartum. Et si per hos legitimos tract[v]us aliquem con-

11-12) Nach superbiparcientes findet sich das Zeichen :. und unter Wiederholung dieses Zeichens steht auf dem unteren Rande Folgendes: iuncti sint sesqualteris . superquadripartientes.

---

1) VIII] octo *p*; minores] minore *p*; habentes] multiplices ostendant *p*; vt] ut *p*. — 2) vt] ut *p*; sescuplam] Sescuplam *p*; vt] ut *p*. — 3) opponantur] oppona[n]rtur *p*. — 4) minoris] minores *p*; vt] ut *p*. — 5) quincu[p]lam] Quincuplam *p*; vt] ut *p*; septuplam] Septuplam *p*; vt] ut *p*. — 6) nonu[p]lam] Nonuplam *p*. — 7) superparticulari] superparticul' *p*; sesquiqarti] Sexquiquarti *p*. — 8) sesquisexti] Sexqui VI *p*; sesquioctaui] Sexqui VIII *p*. — 9) sesquitercii] VI quitercii *p*. — 10) sesquiquinti] Sexquiquinti *p*; quincu[p]lis] quintuplis *p*; sesquiseptimi] Sexqui VII *p*; sesquinoni] Sexqui VIIII *p*. — 11) VIIII] VIII *p*; superparcienti] superpartienti *p*. — 11-13) superbiparcientes sesquiquartis.supersexpa[r]cientes sexquisextis.superoctoparcientes sesquioctauis] superbipartientes iuncti sint VI qualteris. Superquadripartientes. VI quiquartis. Super VI. partientes . VI quisextis . super VIII partientes . VI quioctavis *p*. — 14) et fehlt in *p*; supertriparcientes] supertripartientes *p*; sesquiterciis] VI quiterciis *p*. — 14-15) super, [quinque] partientes] Superquinispartientes *p*. — 15) sesquiquintis . superseptemparcientes] VI . quiquintis. Super VIII partientes *p*. — 15-16) sesquinonis.super VIIII.parcientes] Super VIIII partientes.sesquinonis *p*. — 17) trahuntur omnes] ∴omnes∵ trahunt *p*; dextro[r]sum] dextrorsvm *p*. — 18) sinistro[r]sum] sinistrorsum *p*; tercium] tercivm *p*. — 19) superparcientis] superpartientis *p*; quartum] quartvm p; tract[v]us] tractus *p*.

trarię partis numerum ita offendant . ut quantitatis interiacentium camporum per illos ducta eundem efficiat auferant . aut si contrarius numerus in angulis aut in lateribus circumponatur his partibus que in se multiplicatę aut iunctę reddant eiusdem summam . auferatur. Quicumque numerus in suo
5 legitimo tractu alium eiusdem quantitatis offendat auferat. In illa parte
n est
ubi denomitantur proportiones omnes ex pari . posita XCI . pyramis perfecta. Quam si . XXXVI . offenderit sua basis . que militat in aduersis
Bl. 6. castris . per legitimos . non solum ipsam || piramidem . auferat . sed omnes
quibus id est
tetragonos quidē̤z Idem fiat de pyramide CXC . contrarię partis similiter
.IIII.
10 ex tetragonis composita . et tercurta nominata . cuius basis est ℓX.V. Non
d
solum modo his basibus ℓXIIII . et XXXVI . pyramites auferantur . sed quicumque numeri cum quantitate spaciorum multiplici easdem bases efficiant . pyramides auferant. Tali prede subiaceant omnes pariter pares . vel pariter impares . vel impariter pares . vel secundi et compositi . soli primi et
com
15 in positi uagentur tuti . nisi ita undique sint circumsepti aduersariis . ut per legitimum tractum non possint euadere. Quocies hoc eueniat . tocies auferantur. Tali altercatione alternorum tractuum omnibus motis a primę posicionis locis . qui uictoriam desiderat . in campis aduersarii festinet medietates
t
ponere . arithimedicam . armonicam . quarum utraque ex tribus terminis con-
20 stans . maximo . medio . minimo . siue fiat per angulos . siue in directum . non tituletur uictorię . dum alienus aliquis terminos earum possit interreperre.
utrimque vel nec
Qui primus utrumque ponatur . indicetur aduersario. Illum ne liceat

17) motis corrigirt aus modis.

---

1) quantitatis] quantitas *p*; interiacentium] interiacentivm *p*. — 2) aut] Act (u) *p*. — 3) aut] avt *p*; que] quę *p*. — 6) denomitantur] denominantur (nominantur steht auf dem linken Rande) *p*; vor proportiones steht in *p* noch: esse; pari] impari *p*; posita est XCI] composita est XCI *p*. — 7) que] quę *p*. — 8) legitimos] legitimum *p*; piramidem] pyramidem *p*. — 9) tetragonos] tetragonas *p*; quidēz Idem (quibus id est)] quibus consistat. Idem *p*; pyramide] piramide *p*. — 10) ℓX V] ℓXIIII *p*. — 11) pyramites (d)] pyramides *p*; sed] Sed *p*. — 12) multiplici] multiplicati *p*; efficiant] efficiantur *p*. — 13) prede] predę *p*. — 14) soli] Soli *p*. — 15) in positi (com)] incompositi *p*; nisi] non *p*. — 16) legitimum] legitimvm *p*; tractum non] tractūvn̄ *p*; Quocies] Quoties *p*; tocies] totiens *p*. — 17-18) posicionis] positionis *p*. — 18) desiderat] desideret *p*. — 19) arithimedicam (t) . armonicam] armonicam . arithmeticam *p*. — 19-20) terminis constans] constans terminis *p*. — 20) maximo. medio. minimo] maximo minutio (medio) *p*. — 22) utrumque (utrimque)] utrumque *p*; indicetur] iudicetur *p*: Illum] illum *p*; ne] nec (vel nec) *p*.

|| postea ex illo loco trahi . nec ab aduersario auferri. Ex utraque parte com- Bl.6'.
plures inueniuntur idonei ad omnes terminos arithmeticos. Armonici autem
non ex altera parte inueniuntur omnes . sed vero tercius per predam debet
acquiri. Nemo arbitretur confuse et inordinate numeros hos positos esse.
sed memor trium preceptorum boętii . quibus omnem inequalitatem ex 5
vel monadiam
equalitate indicat nasci . certus sit omnem hanc monaticam superficiem ex
tribus unitatibus procreari . tercio precepto tantummodo neglecto. Qui desi-
derat superficiem binariam . duplicet monadiam . si ternariam . triplicet . si
c
quaternariam . quadruplicet . si quinariam . quinduplicet . si senariam . ses-
cuplicet. 10

---

3) non] nec *p*; sed vero tercius] Si uero tantvm.tertius.*p*. — 4) acquiri] ad-
quiri *p*. — 5) trium] trivm *p*; boętii] boetii *p*; inequalitatem] inęqualitatem *p*. —
6) equalitate] ęqualitate *p*. — 6-10) certus sit — sescuplicet] Qui desideret superficiem
binariam duplicet monadiam si ternariam triplicet.si quaternariam quadruplicet
Si quinariam quincuplicet.si senariam sexcuplicet. Certus sit omnem hanc mona-
diam superficiem his tribus unitatibus procreari.tercio precepto tantummodo *p*.

Recensionen.

Ueber die Grundlagen der Erkenntnis in den exakten Wissenschaften, von Paul du Bois-Reymond. Nach einer hinterlassenen Handschrift. Mit einem Bildnis des Verfassers. — Tübingen 1890, Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung. VI, 130 S. Preis M. 3,60.

Der aus dem Nachlasse Paul du Bois-Reymond's veröffentlichten Schrift schickt der Herausgeber, Guido Hauck, ein Vorwort voraus, aus dem zu ersehen ist, dass wir es in der vorliegenden Arbeit mit dem erkenntnisstheoretischen Bekenntniss des Verfassers zu thun haben, dass „das wohl ausgereifte Lebensresultat eines tiefen Denkers und weitblickenden Gelehrten“ vor uns liegt. Möge das folgende Referat, das nur einen schwachen Begriff von der Bedeutung und Reichhaltigkeit des Inhalts geben kann, Veranlassung werden, dass recht Viele diesem metaphysischen Testament ein eingehendes Studium widmen, das die Arbeit in hervorragendem Masse verdient.

Die Schrift zerfällt in acht Abschnitte, deren Inhalt kurz wiedergegeben werden möge.

I. Einleitung. (S. 1—15.)

Nach einer Unterscheidung wissenschaftlicher Probleme in solche, deren Unlösbarkeit bewiesen, und solche, deren Lösung zur Zeit (mit den vorhandenen Mitteln, Methoden, Principien) nicht gelingt, will Verfasser zu den ersteren gerechnet wissen die letzten Abstractionen, das allgemeine Grenzproblem der exacten Wissenschaften, die Mechanik, die Einwirkungen der Körper aufeinander. Das Problem wechselt in diesen Bespielen sein Gebiet, es wird aus einem metaphysischen ein psychologisches. Als specielle Beispiele werden u. A. Darwin's Princip, der Zusammenhang zwischen organischer und anorganischer Chemie, schliesslich das Leben selbst, das Bewusstsein ausgeführt. Doch nicht das Seelische im Gegensatz zu den Wissenschaften der Naturkunde will Verfasser behandeln, sondern das Forschungsgebiet der exacten Wissenschaften, z. B. Mathematik, Mechanik untersuchen; er will bis zu den letzten Gründen der Erscheinungen vordringen. Dieses Streben giebt sich in einer ganz bestimmten Denkform kund, nämlich in der Zurückführung auf möglichst wenige und einfache, gleichartige Mechanismen, die selbst Räthsel sein dürfen und wirklich sind. Trotzdem sagt man in diesem Falle, dass man das Problem „erklärt“ habe, dass man es „begreife“, „verstehe“. Und doch ist es keine wirkliche Lö-

sung der Probleme, sondern nur eine neue Reihe von Problemen, die Verfasser — vielleicht ohne hier auf allgemeine Zustimmung rechnen zu dürfen — als für immer unlösbar bezeichnet. Der Schluss der Einleitung beschäftigt sich noch eingehender mit dem Begriff „erklären", als dessen zum Theil bessere Synonyma „darstellen, beschreiben, construiren" aufgestellt werden.

II. Allgemeines über die Ziele der Naturforschung; die drei Richtungen. (S. 16—22.)

Die drei Richtungen, die Verfasser für die Methoden der Naturforschung unterscheidet, sind die empirische, mechanische, metamechanische. Die empirische stützt sich auf Beobachtung und Versuch (hierher gehören Experimentalphysik und Chemie). Die mechanische ist gekennzeichnet durch das Streben, die Erscheinungen mechanisch zu construiren (s. Einleitung, Schluss), d. h. sie zurückzuführen auf möglichst wenige Grundformen, als deren Gemeinsames die Naturgesetze sich darstellen; die mechanische Richtung ist der empirischen gewissermassen entgegengesetzt, ihr Gebiet sind vorwiegend die Fernkräfte aller Art (hierher gehört die theoretische Physik). Die metamechanische Richtung endlich strebt nach vollem Genügen, sie will die letzten Gründe aufdecken, sie fragt nach Materie, dem Wesen der Fernkraft, nach Raum und Zeit (Naturphilosophie, wie sie der Verfasser bezeichnet, nach allgemeinem Sprachgebrauch Metaphysik).

Verfasser geht dann noch genauer ein auf die Unterscheidung dieser drei Richtungen, indem er zugleich die Geometrie in ihrer Entwickelung zur Vergleichung heranzieht. Wenn Verfasser glaubt, dass diese Unterscheidung nur nach Ziel und Inhalt giltig sei, dass sich jedoch dementsprechend keine wissenschaftlichen Epochen unterscheiden liessen, so kann dies nur bedingt zugegeben werden: die Reihenfolge der Epochen war allerdings weniger glücklich.

III. Continuirliche und atomistische Raumausfüllung durch die Substanz. (S. 23—29.)

Verfasser spricht sich gegen die stetige und ununterbrochene Raumerfüllung durch die Substanz aus, da mit der stetigen Raumausfüllung unter Anderem auch die Eigenschaften der Zusammendrückbarkeit und Ausdehnbarkeit in offenem Widerspruch stehen. Die stetige Substanz — eine rein geometrische und höchst unphysikalische Vorstellung — müsste in sich unbeweglich, undurchdringlich, also auch absolut hart sein. Daher ist die Substanz nicht stetig, sondern porös, und zwar — nach der herrschenden Ansicht — staubartig porös, nicht schwammartig porös. Den hierdurch gewonnenen Staubkörnern legt Verfasser den Namen Korpuskel bei, deren Form gleichgiltig ist und die nur als Träger der Fernkräfte charakterisirt sind. Sie sind von den Körpern unserer Erscheinungswelt

ganz verschieden und erhalten unter der Voraussetzung, dass sie unendlich klein sind und nur die Eigenschaften der Kraft und Trägheit haben, den Namen Atome.

IV. Die Fernkraft. (S. 30—52.)

Dieses Capitel scheint ein wörtlicher Abdruck der bekannten Abhandlung zu sein, die Verfasser im III. Jahrgang Nr. 14 der Naturwissenschaftlichen Rundschau veröffentlicht hat und die von Isenkrahe bekämpft worden ist in dessen Schrift: Ueber die Fernkraft etc. Leipzig, Teubner. 1889. Als Resultat kann kurz angegeben werden, dass diese Frage in das Gebiet der Erkenntnisstheorie verwiesen oder dass sie nicht als mechanische, sondern als metamechanische vom Verfasser gekennzeichnet wird.

V. Einzelne Synthesen. (S. 53—72.)

Theils das durch die Deductionen des Capitels IV gewonnene „fernwirkende Atom" wurde zur Construction mechanischer Erscheinungen benutzt, theils das in Capitel III charakterisirte Korpuskel. Es kamen nun die sogenannten Molekularkräfte hinzu: zur Construction der Veränderung der Aggregatzustände genügten nämlich auch die fernwirkenden Atome nicht; es traten in Gegensatz materielle Substanz und Aether, man führte das materielle Atom mit seiner Aetherhülle ein. Dies das Theorem der älteren Wärmetheorie, die Verfasser als „statische Molekularhypothese" unterscheidet von der „kinetischen Molekulartheorie", wie er die mechanische Wärmetheorie bezeichnet. Als Hauptvoraussetzung wurde postulirt, dass beim Anprallen kein Verlust an Geschwindigkeit oder lebendiger Kraft stattfindet; es handelt sich folglich hier um eine absolute Eigenschaft, nämlich vollkommene Elasticität. Da aber auch die kinetische Theorie öfter versagt (Veränderung der Aggregatzustände), so muss eine Verbindung von statischer und kinetischer Molekulartheorie aushelfen. Leider ist dieser Gedanke nicht weiter ausgeführt. Verfasser giebt dann eine Reihe von Anwendungen aus dem Gebiete der Optik und Elektricität — bei denen man mit dem Herausgeber den Schmerz theilt, dass es dem Verfasser nicht mehr vergönnt war, die Hertz'schen Versuche kennen zu lernen —, kommt dann auf den Unterschied zwischen Physik und Chemie zu sprechen, wobei er sich ausführlicher über die Chemie verbreitet — Referenten will es scheinen, als seien z. B. Ostwald's Arbeiten nicht genügend gewürdigt —, die noch nicht reif sei für mechanische Synthese und für die das fernwirkende Atom der Physik nicht ausreiche, weist auf die Wichtigkeit des Prout'schen „Gesetzes" über die Atomgewichte hin und postulirt in äusserster Consequenz den Wasserstoff als anorganischen Urstoff (Analogie mit der Philosophie der Alten). Bei der Synthese des Organischen wird es gehen, wie bei der Fernkraft; das Gebiet wird empirisch erweitert und vertieft werden, es werden Elementarmechanismen ersonnen werden, die Constructionen gestatten: aber schliesslich wird man auf unlösbare Probleme stossen.

VI. Die idealistische und empiristische Weltanschauung. (S. 73—93.)

Verfasser stellt zuerst den Begriff der Grenze fest (unter Hinweis auf seine allgemeine Functionentheorie I), dann denjenigen der „vollkommenen Genauigkeit“, präcisirt Vorstellung und Begriff und Idealismus. Vorstellungsfremde, äusserste Eigenschaften, die sonst als absolut bezeichnet werden, nennt er ideal oder idealistisch und giebt hierfür eine Reihe von Beispielen; auf den Unterschied zwischen unbegrenzt gross und unendlich wird näher eingegangen: das unbegrenzt Grosse für vorstellbar erklärt, das Unendliche als nicht vorstellbar. Aus der Behandlung der Frage nach dem wirklichen Vorhandensein ergiebt sich das Resultat: „Der Idealist glaubt an das irgendwie beschaffene Vorhandensein unwahrnehmbarer, unvorstellbarer, durch unsern Denkvorgang erzeugter Wortabschlüsse von Vorstellungsfolgen. Der Empirist verwirft dergleichen unvorstellbare Abschlüsse und nimmt als vorhanden oder Vorhandenem entsprechend nur das in sein Denken auf, was vorstellbar ist.“

VII. Atomistik und Fernkraft in Bezug auf Absolutes. (S. 94—104.)

Durch eine genauere Beschreibung und Feststellung der Korpuskeln, die nach allen Richtungen hin ein idealistischer Abschluss von Vorstellungsfolgen körperlicher Eigenschaften sind und deshalb einen absoluten Charakter haben, wird ein natürlicher Uebergang gewonnen zur idealistischen Atomtheorie, für die sich Verfasser gegen die empiristische entscheidet. Es handelt sich nun darum, die Fernkräfte selbst der idealistisch-empiristischen Kritik zu unterziehen: das Kernproblem der metamechanischen Forschungsrichtung. Verfasser kommt zu dem Resultat, dass die Fernkraft etwas Gegebenes sei, was wir nicht auf einfachere Vorstellungen von irgendwelchen Wirkungen der Substanz zurückführen können; der Träger der Fernkraft verliert an Interesse, an seine Stelle tritt die Fernkraft selbst, die eine immanente Eigenschaft der Materie ist, ja „Fernkraft und Materie sind Eins“.

VIII. Ueber Weltanschauungen. (S. 105—130.)

Die naive Weltanschauung lässt die Wahrnehmungen auf sich wirken, „wie das Kind eine Theatervorstellung, das nicht darnach fragt, was hinter den Coulissen vorgeht“. Diese Naivetät wird zerstört durch die mechanische Forschung; schliesslich gelangt man metamechanisch zu einem Gesichtspunkte, von dem aus alle früheren Anschauungsweisen naiv erscheinen. Verfasser unterscheidet das ewig Unvorstellbare, das physische Jenseits oder auch die extraphänomenale Welt (Alles ausser uns) und die Wirklichkeit (unser Ich eingeschlossen). Das Absolute bildet die Grenze unseres Vorstellens, ja es liefert den Beweis, dass die Welt mit unserem Vor-

stellen noch nicht zu Ende ist. Doch es fehlt uns für das Wirkliche das Organ und wir haben daher keine Aussichten auf ein Begreifen des Wirklichen: wir sind auf die Welt der reinen Wahrnehmungen und auf die Welt der Vorstellungen und Begriffe beschränkt. Deshalb ist im Streben nach gelungener Synthese das erreichbare Ziel der Forschung zu erblicken, niemals giebt es eine Erkenntnis der letzten Dinge.

Zum Schluss sei dem Herausgeber, Herrn Guido Hauck, der gebührende Dank ausgesprochen, dass er uns diese schöne erkenntnisstheoretische Leistung seines allzufrühe der Wissenschaft entrissenen Freundes vermittelt hat.

Schmalkalden, den 7. Mai 1891. Dr. H. Schotten.

Leitfaden der darstellenden Geometrie. Von Franz Dicknether, kgl. Reallehrer. München 1890. Verlag der J. Lindauer'schen Buchhandlung. Mit 108 in den Text gedruckten Abbildungen. 66 S. 8⁰.

Elemente der darstellenden Geometrie, zum Schulgebrauche zusammengestellt von Wenzeslaus Pözl, Professor für Mathematik und darstellende Geometrie an der k. Industrieschule zu München. München, bei Theodor Ackermann, k. Hofbuchhändler. 1890. 116 in den Text gedruckte Abbildungen. 107 S. 8⁰.

Bisher war an den bayerischen Realschulen der erste Band des Klingenfeld'schen Lehrbuchs für darstellende Geometrie in Gebrauch. Konnte einerseits den älteren Auflagen dieses Buches gegenüber, so anerkennenswerth es seiner Zeit war, keinem Lehrer der Wunsch verdacht werden, den Stoff kürzer, anziehender und moderner behandelt zu sehen, so bietet andererseits die verdienstvolle Neubearbeitung von W. Marx schon etwas zu viel des Guten für den Zweck einer Mittelschule.

Dieser Sachlage dürften die beiden obigen kurzen Lehrbücher ihre Entstehung verdanken. Sie schliessen sich an den bestehenden Lehrplan an und reflectiren auf Einführung in den Mittelschulen; ihre Gestalt ist daher ziemlich genau vorgezeichnet, und man darf von ihnen keine Neuerungen erwarten. In beiden ist die Bezeichnungsweise der Klingenfeld-Marx'schen nachgebildet, mit einigen motivirbaren Aenderungen; in beiden läuft neben dem theoretischen Theile ein völlig ausreichender Apparat von 200—300 Aufgaben resp. Uebungsbeispielen her, welche zum Theil gemeinsamer Quelle entstammen (Joachim Steiner's Sammlung von Maturitäts-Aufgaben österreichischer Realschulen).

Das Dicknether'sche Lehrbuch enthält präcis den für bayerische Realschulen vorgeschriebenen Lehrstoff und behandelt demgemäss: Punkte, Gerade, Ebenen, Dreikante, Prismen, Pyramiden und reguläre Polyeder, sowie Schnitte dieser Körper mit Ebenen und Geraden, dargestellt durch

senkrechte Projection in zwei zu einander senkrechte Tafeln. Ohne abstrus zu wirken, ist es möglichst knapp gefasst. Trotzdem wird man nichts Wesentliches vermissen, wenn man beachtet, dass, um den theoretischen Theil möglichst zu entlasten, einige principiell wichtige Aufgaben, wie z. B.: Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier Geraden, Construction einer Geraden, die mit den Tafeln gegebene Winkel einschliesst, mit angefügter Besprechung unter die Uebungsbeispiele verwiesen sind. Die Figuren, dem Formate des Buches entsprechend etwas klein, sind übrigens, insbesondere für ein billiges Schulbuch, ungemein exact und zierlich ausgeführt.

Das Pözl'sche Lehrbuch ist etwas breiter gehalten als das vorige, enthält die ausführliche Besprechung einer grösseren Anzahl von Aufgaben und beschränkt sich nicht ganz auf den in bayerischen Realschulen zu erledigenden Lehrstoff. Es werden über die oben angeführten Gegenstände hinaus die gegenseitigen Durchdringungen von convexen Polyedern behandelt, ein paar Grundthatsachen der Centralprojection gegeben und die Begriffe collinearer und affiner Figuren nach Vorgang des Marx'schen Lehrbuches eingeführt; letzteres wie bei Marx an Beispielen, die insofern einseitig sind, als sie stets perspectivische Lage voraussetzen und auch keine Anmerkung auf das Allgemeinere der Begriffe hinweist. — Die Erweiterung des Stoffes gerade nach dieser Richtung vorzunehmen, entspricht zweifellos dem herrschenden Geschmack in der darstellenden Geometrie. Ob es für den Zweck, dem eifrigeren Schüler über den vorgeschriebenen Rahmen hinaus einige nützliche und anregende Anschauungen mitzugeben, nicht vortheilhafter wäre, ohne jede Rücksicht auf theoretische Vollständigkeit Einiges über Kegel, Cylinder, Kugel und Schraubenlinie zu bieten, könnte wohl discutirt werden. Ein paar höchst einfache Beispiele aus dem angedeuteten Gebiet geometrischer Gestaltungen würden genügen, den wichtigen Begriff der krummen Fläche und Raumcurve zu beleben, das ewige Einerlei von Geraden und Ebenen zu unterbrechen, und eine richtige Beurtheilung einiger in Architektur und Technik stets wiederkehrender Formen zu vermitteln.

Dem Verfasser eigenthümlich scheint der Ausdruck „gelehnt“ für Gerade, welche senkrecht, und für Ebenen, welche parallel zur Achse des Tafelsystems laufen. Wenn es in § 19 heisst: „Windschiefe Gerade haben keinen Punkt gemeinsam, also auch ihre Risse nicht“, so ist, wie aus dem Zusammenhange ersichtlich, das Richtige zwar gemeint, gewiss aber bleibt der höchst zweideutige Satz mit „also“ besser ganz weg. Die Bezeichnung: zwei „erste“ resp. „zweite“ Deckgerade für Gerade, deren erste resp. zweite(n) Risse sich decken, scheint mir nicht glücklich (§ 20). Auch die von Marx herübergenommene Bezeichnung „räumlich collinear“ für zwei nicht in einer Ebene liegende, collineare ebene Figuren (§ 88) ist angesichts des allgemein angenommenen Ausdrucks „räumliche Collineation“ und „räumlich collineare Systeme“ im Sinne von „Collineation von Räu-

men" und „collineare Räume" nicht empfehlenswerth. — Da, wo von dem speciellen Falle der Parallelität zweier perspectivischen Ebenen die Rede ist, und dem noch specielleren, bei dem ausserdem das Perspectivcentrum in unendliche Ferne rückt, heisst es: „dann heissen die immer noch verwandten Figuren ähnlich" (§ 81), resp.: „man nennt solche Figuren congruent" (§ 82). In Anbetracht, dass dem Schüler, wenn er an diese Stelle kommt, die Begriffe der Aehnlichkeit und Congruenz längst aus der elementaren Geometrie in anderer Definition geläufig sind, muss statt der obigen Fassung gesetzt werden: „dann sind die Figuren ähnlich, resp. congruent" und ist anzudeuten, warum.

Die Figuren bei Pözl sind in einem etwas kräftigen, aber dem Auge wohlthuenden Styl gehalten. In dem Capitel der Polyederdurchdringungen bilden sie leider einen wunden Punkt des im Allgemeinen nicht schlechten Buches. Dort sind sie in Bezug auf Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit mit vielen Fehlern behaftet, so dass sie nur verwirrend auf den Schüler wirken können. Wie ich höre, wird indess der Verleger durch Beigabe einer corrigirten Tafel dem Uebelstande abhelfen.

Zum Schluss noch eine Bemerkung, die auf beide besprochene Lehrbücher gleichmässig Anwendung findet: Bezüglich der Coordinatenbestimmung eines Punktes herrscht in den Lehrbüchern der Klingenfeld'schen Richtung eine ungerechtfertigte Vorliebe für die inconcinnen Bezeichnungen: Abscisse, erste und zweite Ordinate (s. z. B. Dickne ther S. 5, Aufg. 10: 0_1, 0_2, Abscisse) und es wird ein unnöthiger Gegensatz zwischen „Ordinate" und „Abstand" statuirt. Da man die Tafeln als erste, zweite, dritte bezeichnet, so wird man auch am besten von einer ersten, zweiten, dritten Coordinate sprechen, welche nichts anderes ist als die Entfernung von der ersten, zweiten, dritten Tafel, versehen mit dem richtigen Vorzeichen. Auch ist es entgegen dem Gebrauche in der hier massgebenden analytischen Geometrie, den Begriff „erste und zweite Ordinate" eines Punktes a so eng zu fassen, dass darunter allein die Strecken $a_1\mathfrak{a}$ und $a_2\mathfrak{a}$ in den beiden Tafeln (a_1, a_2, $\mathfrak{a}$ bedeuten die Projectionen des Punktes a auf die erste und zweite Tafel und die Achse) verstanden werden, welche nur specielle Repräsentanten der „Ordinaten" genannten Bestimmungsstücke sind. Sollen diese Strecken absolut eine eigene Benennung haben, was mir unnöthig erscheint, so kann man sie nach Klingenfeld als „Kantenloth eins und zwei" oder ähnlich bezeichnen. Auch gegen den Ausdruck „Höhe" im Sinne des Perpendikels, das von der Spitze einer Pyramide auf die Grundfläche gefällt wird (siehe Pözl S. 73 unten „je nachdem die Höhe die Grundfläche in ihrem Mittelpunkte trifft oder nicht) muss protestirt werden. Man darf die weichen Gehirne der Schüler nicht an eine solche Zusammenknetung glücklich errungener allgemeiner Begriffe mit speciellen Erscheinungsformen derselben gewöhnen.

Hermann Brunn.

Ausgewählte Abschnitte aus einer synthetischen Geometrie der Kegelschnitte von F. H. G. Fischer. Abhandlung zu dem Jahresbericht der städt. Realschule zu Leipzig für das Schuljahr Ostern 1889—1890. Leipzig, Druck von C. G. Naumann. 1890. Programm Nr. 559. 35 S. 1 Tafel.

Zur Charakterisirung dieser Abhandlung diene folgende, dem Vorwort entnommene Stelle: „Ueber die Art der Behandlung des Gegenstandes bemerken wir, dass zunächst aus der Erklärung der Kegelschnitte der Satz von Carnot und darauf aus diesem die weiteren Eigenschaften der Linien abgeleitet werden. Als bekannt werden dabei die Sätze über das Doppelverhältniss von 4 Punkten oder Strahlen und die Sätze über Strahleninvolution vorausgesetzt. In einer umfassenden Darstellung der Kegelschnittlehre, aus der der Verfasser hier nur eine Auswahl bietet, werden demnächst diese Sätze ebenso wie die oben angeführten über die Secanten und Tangenten der Kegelschnitte eingehend behandelt werden."

Der erwähnte Satz von Carnot ist der in folgender Gleichung ausgesprochene:

$$st_1 \,.\, st_2 \times tu_1 \,.\, tu_2 \times us_1 \,.\, us_2 = su_1 \,.\, su_2 \times ts_1 \,.\, ts_2 \times ut_1 \,.\, ut_2,$$

wo s_1 und s_2, t_1 und t_2, u_1 und u_2 resp. die Schnittpunkte der Seiten tu, us, st eines Dreiecks mit einem Kegelschnitte bezeichnen.

Man sieht schon aus diesem Fundamentaltheorem, auf dem sich Alles aufbaut, dass der Verfasser eine synthetische Geometrie nicht im Sinne v. Staudts, sondern in Chasles'scher Manier schreibt. Die Schlüsse stellen sich fast durchweg im Gewande von Streckengleichungen dar. In den vorliegenden Capiteln, die natürlich keinen sichern Schluss auf den Charakter des zu erwartenden Ganzen gestatten, erscheint die Ableitung der Einzelsätze als Hauptziel, das Arrangement der Beweise befleissigt sich möglichster Kürze, auf die Hervorhebung allgemeiner Principien wird wenig Text verwendet. Jedenfalls wird man vom Ganzen eine gute Sammlung der bekannteren Kegelschnittsätze erwarten können, vielleicht reichhaltiger, als die gebräuchlichsten Lehrbücher sie bieten; auch manche weniger bekannte Sätze sind eingefügt, wie z. B. die an die Namen Fregier, Faure, Townsend sich knüpfenden (§§ 24, 63, 64, 74); die Verallgemeinerung des letzten stammt wohl vom Verfasser selbst.

Die Capitelüberschriften lauten: I. Kegelschnitt und Gerade; II. Pol und Polare, Durchmesser und Mittelpunkt; III. zugeordnete Punkte und Gerade; IV. Durchmesser und Achsen; V. Brennpunkte, Leitlinien, zu einander senkrechte Tangenten; VI. Kegelschnitt und Kreis (scil. in Verbindung).

Die Eintheilung der Kegelschnitte in Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln bleibt ohne Einfluss auf die Disposition des Stoffes; es wird bei jedem einzelnen Satze auf diese Formen specialisirt.

Pascal's und Brianchon's Satz, denen man an manchen Stellen zu begegnen erwartet, sind wohl für eines der noch nicht publicirten Capitel aufgespart. Der Sinn von Strecken wird nicht durch plus und minus unterschieden, was doch empfehlenswerth wäre. Infolgedessen erscheinen z. B. in § 21 die Gleichungen zweier „Ergänzungskegelschnitte" in der ununterscheidbaren Form

$$\sigma^2 = p \,.\, \alpha \,.\, \beta \,.$$

Eine Kleinigkeit, die mir auffiel, war ferner, dass der Verfasser die Worte „gleichlaufend" und „gegenlaufend" bei involutorischen Gebilden durchweg in einem der Anschauung und dem Gebrauche gerade entgegengesetzten Sinne anwendet.

Hermann Brunn.

Principien der Flächentheorie. Zweiter Theil des Lehrbuchs der analytischen Geometrie von Dr. R. Hoppe, Professor der Mathematik und Philosophie an der Universität Berlin. Zweite vermehrte Auflage. Leipzig 1890. C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung (J. Sengbusch).

Die Principien der Flächentheorie von R. Hoppe, zuerst 1876 vollständig erschienen, schliessen sich nun in zweiter Auflage als zweiter Theil eines Lehrbuchs der analytischen Geometrie an das 1880 erschienene Lehrbuch der analytischen Curventheorie des nämlichen Verfassers an.

In § 2 sind einige Transformationsformeln, in § 27 und § 30 eine Bemerkung und zwei Sätze über Mittelpunktsflächen hinzugekommen. Der Nachweis der Geradenschaaren auf Flächen zweiter Ordnung in § 54 ist in bedeutend elementarere Form gebracht. Eine Aenderung in § 3, die in der Vorrede behauptet wird, lässt sich nicht ausfindig machen.

Ausserdem ist nur noch das Inhaltsverzeichniss neu, und wir können also den Leser auf die Inhaltsangabe zurückverweisen, welche Band XXII dieser Zeitschrift in der Recension der ersten Auflage darbietet. Doch möge hier noch der eigenthümliche Gesammtcharakter der Schrift, der dort kaum angedeutet ist, mit einigen Worten kenntlich gemacht werden.

Breite führt zur Deutlichkeit, Knappheit zur Uebersicht. Beide Vorzüge lassen sich ohne Wiederholungen in einer Darstellung nicht vollständig vereinigen. An den Autor eines Lehrbuches, der mit Bewusstsein seinen Standpunkt auf dem einen Extrem nimmt, wäre es ungerecht, die Forderungen des andern Extrems zu stellen. Hoppe's Flächentheorie ist eines der kürzestgefassten, zugleich in seiner Art vortrefflichsten Lehrbücher. In dem die Formeln verbindenden Texte ist jedes Wort prägnant; die Hauptbegriffe und der Gedankengang der Beweisführung treten überall auf's Klarste hervor; die Ausführung der Nebenrechnungen, das Aufsuchen specieller, erläuternder Beispiele und mancher Detailschluss dagegen wird dem

Leser überlassen. Zu glauben, dass aus einer solchen condensirten Darstellung, die der gereifte Mathematiker als die kürzeste und zugleich genügende herausarbeitet, der noch gänzlich Unbewanderte völlige Klarheit schöpfen könne, hiesse allerdings sehr optimistisch vom menschlichen Geiste denken; aber Jedem, der sich das erste Verständniss des Gegenstandes aus einer ausführlicheren Fassung in Schrift oder Wort angeeignet hat, kann das Hoppe'sche Buch zur Weiterführung, zur Orientirung über das Wesentliche, zur geistigen Trainirung, die das Ueberflüssige wieder abfallen lässt, auf's Beste empfohlen werden.

Hermann Brunn.

Vorlesungen über Geometrie, unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch bearbeitet von Dr. Ferdinand Lindemann, ordentlichen Professor an der Universität Königsberg i. Pr. Zweiten Bandes erster Theil: Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Classe und der lineare Complex. Mit vielen Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1891. VIII u. 650 S. g.^{0}

Anderthalb Decennien nach der Publication des ersten, die ebene Geometrie enthaltenden Bandes, welcher in dieser Zeitschr. Bd. XXII, hist.-lit. Abth. p. 72 vom Referent besprochen worden ist, erscheint der erste Theil des zweiten Bandes der Vorlesungen, der Raumgeometrie. Wenn diese Fortsetzung kaum mehr erhofft werden konnte, so ist sie doch auch heute noch willkommen, da das Werk seiner ganzen Anlage nach, die Wissenschaft bis zum neuesten Standpunkte fortzuführen, ein Veraltetsein des dargestellten Stoffes ausschliesst. Im Gegentheil ist zu erwarten, dass um so Neueres und dieses in um so reiferer Form geboten wird.

Als Grund für die lange Verzögerung wird vom Bearbeiter neben Abhaltung durch anderweitige Thätigkeit angegeben, dass demselben „die Freude an der Arbeit wesentlich beeinträchtigt war, theils durch mehrfach ungünstige Urtheile über die Art und Weise, wie er im ersten Bande über den ursprünglichen Inhalt von Clebsch's Vorlesungen durch Bearbeitung neuerer Untersuchungen hinausgegangen war, theils durch das Bewusstsein, in der That nicht immer das vorgesteckte Ziel erreicht zu haben. „Gleichwohl“ — fügt er hinzu — „konnte kein Zweifel darüber entstehen, dass eine Fortsetzung des Werkes nur unter denselben Gesichtspunkten geschehen könne, welche für die Geometrie der Ebene massgebend gewesen waren; doch glaubte er, den thatsächlichen Verhältnissen mehr als beim ersten Bande im Titel des Werkes Rechnung tragen zu sollen.“

Sollte der erste Theil dieser Aeusserung sich, wie es scheint, auch auf die in dieser Zeitschrift erschienene Recension beziehen, so würde hierdurch auf jene Besprechung ein so falsches Licht geworfen, dass Referent nicht umhin kann, darauf zurückzukommen; denn in derselben war der

allgemeine Standpunkt des Herausgebers, der ein Bild der heutigen geometrisch-algebraischen Forschung unter einheitlichem Gesichtspunkt gewährte, nicht nur gebilligt, sondern als der allein mögliche gegenüber einer Herausgabe von Clebsch'schen Vorlesungen eingehendst nachgewiesen. Insoweit sich die Herausgabe innerhalb dieses selbstgewählten richtigen Standpunktes, auch weit hinaus über den ursprünglichen Inhalt von C.'s Vorlesungen, bewegte, war derselben uneingeschränkte Zustimmung ausgesprochen worden; erst da, wo sie über diesen Standpunkt der einheitlichen Bearbeitung neuer vorhandener Untersuchungen ins Ungewisse hinausschritt — in „bisher kaum betretene Gebiete, auf welche erst ein noch ungewisses Licht geworfen ist", also nicht durch Bearbeitung, sondern durch den nothwendigerweise unreifen Versuch der Schaffung ganz neuer Untersuchungsgebiete, — war eine grössere Beschränkung als angezeigt erwähnt worden.

Ein Blick auf den vorliegenden Theil der Raumgeometrie zeigt nun, dass wenigstens in diesem ersten Theile die damals gewünschten „erleichternden Beschränkungen" in der That angenommen sind, ohne Beeinträchtigung des allgemeinen hohen, übersichtlichen Standpunktes. Auch die angemessene Aenderung des Titels entspricht ganz der vom Recensenten damals vertretenen Auffassung, auch den ersten Band als ein Werk des Herrn Lindemann zu beurtheilen.

Der Plan des ersten Theiles des II. Bandes ist, ein ziemlich vollständiges Bild von den Eigenschaften, besonders den projectivischen, der Flächen 2ter Ordnung und des linearen Complexes zu geben. Verglichen mit der ebenen Geometrie, entspricht der Inhalt, nur unter Zufügung einer eingehenden geometrischen Begründung der projectivischen Massgeometrie, welche das letzte Drittel des Buches als 3. Abtheilung (p. 433—637) füllt, lediglich den beiden ersten der 7 Abtheilungen des I. Bandes: er liegt (mit Ausnahme des eine Zwischenstellung einnehmenden Capitels über die ebene eindeutige Abbildung einer Fläche 2ter Ordnung) ganz innerhalb des Projectiven, mit den Anwendungen auf die Metrik, geht im Allgemeinen nicht über die Gebilde 2ter Ordnung hinaus und verspart sogar auch hierin die eigentlich formentheoretischen Betrachtungen für eine der späteren Abtheilungen. Diesen ist also ein fast unabsehbarer Stoff vorbehalten. Der Stoff der ersten Abtheilung über „Punkt, Ebene und Gerade" (p. 1—130, in 8 Capitel gegliedert) ist zum grösseren Theile einer Clebsch'schen Vorlesung des Wintersemesters 1871/72 und einem ganz kurzen Manuscript desselben entnommen, ebenso gegen die erste Hälfte der zweiten Abtheilung „die Flächen 2ter Ordnung und 2ter Classe" (p. 131—432, in 21 Capiteln); alles Uebrige, gegen $^2/_3$ des Buches, ist vom Bearbeiter hinzugefügt. Jene von Clebsch übernommenen Capitel — über Punkt, Ebene und Gerade und die Erzeugnisse projectiver Gebilde, in gewöhnlichen und homogenen Coordinaten; über Polarentheorie der Flächen 2ter Ordnung; die Beziehungen

dieser Flächen zur unendlich fernen Ebene und zu einander, insbesondere die Theorie der confocalen Flächen — sind als die mehr elementaren zu bezeichnen; die Zufügungen haben im Allgemeinen einen etwas weitergehenden Charakter. Sie betreffen eine Darstellung der v. Staudt'schen Theorie der imaginären Elemente (p. 104—130), die in Bd. I nur erst algebraisch, ohne geometrisches Substrat, eingeführt waren; die Heranziehung der von den Achsen einer linearen Schaar von linearen Complexen gebildeten Fläche 3ter Ordnung; eine eingehende analytische Unterscheidung der Beziehungen der F_2 zu der unendlich fernen Ebene; eine Ausführung der gleichzeitigen Transformation zweier F_2 auf die Normalformen für die Fälle der 13 besonderen gegenseitigen Lagen, ausgehend nicht von der Weierstrass'schen Methode, sondern von geometrischen Betrachtungen. Die ausgedehntesten Zufügungen aber sind:

1. Zwei Capitel (p. 289—342) über die Theorie der Krümmungs- und geodätischen Curven auf den F_2, und zwar sogleich unter Einführung der bekannten projectiven Verallgemeinerung der elliptischen Coordinaten, also für eine Schaar allgemeiner Flächen zweiter Classe; aber dieselbe Verallgemeinerung in Durchführung auf jene 13 speciellen Fälle, ja sogar auf die Schaaren von Kegel- und Cylinderflächen.

2. Fünf Capitel (p. 343—414) über die gleichzeitige Transformation einer Fläche 2ter Ordnung und eines linearen Complexes in die kanonischen Formen, mit deren Anwendungen; wiederum von geometrischen Betrachtungen aus zu den Formelsystemen aufsteigend. Diese Anwendungen betreffen an sich wichtige Probleme:

a) die eigentlichen linearen Transformationen einer F_2 in sich; dieselbe würde etwas durchsichtiger geworden sein, wenn aus den Gleichungen 3), 4), 5) von XVII $\Sigma u_k \tau_k = 0$ als einzige Bedingung gefolgert worden wäre, was zugleich die Verificirung 12)—14) von 3) überflüssig gemacht hätte. Für die uneigentlichen Transformationen der F_2 in sich, welche die Erzeugenden der beiden Schaaren vertauschen, wird eine directere Behandlung angeschlossen;

b) die linearen Transformationen des Raumes, welche einen Kegelschnitt in sich überführen („Bewegungen“);

c) diejenigen, bei welchen ein linearer Complex erhalten bleibt;

d) die allgemeinste Correlation des Raumes in sich.

Zu bemerken ist dabei, dass auch alle diese Probleme nicht nur generell, sondern im Verfolg der speciellsten Lagen studirt werden (zum Theil an ein Manuscript des verstorbenen Frahm anschliessend). So werthvoll es ist, alle diese Gegenstände zum ersten Male im Zusammenhange behandelt und geometrisch ausgestaltet zu finden, so haben die Zufügungen doch nicht nur im Inhalt — wie schon gesagt —, sondern auch in der Darstellungsweise einen von den Clebsch'schen Vorlesungen etwas abweichenden Charakter. Wenn Clebsch auch rasch in die Höhe zu allgemeinen Ge-

danken vorschritt, denen die einzelnen Probleme untergeordnet wurden, so vergass er doch nie, vorher den inductiven Weg über einzelne wenige Fälle hinweg wirklich zurückzulegen. Hier aber werden möglichst allgemeine Methoden unvermittelt geboten, so dass der leitende Gedanke in der abstracten Form nicht leicht erfasst werden kann. So möchte zum richtigen Verständniss der Transformationscapitel fast eine historische Kenntniss der vielerlei Einzelforschungen erforderlich sein, aus denen ihr umfassender Plan hervorgegangen ist. Und während den Lesern von weit vorgeschrittenem Standpunkte es gerade besonders lehrreich sein wird, diese Capitel zu studiren, bleibt durch sie das Werk den Anfängern verschlossen.

Ohne in dieser Besprechung auf viele Einzelheiten eingehen zu wollen, sei doch erwähnt, dass es erwünscht gewesen wäre, das Problem, die beiden Erzeugenden in einem Punkte der F_2 zu trennen (p. 146), bis zu Ende, nämlich bis zur Aufstellung der $\sqrt{\mathrm{H}(F)}$, durchgeführt zu sehen; und dass es auch vielleicht innerhalb des Rahmens des Buches gelegen hätte, die Hauptachsen der ebenen Schnitte der Fläche zu behandeln (wenn nicht etwa die Absicht vorliegen sollte, dies erst bei Gelegenheit des Normalenproblems und Achsencomplexes invariantentheoretisch nachzuholen).

Die dritte Abtheilung, „die Grundbegriffe der projectivischen und metrischen Geometrie“ in 13 Capiteln, giebt in selbständiger Bearbeitung, wenn auch vielfach an F. Klein anschliessend, eine Grundlegung unserer projectivischen und metrischen Begriffe, sowie einige Anwendungen der Nicht-Euklidischen Geometrie. Wer den uralten Kampf um die Herrschaft zwischen Metrischem und Projectivischem verfolgt und weiss, dass derselbe erst durch die v. Staudt'sche Theorie der Würfe und die darauf zu gründende Cayley-Klein'sche Nicht-Euklidische Massgeometrie zu Gunsten der Ueberordnung der projectivischen Begriffe entschieden worden ist, dem wird die systematische Zusammenfassung dieser principiell bedeutenden Betrachtungen in hohem Masse erwünscht sein. So findet man hier zunächst (Cap. I) den von metrischen Begriffen, insbesondere den die 3 Geometrien unterscheidenden Merkmalen, noch unabhängigen Aufbau der projectiven Geometrie, mit Hilfe der Begriffe Punkt, Gerade, Ebene, 4ter harmonischer Punkt; aus den hieraus abzuleitenden Doppelverhältnissen die projectivische Definition der Coordinaten (Cap. II); sodann erst die Spaltung in die 3 Geometrien, und zuerst Behandlung der hyperbolischen Geometrie der Ebene (Cap. III), mit ihrer Trigonometrie (Cap. IV) und Ausdehnung auf den Raum (Cap. V), weiterhin analog die elliptische (Cap. VI) und die parabolische (Euklidische) Geometrie (Cap. VII). Aus dem Gange der Betrachtungen ist bemerkenswerth, dass jeweils erst der Begriff der „Bewegungen“, successive zerlegt, zu den verschiedenen Annahmen über das Unendlich-Ferne der Geraden und damit zu den entsprechenden Transformationsgruppen (speciellen Collineationen) und zu den übrigen metrischen Begriffen führt (wobei übrigens in der parabolischen Geometrie noch weiter

eine explicite Annahme über die Ueberführung rechter Winkel in einander und die Erhaltung der Lage bei vollständiger Umdrehung nöthig wird). Dies ist, wie in VI ausgeführt wird, gerade entgegengesetzt dem Gange von Riemann etc., von verschiedenen metrischen Annahmen aus, wie etwa über die Form des Linienelements, zu den verschiedenen Auffassungen des Unendlich-Fernen zu gelangen. Aus den Resultaten sei das bekannte angeführt, dass man aus den Eigenschaften der Ebene allein, ohne Hinaustreten in den Raum, nicht zu entscheiden vermag, ob man in einer Euklidischen Ebene, oder in einer sog. Grenzfläche des hyperbolisch gemessenen Raumes von 3 Dimensionen (einer F_2 dieses Raumes, welche die absolute Fläche A desselben möglichst eng berührt, Kugelfläche des Raumes mit auf A gelegenem Mittelpunkt) sich befindet; und Analoges gilt für unsern Euklidischen Raum selbst.

Da eine völlige Einsicht in den Zusammenhang der Euklidischen Postulate und Axiome, insbesondere was das 5te Postulat (sog. 11tes oder Parallelen-Axiom) betrifft, in Bezug auf Vollständigkeit und Nothwendigkeit ihrer Voraussetzungen erst durch den Aufbau der Nicht-Euklidischen Geometrie gekommen ist, wird das nun folgende Capitel VIII, welches die Euklidischen Voraussetzungen eingehend prüft, besonders interessant. Das Resultat des Verfassers ist eine völlige inhaltliche Uebereinstimmung dieser Voraussetzungen mit den vom Verfasser zur Einführung der Metrik der parabolischen Geometrie nach und nach gemachten Aufstellungen. So schliesst z. B. der Satz: „dass zwei Gerade, die mit einer dritten Geraden zwei innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als $2R$, sich schneiden", die hyperbolische Geometrie aus, und die Zufügung „und zwar auf der Seite der inneren Winkel" auch die elliptische Geometrie aus; denn in dieser zerfällt die Ebene durch eine Gerade überhaupt nicht in zwei getrennte Theile.

Zu diesen begründenden Capiteln gesellen sich nun noch Anwendungen der Vorstellungen der elliptischen Geometrie: in Cap. IX—XI Discussion der endlichen Gruppen von Bewegungen in dieser Geometrie, also auch der endlichen Gruppen von Rotationen um einen festen Punkt im gewöhnlichen Sinne, wobei Gelegenheit genommen wird, die Untersuchungen von Clebsch über das 10-fach Brianchon'sche Sechseck und die Zurückführung der Gleichungen 5ten Grades auf die elliptischen Modulfunctionen wiederzugeben; in Cap. XII Darstellung der allgemeinen linearen Transformationen einer complexen Variablen durch die Collineationen des Raumes, welche eine Kugel in sich überführen. Den Schluss des Werkes bildet (Cap. XIII), im Interesse der Systematik, eine Darlegung des Zusammenhangs der gewöhnlichen Argand-Gauss'schen Darstellung der complexen Variablen mit der v. Staudt'schen Interpretation des Imaginären, unter Vermittlung der imaginären Kreispunkte, wobei die Constructionen der letzteren Interpretation an vielen Beispielen mit denen der gewöhnlichen Darstellung in Beziehung gesetzt werden.

Die historischen Angaben sind ziemlich reichlich und auch im Allgemeinen richtig. Die Note pag. 190 über die Herstellung von Cartonmodellen der Flächen 2ter Ordnung aus ihren Kreisschnitten möchte den Antheil von A. Brill gegenüber Henrici nicht vollständig würdigen; denn das zur Zeit der Angaben Brill's bekannt gewesene eine Modell bestand nur aus Halbkreisen und war deshalb zur Vervielfältigung nicht geeignet.

In den 15 Jahren seit Erscheinen des I. Bandes hat sich der Standpunkt der geometrischen Literatur sichtlich gehoben: es existirt heute in den beiden grossen Gebieten, welche durch die linearen und durch die rationalen Transformationsgruppen charakterisirt sind, eine grössere Einsicht in die die Wissenschaft beherrschenden Ideen und Zusammenhänge und zugleich ein stärkeres Rückgreifen auf die Originalabhandlungen. Sollte der erste Band hierzu mitgewirkt haben, so wird von dem fertiggestellten zweiten eine noch höhere Wirksamkeit erwartet werden dürfen.

Erlangen. M. NOETHER.

Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Akademische Vorlesungen von H. WEBER. Braunschweig. 1891.

Das in der Ueberschrift genannte Werk zerfällt in drei Theile: in einen analytischen, algebraischen und zahlentheoretischen Theil. Der schwer wiegende Unterschied, welcher zwischen ihm und allen bisherigen Werken über elliptische Functionen besteht, liegt im zweiten und vor Allem im dritten Theile, von denen der zweite die Transformationstheorie in einer neuen, bisher noch nicht in Lehrbüchern behandelten Weise enthält, während der dritte ein völlig neues, bisher nur in Einzelarbeiten behandeltes Gebiet dem grösseren Publikum erschliesst.

Ausser in Theile, wird das Werk in 16 Abschnitte und 120 Paragraphen eingetheilt. Die Bezeichnungsweise ist eine durchgehende.

Als Vorarbeiten für dasselbe können drei Aufsätze des Herrn Verfassers angesehen werden, die sich im 6. und 11. Bande der Acta Mathematica und im 33. Bande der Mathematischen Annalen finden.

Die Art der Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen wird immer von der Individualität und dem Geschmack des einzelnen Autors abhängen. Herr Weber sieht die Theorie der elliptischen Integrale als den naturgemässesten und verständlichsten Ausgangspunkt für die Theorie der elliptischen Functionen an, aber in anderer Weise, als frühere Autoren, wie z. B. Herr Königsberger. Mit Hilfe einfacher Transformationen und Reductionen wird die Theorie des allgemeinen elliptischen Integrales so weit gefördert, dass sich die Legendre'sche und Weierstrass'sche Normalform des elliptischen Differentials und die drei Gattungen der elliptischen Integrale ergeben. Hieran knüpft sich das Additionstheorem für die Integrale erster Gattung und die Definition der drei elliptischen Functionen $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ mit Hilfe der Umkehrung des Integrales:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}} = u.$$

Die Eigenschaft der doppelten Periodicität der drei elliptischen Functionen, di. aber nicht bewiesen, sondern als thatsächlich bestehend angeführt wird, sieht Herr Weber als das Bindeglied an, welches ihn zu den elliptischen Functionen und damit zu dem zweiten Abschnitt überführt.

Die Theorie derselben wird unabhängig von den bisherigen Betrachtungen auf die Theorie einer ganzen transcendenten Function von $u - T(u)$ — aufgebaut, die den Bedingungsgleichungen Genüge leistet:

$$T(u+\omega_1) = e^{-\pi i (a_1 [2u + \omega_1] + b_1)} \, . \, T(u),$$
$$T(u+\omega_2) = e^{-\pi i (a_2 [2u + \omega_2] + b_2)} \, . \, T(u),$$

worin a_1, a_2, b_1, b_2 constante d. h. von u unabhängige Grössen sind. Diese Functionen gehören zu den wichtigsten der höheren Analysis und bilden einen besonderen Fall der allgemeinen doppelt periodischen Functionen dritter Art. Ihre Haupteigenschaften werden auf Grund einiger Sätze über complexe Integrale aufgebaut. Einfache Reductionen führen zu der Theorie der Thetafunctionen, deren elementare Eigenschaften entwickelt werden. Ihr Modul wird durch ω bezeichnet. Bei Gelegenheit der Productdarstellung der Thetafunctionen führt Herr Weber vier neue Functionen von ω, $\eta(\omega)$, $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ ein, die bei seinen späteren Untersuchungen sich von grosser Bedeutung zeigen.

Die soeben skizzirten Theorien bilden den Gegenstand des zweiten Abschnitts.

Der dritte Abschnitt behandelt die Transformationstheorie der Thetafunctionen, die auf derjenigen der T-Functionen basirt wird. Unter der letzteren definirt Herr Weber die Darstellung der Functionen T' mit den Perioden ω'_1, ω'_2 durch T-Functionen mit den Perioden ω_1 und ω_2, wenn zwischen den Perioden die bekannten linearen Relationen bestehen. Es folgen die Sätze über die Zusammensetzung von Transformationen und die Anwendung derselben auf die verschiedenen bisher eingeführten Functionen. Ausführlicher wird die lineare und die Transformation 2ten Grades besprochen. Die lineare Transformation giebt Anlass zur systematischen Ableitung der Weierstrass'schen σ-Functionen, deren Beziehungen zu den Thetafunctionen aufgestellt werden.

Der vierte Abschnitt beschäftigt sich mit den elliptischen Functionen. Durch Quotientenbildung von Thetafunctionen ergeben sich doppelt periodische Functionen. Durch Differentiation gelangt man zu dem Zusammenhange zwischen den doppelt periodischen Functionen und den Integralen erster Gattung, auf welchen schon im ersten Abschnitt hingedeutet wurde, so dass jetzt die doppelte Entstehung der drei Functionen $sn\ v$, $cn\ v$, $dn\ v$ klargelegt ist.

Die einfachsten Eigenschaften derselben können aus den Eigenschaften der Thetafunctionen unmittelbar abgeleitet werden. Die lineare Transformation giebt Anlass zur systematischen Darstellung der Weierstrass-schen $\wp$-Function und der wichtigen Invariante $\mathfrak{J}(\omega)$. Hieran schliesst sich die Betrachtung der elliptischen Transcendenten 2ter und 3ter Gattung nach Jacobi und Weierstrass und endlich eine kurze Entwickelung der elliptischen Functionen in Partialbrüche und trigonometrische Reihen.

Der fünfte Abschnitt trägt die Ueberschrift: „Die Modulfunctionen". Es wird zunächst ein äusserst wichtiges Problem gelöst. Bei den bisherigen Betrachtungen waren die zu Grunde gelegten Veränderlichen im Wesentlichen die Argumente und die Moduln ω der Thetafunctionen. Bei dem Umkehrproblem der elliptischen Integrale muss aber zur völligen Durchführung das Argument und der Modul k^2 der elliptischen Functionen als bekannt angenommen worden. Es fragt sich vor Allem, wie hieraus ω zu bestimmen ist. Mit diesem Problem hat sich schon Jacobi in seiner nachgelassenen Arbeit beschäftigt, die sich am Ende des ersten Bandes seiner Werke findet. Indessen blieb hier eine Lücke, die erst später von anderen Mathematikern, vor Allem Herrn Weierstrass ausgefüllt wurde. Herr Weber giebt eine einfache Lösung des Problems. Dieselbe beruht auf der Lösung der Frage, wann zwei Functionen $\mathfrak{J}(\omega)$ und $\mathfrak{J}(\omega')$ einander gleich sind. Damit ist der Uebergang zu der Definition und der Entwickelung der einfachsten Eigenschaften der Modulfunctionen von selbst gegeben. Den Schluss bilden einige wenige Entwickelungen der elliptischen Functionen nach Potenzen ihres Argumentes.

Der sechste Abschnitt enthält zwei Anwendungen der vorausgegangenen Theorie auf die Bestimmung der Oberfläche des Ellipsoides und auf die Rotation eines Körpers um seinen Schwerpunkt.

Damit ist der erste Theil beendet. Die Darstellung ist kurz und klar. An einigen principiell wichtigen Stellen würde mancher Leser eine etwas grössere Ausführlichkeit dankbar empfinden. Ich meine etwa die Stelle pag. 37, wo für das Verhältniss $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ von vornherein beschränkende Bedingungen eingeführt werden, deren Bedeutung nicht ersichtlich ist, ferner die Vorzeichenbestimmung des Factors A auf Seite 77, drittens die Partialbruchzerlegung der elliptischen Functionen auf Seite 134 etc.

Der zweite, der algebraische Theil, umfasst die Abschnitte 7—10 inclusive.

Der siebente Abschnitt bringt eine Reihe von Hilfssätzen aus der Algebra. Unter Fortlassung alles Ueberflüssigen wird im Galois'schen Sinne, aber theilweise anderen — Dedekind'schen — Bezeichnungsweisen die Gruppentheorie der algebraischen Gleichungen entwickelt und hieran einige Sätze über ganze algebraische Zahlen und ganze algebraische Functionen einer Veränderlichen geknüpft und zwar im Anschluss an Dedekind's Darstellung im 11. Supplement der Dirichlet'schen Zahlentheorie. Bei dieser

Gelegenheit möge bemerkt werden, dass die Anschauungen von Herrn Dedekind, wie Herr Weber in der Einleitung bemerkt, für die Darstellung der einzelnen Theorien sich von mannigfacher Bedeutung gezeigt haben.

Der achte Abschnitt bringt zunächst eine kurze Theorie der Multiplication der elliptischen Functionen, wobei es dem Herrn Verfasser wesentlich darauf ankommt, die Ausdrucksformen für $sn\,n\,v$, $cn\,n\,v$, $dn\,n\,v$ in ihrer allgemeinen Gestalt zu erhalten. In ähnlicher Weise wird die Function $\wp$ behandelt. Das umgekehrte Problem ist das Divisionsproblem, welches zunächst für den Fall $n=2$ gelöst wird. Hier ergiebt sich das Resultat, dass die Theilung durch 2 und mithin durch jede Potenz von 2 durch eine Kette von Quadratwurzeln ausgeführt werden kann. Unter solchen Umständen ergiebt sich die Berechtigung, sich auf die Theilung durch ungerade Zahlen zu beschränken.

Hier ergeben sich zwei Probleme. Das erste besteht in der Auflösung der allgemeinen Theilungsgleichung vom Grade n^2, die der Herr Verfasser in die Form bringt:

$$D(x^2)\,sn\;v - x\,A(x^2) = 0, \quad x = sn\frac{v}{n}\cdot$$

Es zeigt sich die algebraische Auflösbarkeit dieser Gleichungen, wenn der Rationalitätsbereich in bestimmter Weise gewählt wird.

Das zweite Problem wird kurz als Theilung der Perioden bezeichnet und besteht in der Discussion der Gleichungen, denen die Grössen:

$$x_{\mu\mu'} = sn\frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n}$$

Genüge leisten. Es wird die Galois'sche Gruppe derselben bestimmt und zwar unter Zugrundelegung zweier Rationalitätsbereiche. Der eine besteht aus rationalen Zahlen und rationalen Functionen von k^2, der zweite aus denselben Grössen und n^{ten} Einheitswurzeln. Hierbei zeigen sich die sogenannten Abel'schen Relationen von Bedeutung.

Die Theilungsgleichungen werden in eigentliche und uneigentliche eingetheilt. Erstere sind solche, bei denen die Zahlen μ, μ', n keinen gemeinsamen Theiler besitzen, während bei den letzteren diese Beschränkung nicht besteht. An dieser Stelle nun findet der Uebergang zu den Transformationsgleichungen statt. Schon seit längerer Zeit ist es bekannt, dass die Moduln, resp. gewisse Wurzeln derselben und die Multiplicatoren, die nach einer Transformation n^{ten} Grades der elliptischen Functionen sich ergeben, gewissen algebraischen Gleichungen Genüge leisten, die als Modular- und Multiplicatorgleichungen bezeichnet wurden. Daneben wurden auch weitere Gleichungen betrachtet, denen transformirte Grössen Genüge leisten, die durch Product- und Quotientbildung aus den transformirten Thetafunctionen resp. gewissen Wurzeln derselben entstanden sind. Der Existenzbeweis aller dieser Gleichungen kann auf ein gemeinsames Princip gebracht werden.

Es zeigt sich nämlich, dass die Wurzeln aller dieser Gleichungen sich in bestimmter Weise aus den Wurzeln der Theilungsgleichungen zusammensetzen lassen. Aus dieser Zusammensetzung und aus den Eigenschaften der Theilungsgleichung folgt dann leicht der Existenzbeweis.

In Folge dessen ist Herr Weber berechtigt, in der folgenden allgemeinen Weise vorzugehen.

Er denkt sich die eigentliche Theilungsgleichung vorgelegt und die Wurzeln in folgender Weise in Reihen geordnet. Man wähle eine nach Belieben aus:

$$x_{\mu_1,\,\mu_1'} = sn\frac{4\mu_1 K + 4\mu'_1 i K'}{n} = sn\,\Omega_1$$

und bilde die Reihe der Grössen $sn\,h\,\Omega_1$, worin h ein vollständiges System incongruenter zu n theilerfremder Zahlen durchläuft. Ist $sn\,\Omega_2$ eine in dieser Reihe nicht enthaltene Wurzel, so bilde man die zweite Reihe $sn\,h\,\Omega_2$ etc. Man erhält auf diese Weise eine Anzahl von Reihen. Wir wollen dieselbe durch ν bezeichnen. Nun sei ξ eine rationale Function der Wurzeln einer Reihe, so lässt sie sich rational durch eine derselben darstellen. Ueberdies möge ξ die Eigenschaft besitzen, ungeändert zu bleiben, falls diese eine Wurzel durch eine andere derselben Reihe ersetzt wird. Es erhält dann ξ durch Anwendung der Substitutionen der Gruppe ν Werthe $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$. Sind dieselben alle von einander verschieden, so sind sie Wurzeln einer irreductibeln rationalen Gleichung ν^{ten} Grades, welche mit dem Namen einer Transformationsgleichung bezeichnet wird. Die Theorie der Theilungsgleichungen kann dann auf die Theorie dieser Transformationsgleichungen reducirt werden.

Als besondere Ausdrücke, welche als Wurzeln von Transformationsgleichungen zu Grunde gelegt werden können, werden die Producte gewählt:

$$\overset{h}{\Pi}\,\varphi\,(sn\,h\,\Omega),$$

wo φ eine beliebige rationale Function ist und h die Reihe der Zahlen durchläuft $1, 2, \ldots n-1$. Wenn dann $\varphi(x)$ eine gerade Function ist, so zeigt es sich, dass

$$\Pi(\Omega) = \overset{h}{\underset{1,\frac{n-1}{2}}{\Pi}}\,\varphi\,(sn\,h\,\Omega)$$

eine Wurzel einer Transformationsgleichung ist, die mit dem Namen einer Modulargleichung bezeichnet wird. Wenn dagegen φ eine ungerade Function ist, so ist $\Pi(\Omega)^2$ und nur wenn n eine Quadratzahl ist, $\Pi(\Omega)$ selbst Wurzel einer Transformationsgleichung, die als Multiplicatorgleichung bezeichnet wird.

Die Aufgabe der Transformationsgleichungen ist nun eine doppelte. Erstens handelt es sich um die Coefficienteneigenschaften und die Construction von Transformationsgleichungen, zweitens um die Anwendung

auf algebraische Probleme. Dem ersten Problem ist Abschnitt 9 gewidmet. In demselben betrachtet Herr **Weber** eine ganze Reihe von Transformationsgleichungen, bei denen vor Allem die im ersten Theile eingeführten Functionen $\eta(\omega)$, $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $j(\omega)$ eine Rolle spielen. Bei Gelegenheit der Invariantengleichungen, welchen die Functionen $j\left(\frac{c+d\omega}{\omega}\right)$ Genüge leisten, wird auf einen zweiten Weg hingedeutet, auf welchem zu Transformationsgleichungen gelangt werden kann und zwar mit Hilfe von Modulfunctionen. Aus dem reichen Inhalt dieser Untersuchungen, in welchen Arbeiten von **Joubert**, **Kiepert**, **Klein**, **Schläfli** u. a. Verwendung finden, möge § 78 besonders herausgegriffen werden. Das Problem Transformationsgleichungen für einen allgemeinen Werth von n aufzustellen, ist ein äusserst schwieriges und nur die Zukunft kann lehren, wie weit sich dasselbe für die eine oder die andere Art von Gleichungen wird lösen lassen. Unter solchen Umständen hat man schon seit längerer Zeit versucht, auf anderem Wege vorwärts zu gelangen und zwar durch Betrachtung der sogenannten irrationalen Modulargleichungen. Im Sinne von Herrn **Weber** sind das Gleichungen, denen die Functionen f, f_1, f_2 zu gleicher Zeit Genüge leisten, indessen kann die Definition auch anders gefasst werden. Hier zeigen sich theilweise überraschend einfache Resultate, und es ist anzunehmen, dass sich hier noch viele wichtige Untersuchungen ergeben werden. Diesen Gleichungen ist der vorhin genannte Paragraph gewidmet. Es möge sofort hier bemerkt werden, dass dieselben im folgenden Theile auch zu der Berechnung von Classeninvarianten gebraucht werden.

Die zweite Aufgabe der Transformationsgleichungen, die im zehnten Abschnitt behandelt wird, ist rein algebraischer Natur. Hierbei wird der Grad als ungerade Primzahl angenommen. Die Gruppe wird mit und ohne Adjunction von p^{ten} Einheitswurzeln aufgestellt. Die Untersuchung der Divisoren der Gruppe führt zu der Erledigung der wichtigen und viel behandelten Frage, wann eine Modulargleichung erniedrigt werden kann. Es ergiebt sich das bekannte Resultat, dass eine Erniedrigung bis $p = 11$ incl. möglich ist, darüber unmöglich. Der Fall $p = 5$ führt zu der Auflösung der Gleichungen 5ten Grades.

Blicken wir auf die Untersuchungen des ersten und zweiten Theiles nochmals zurück, so sehen wir, dass die Transformation in denselben die Hauptrolle spielt. Es wird zunächst das Transformationsproblem der elliptischen Integrale behandelt. Schon hier tritt der Begriff der Modular- und Multiplicatorgleichungen auf. Dann wird die Transformationstheorie der T-Functionen und aus ihr die der mannigfachen von Herrn **Weber** eingeführten Functionen behandelt, endlich werden die Transformationsgleichungen im Anschluss an die Theilungsgleichungen in allgemeiner Weise definirt und untersucht. Der Zusammenhang, der zwischen diesen einzelnen Theorien besteht, wird an verschiedenen Stellen, so pag. 17, 118 etc. etc.

angedeutet, die ausführliche Darlegung der Einheit des Transformationsproblems liegt dagegen leider nicht im Rahmen der Weber'schen Betrachtungen.

Der letzte, der zahlentheoretische Theil, hat die complexe Multiplication zum Gegenstand. Er umfasst die Abschnitte 11—16.

Schon Abel hat die Bemerkung gemacht, dass die Moduln derjenigen elliptischen Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet, sämmtlich durch Wurzelzeichen darstellbar sind. Ein Beweis findet sich nicht vor. Erst im Jahre 1857 wurde dieser Satz von Herrn Kronecker nebst einer Fülle weiterer Eigenschaften der Gleichungen für die singulären Moduln in einer seiner bedeutendsten Arbeiten eingehend erörtert. Bei der Schwierigkeit des Stoffes drang aber auch diese Arbeit zunächst nur in kleinere Kreise, bis endlich vor wenigen Jahren durch eine Reihe von Arbeiten der Herren Pick, Weber, Greenhill u. A. der genannte Gegenstand weiteren Kreisen zugänglich gemacht wurde.

Bei der grossen Wichtigkeit und Schönheit der betreffenden Theorien muss es Herrn Weber zu besonderem Verdienste angerechnet werden, dass er es zum ersten Male unternimmt, dieselben in einem Lehrbuche zu verarbeiten. Wie in der Theorie der Transformationsgleichungen, so ist auch hier das Fundament, auf welchem Alles beruht, von vornherein ein erweitertes.

Die Moduln ω, für welche complexe Multiplication stattfindet, leisten einer quadratischen ganzzahligen Gleichung:

$$A\omega^2 + B\omega + C = 0$$

Genüge, für welche $B^2 - 4AC$ negativ ist und umgekehrt. Die dazu gehörenden Werthe der Modulfunctionen nennt Herr Weber singuläre Werthe derselben und betrachtet zunächst die singulären Werthe der Invariante $\mathfrak{j}(\omega)$. Es zeigt sich, dass dieselben ganze algebraische Zahlen sind, dass sie ferner nicht nur zu einer quadratischen Form mit negativer Determinante gehören, sondern zu einer bestimmten Formenclasse, die sie von allen anderen Classen derselben Determinante unterscheidet. Daher wird $\mathfrak{j}(\omega)$ als Classeninvariante bezeichnet. Die Gleichung von $\mathfrak{j}(\omega)$ kann dann so zerlegt werden, dass $\mathfrak{j}(\omega)$ einer ganzzahligen Gleichung Genüge leistet, deren Grad gleich der Classenanzahl der entsprechenden quadratischen Formen ist. Diese Gleichungen werden als Classengleichungen bezeichnet.

Jede Classenvariante $\mathfrak{j}(\omega)$ giebt Anlass zu einem algebraischen Zahlkörper. Jede primitive Zahl desselben leistet einer analogen Gleichung von demselben Grade wie $\mathfrak{j}(\omega)$ Genüge. Durch dieselbe kann dann $\mathfrak{j}(\omega)$ rational dargestellt werden. Unter solchen Umständen wird jede primitive Zahl des soeben definirten Körpers als Classeninvariante bezeichnet und ebenso unter Classengleichung eine jede Gleichung verstanden, deren Wurzeln die verschiedenen Werthe einer Classeninvariante sind.

Hiermit ist eine Grundlage von grosser Allgemeinheit gefunden. In einer ganzen Reihe von Paragraphen werden Classeninvarianten wirklich

berechnet, wobei sich die Grössen und Gleichungen von besonderer Bedeutung zeigen, die im 1. und 2. Theile aufgestellt worden sind. Dann wird gezeigt, wie durch Adjunction von Quadratwurzeln die Classengleichung in Factoren zerlegt werden kann, welche den Geschlechtern der Formenclassen entsprechen und unter Zuhilfenahme der Composition der quadratischen Formen der fundamentale Satz bewiesen, dass die Classengleichung eine Abel'sche Gleichung ist, also durch Wurzelzeichen aufgelöst werden kann. Ueberdies wird die Irreductibilität derselben nachgewiesen, der Grad des oben erwähnten Körpers bestimmt und die Gruppe der Gleichung wirklich bestimmt.

Die Untersuchungen, die zu den genannten Resultaten führen, sind überdies mit einigen Anwendungen auf Probleme des zweiten Theiles und auf die bekannten Kronecker'schen Classenzahlrelationen verwoben.

Den Schluss des Werkes bildet die Untersuchung der Normen der Classeninvarianten $f(\omega)$ und die Theilung der elliptischen Functionen mit singulären Moduln.

Als Anhang wird ein Verzeichniss von Classeninvarianten beigegeben.

Dresden, April 1891. MARTIN KRAUSE.

Johannes Marcus Marci a Cronland, sein Leben und gelehrtes Wirken. Festvortrag, gehalten bei der am 31. Jänner 1891 stattgehabten Jahresversammlung der königl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften von Prof. Dr. F. J. STUDNIČKA. Prag 1891. Verlag der königl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. XXXII Seiten.

Johannes Marcus Marci, der seit seiner Adelung 1654 den Beinamen von Cronland führte, ist 1595 geboren und 1667 gestorben, nachdem er seit einem Jahre erblindet war. Er war Leibarzt zweier Kaiser, Ferdinand III. und Leopold I., und Professor der Medicin an der Universität Prag. Trug seine ärztliche Thätigkeit ihm die Bewunderung der Zeitgenossen und reiche Schätze ein, so weiss die Geschichte der Physik zwei bleibende Verdienste des Marci zu erzählen. Im Jahre 1639 entdeckte er die Gesetze des Stosses elastischer Körper, im Jahre 1648 die Dispersion des Lichtes. Herr Studnička erörtert namentlich die erstgenannte Entdeckung, welche Huygens zwar 1653 in selbständiger Weise nachentdeckte, aber dann Kenntniss erhielt, dass er in dem böhmischen Gelehrten einen Vorgänger besass. Aus den Briefen von Huygens geht hervor, dass er die Schrift „De proportions motus“ im Jahre 1654 gelesen, aber nicht ganz so gewürdigt hat, wie dieses Werk es verdiente.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 29. Februar 1892.

Periodische Schriften.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Math.-naturw. Cl. 58. Bd. Wien, Tempsky. 70 Mk.

Sitzungsberichte d. k. böhm. Gesellschaft d. Wissensch. Math.-naturw. Cl. Jahrg. 1891. Prag, Rivnač 7 Mk. 40 Pf.

Physikalische Revue. Herausgeg. v. J. Graetz. 1. Bd. 1892. 1. Heft. Stuttgart, Engelhorn. Compl. (12 Hefte). 32 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1885. Dargestellt v. d. physik. Gesellschaft in Berlin. 41. Jahrg. 2. und 3. Abth. Berlin, G. Reimer. 41. Jahrg. compl. 40 Mk.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam. Nr. 28. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Meteorolog. Jahrbuch f. 1890. Königr. Sachsen. Chemnitz, Bülz. 10 Mk.

Mémoires de l'académie des sc. de St. Petersbourg. 7. série, tome 38, Nr. 7. Leipzig, Voss. 2 Mk. 65 Pf.

—— tome 39. Ebendas. 21 Mk. 60 Pf.

Reine Mathematik.

Güntsche, R., Zur Integration der Differentialgleichung $y' = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3$. (Dissert.) Jena, (Rudolstadt, Dabis.) 60 Pf.

Hertzer, H., Die geometrischen Grundprincipien der Parallelprojection. Berlin, Späth. 1 Mk. 80 Pf.

Stüler, F., Die natürlichen Anschauungsgesetze d. perspectiv. Zeichnens. Breslau, Woywod. 3 Mk.

Angewandte Mathematik.

Brodmann, C., Untersuchungen über den Reibungscoefficienten von Flüssigkeiten. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 80 Pf.

Airy, B., Die Gravitation, eine elementare Erklärung der hauptsächlichsten Störungen im Sonnensystem; übersetzt v. R. Hoffmann. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Plassmann, J., Beobachtungen veränderl. Sterne. 3. Theil. Köln, Bachem. 2 Mk.

Physik und Meteorologie.

Hellborn, E., Ueber den Zusammenhang der physikal. Eigenschaften der Flüssigkeiten. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

Schlichting, K., Die Gravitation, eine Folge der Aetherbewegung. Lüben, Goldschiener. 50 Pf.

Blasius, W., Drei Vorträge über Meteorologie. Braunschweig. Bock & Co. 80 Pf.

Violle, J., Lehrbuch d. Physik. Deutsch v. Gumlich, Holborn u. m. A. 1. Theil. Mechanik. Berlin, Springer. 10 Mk.

Fig. 4.

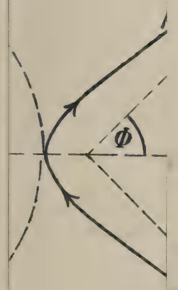


Fig. 8.

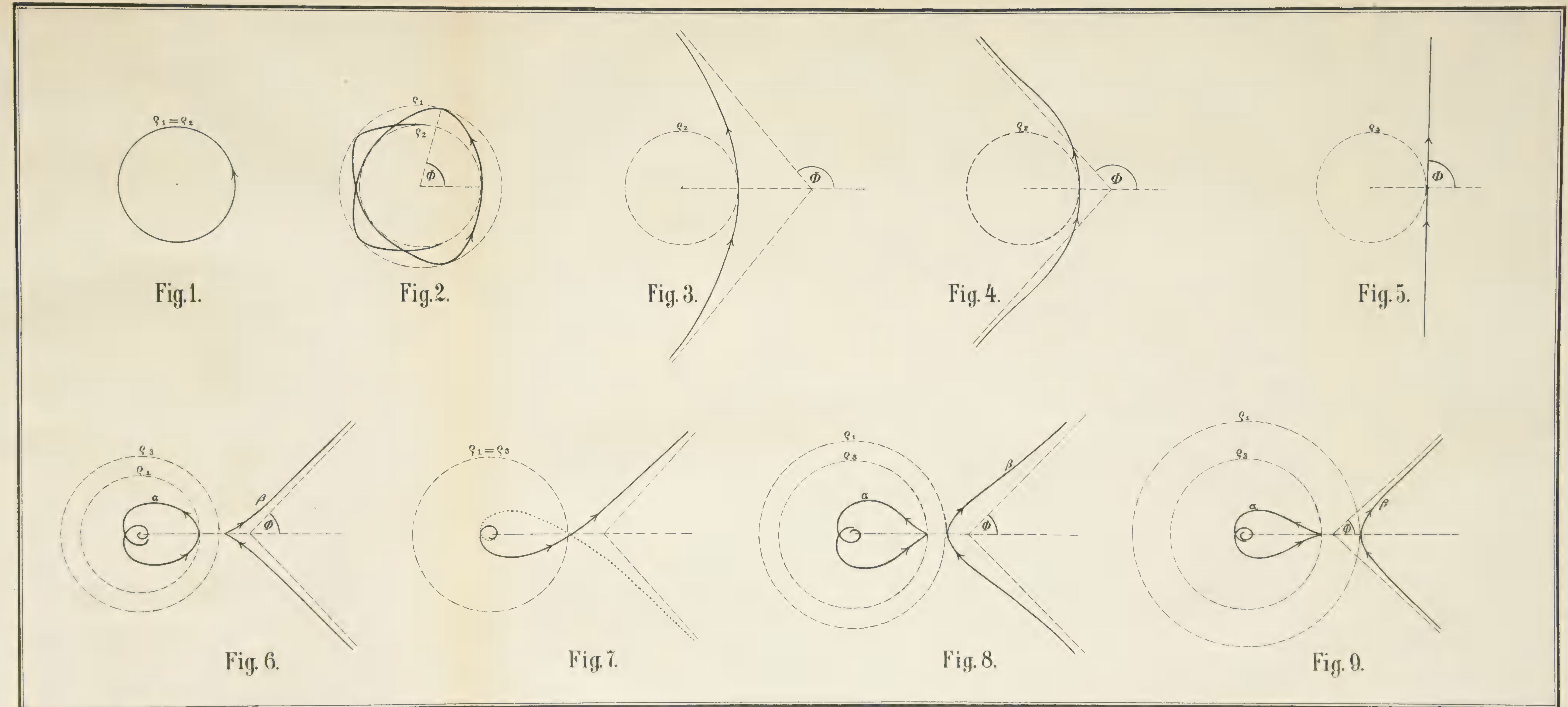


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.

Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

e

d

$r' = c$

c

$r = \infty$

$r' = c$

$r = \infty$

$r' = c$

$r = \infty$

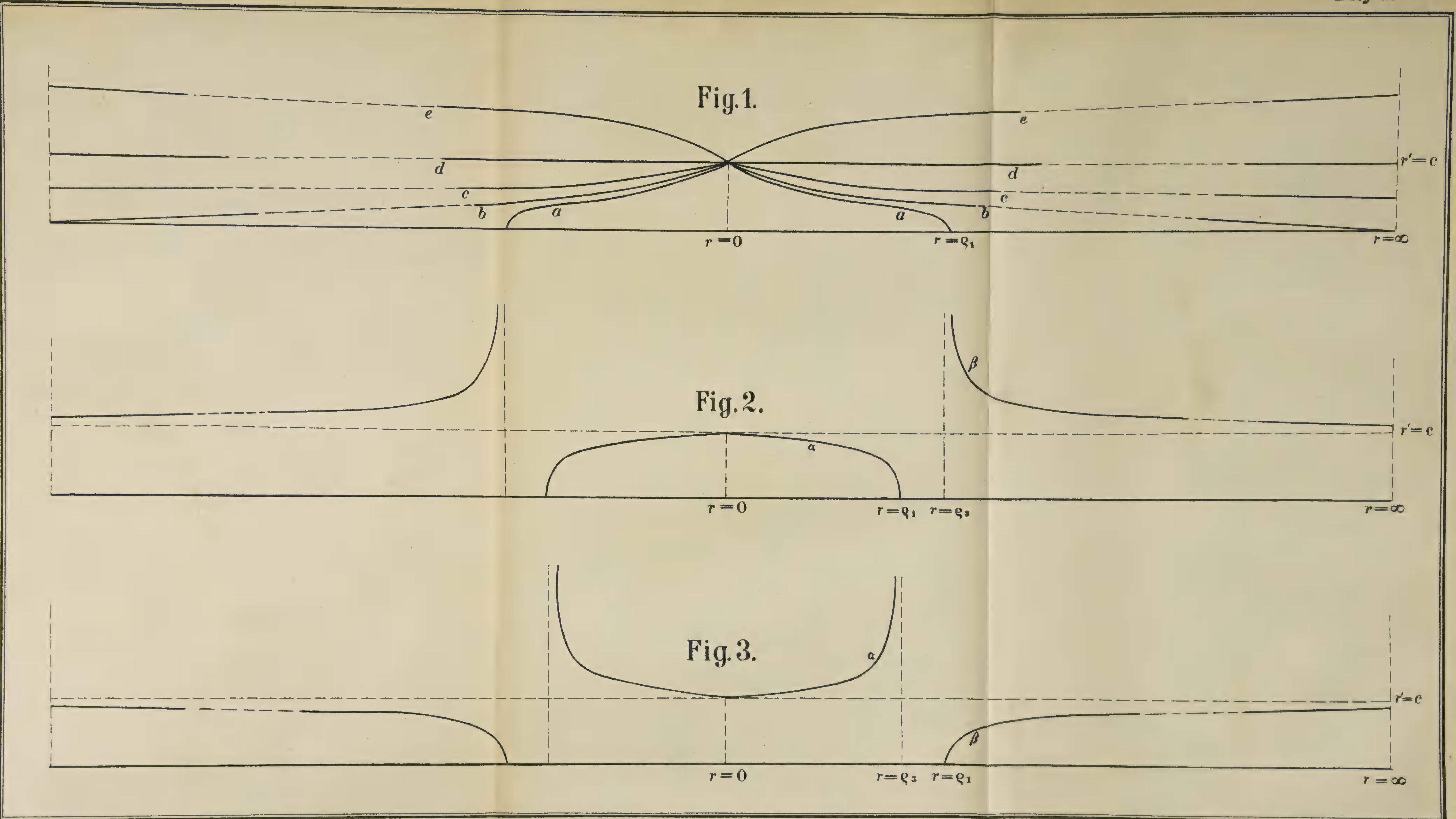
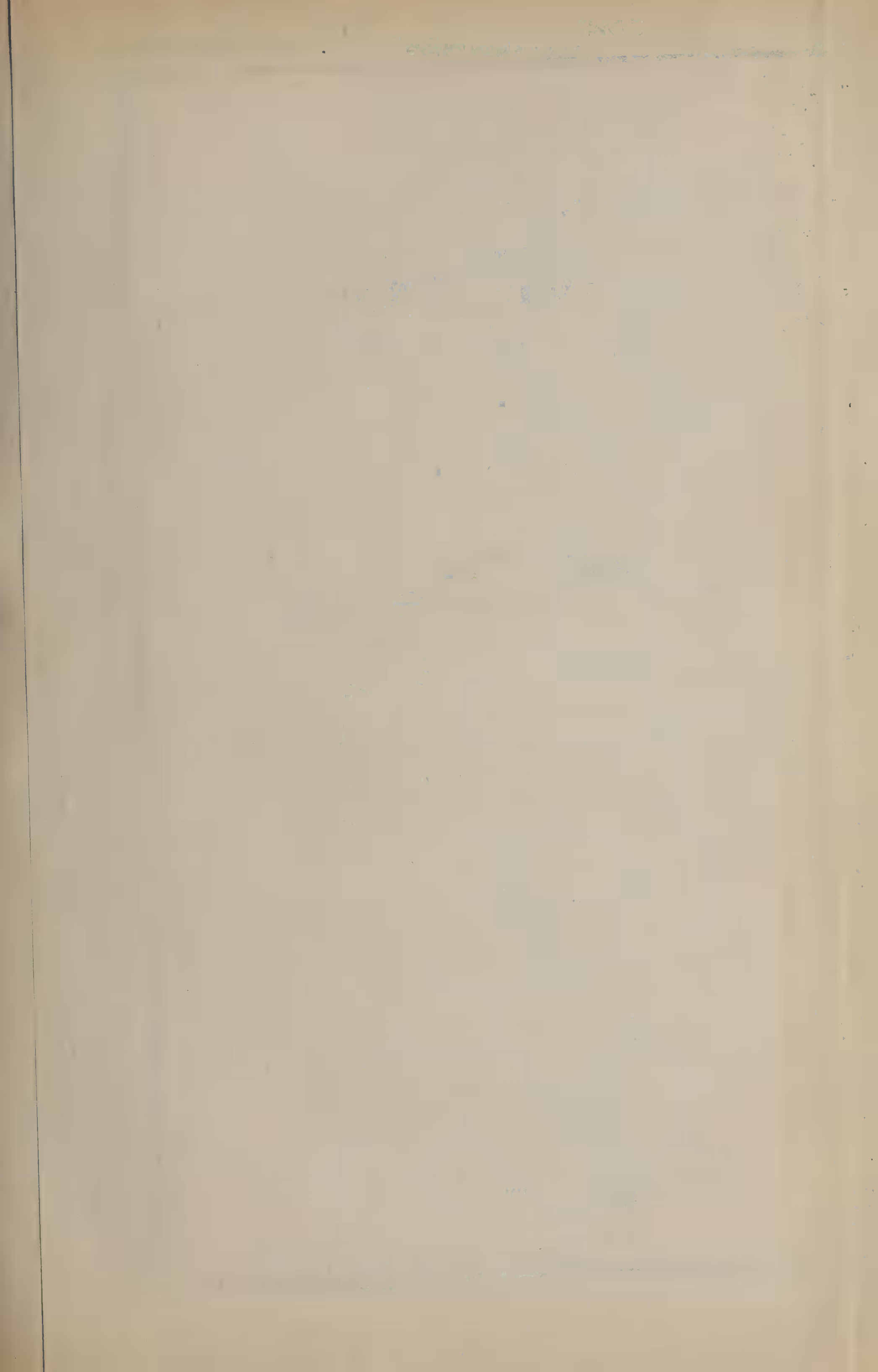
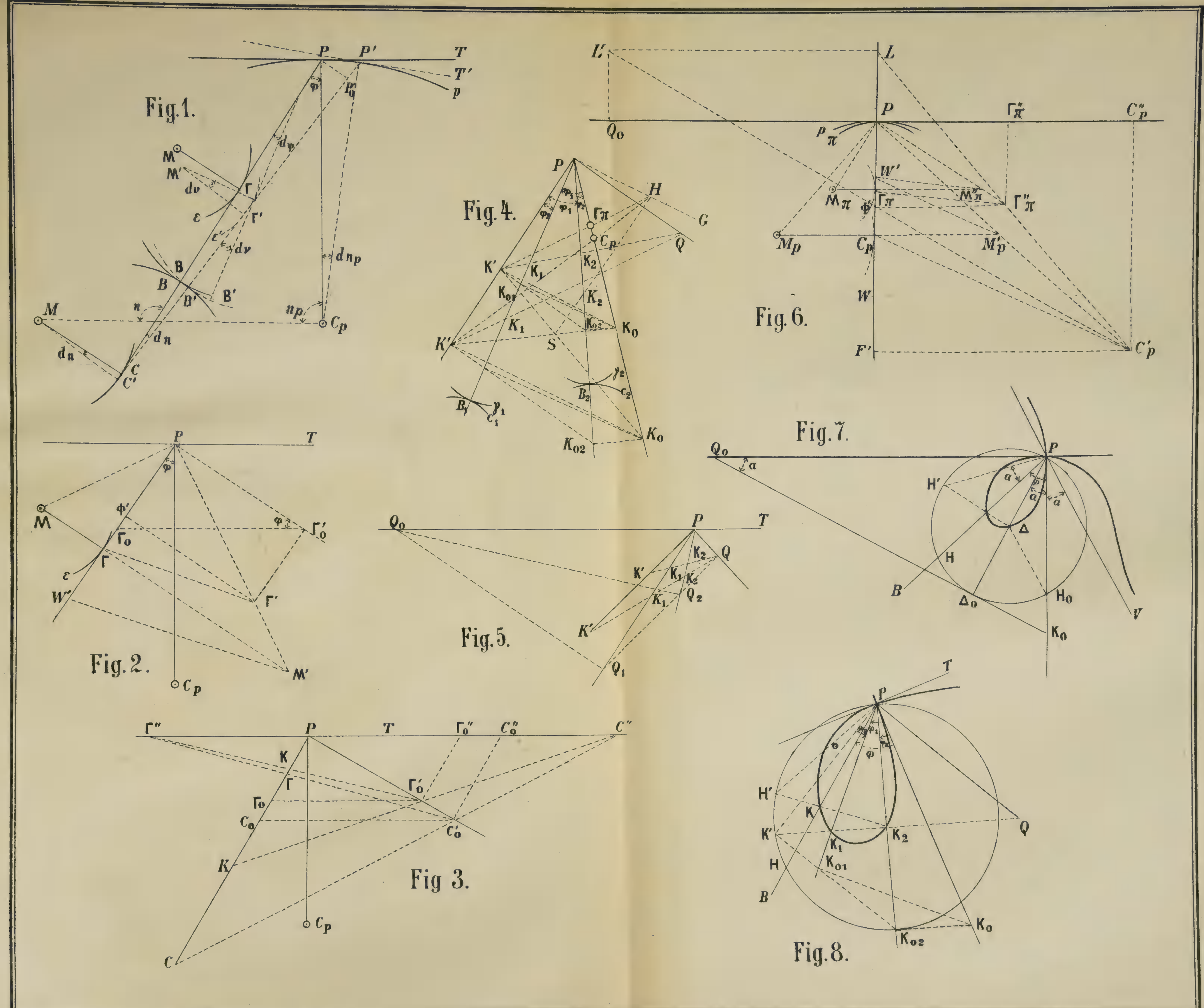


Fig. 1.
e
e
d
d
c
c
b
b
a
a
r' = c
r = 0
r = ϱ₁
r = ∞
Fig. 2.
β
α
r' = c
r = 0
r = ϱ₁
r = ϱ₃
r = ∞
Fig. 3.
α
β
r' = c
r = 0
r = ϱ₃
r = ϱ₁
r = ∞




Fig. 1.
Fig. 2.
Fig 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

Historisch-literarische Abtheilung.

PSELLUS SUR DIOPHANTE.

Par

Paul Tannery.

Le fragment grec, publié ci après pour la première fois, se trouve:

1. A la bibliothèque de l'Escorial, dans le manuscrit *Y—III*—12, f° 73 suiv., sous le titre: *Ἀπὸ τῆς Διοφάντου ἀριθμητικῆς*;
2. A Florence, dans le Laurentianus LVIII, 29, f° 196 suiv., où il est au contraire intitulé: *Προλαμβανόμενα τῆς κατ' ἀριθμητικὴν αἰγυπτιακῆς μεθόδου τοῦ Ψέλλου.*

Ces deux manuscrits, dont je désignerai respectivement les leçons au moyen des lettres *E* et *F*, sont indépendants l'un de l'autre. Ils paraissent provenir d'un archétype relativement fautif et difficile à lire en certains passages; ils semblent à peu près du même âge (vers le XIV[e] siècle) et aucun d'eux ne mérite une préférence marquée sur l'autre.

Je dois la copie du texte de Florence à l'obligeance du savant philologue H. Vitelli; j'ai pris moi-même celle du manuscrit de l'Escorial.

Ce fragment forme le début d'un extrait d'une lettre adressée à l'un de ses correspondants par le polygraphe byzantin Michel Psellus (1020—1105?), auquel on attribue* d'ordinaire un traitè De quatuor mathematicis scientiis, plusieurs fois édité au XVI[e] siècle. Dans la suite de l'extrait, se trouve une copie littérale (avec les fautes grossières des manuscrits du XVI[e] siècle, Parisini (1642 et 2361) de divers problèmes de stéréométrie du recueil Heronis mensurae.** Psellus termine sa lettre en refusant au contraire de renseigner son correspondant sur les

---

* Cette attribution, mise en doute par le premier éditeur. Arsénius de Monembasie (Venise, 1532), ne peut guères se soutenir, ce traité étant expressément daté, dans la partie astronomique, de l'an du monde 6516, soit 1008 après J.-C-

** Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum Reliquiae. Ed. Hultsch, Berlin, Weidmann, 1864, pages 188 et suiv.

absurdes procédés divinatoires de la lettre de Petosiris à Necepso et du *Πλινθίδιον* de Pythagore.*

Dans le texte que je publie, on reconnaîtra facilement les passages littéralement copiés ou fidèlement transcrits, quant au sens, des Arithmétiques de Diophante (Livre I, déf. 1, 2, 3). J'ai fait d'autre part ressortir, en espaçant les caractères, certaines additions faites par Psellus et dont l'importance pour l'histoire des mathématiques est considérable; je considère comme très-probable que Psellus a emprunté ces additions à des scholies marginales de l'exemplaire de Diophante qu'il avait tous les yeux. L'auteur de ces scholies avait, de son côté, dû utiliser sur écrit sur l'arithmétique (ou plutôt la logistique) d'Anatolius d'Alexandrie, lequel vivait dans la seconde moitié du IIIe siècle de notre ère.**

L'existence d'un manuscrit de Diophante portant de pareilles scholies est d'ailleurs prouvée par le fait qu'une annotation marginale, dérivant d'une nomenclature due à Anatolius, a, par suite d'une confusion, passé dans le texte de Diophante et entrainé une corruption que permet de corriger sûrement l'extrait de Psellus (voir les notes f et l du texte).

Γλαφυρωτάτην παρέχεται χρείαν τῇ κατὰ τοὺς ἀριθμοὺς οἰκονομίᾳ καὶ ἡ κατ' Αἰγυπτίους τῶν ἀριθμῶν[a] *μέθοδος, δι' ἧς οἰκονομεῖται τὰ κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν*[b] *προβλήματα. Δεῖ δέ σε πρῶτον κατανοῆσαι τὰ τῶν παρ' αὐτοῖς ἀριθμῶν ὀνόματα καὶ τίνα δύναμιν ἕκαστον κέκτηται· ἔστι γὰρ παρ' αὐτοῖς, ὡς δὲ καὶ*[c] *παρ' ἡμῖν, μονὰς καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται*[d]*· ἀριθμὸς δὲ παρ' αὐτοῖς ἰδιαίτερον λέγεται ὁ μηδὲν μὲν*[e] *ἰδίωμα κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἀόριστον*[f]*· καλεῖται δὲ αὐτοῖς*[g] *ὁ ἀριθμὸς οὗτος καὶ πλευρά.*

Δύναμις δέ ἐστιν ὅταν ἀριθμὸς ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ· τοῦτο δὲ καλεῖται καὶ τετράγωνος ἀριθμός· εἰ οὖν ὑπεθέμεθα τὸν ἀριθμὸν μονάδων β̅, ἡ δύναμις ἔσται μονάδων δ̅.

Κύβος δέ ἐστιν ὅταν ἀριθμὸς ἐπὶ τὴν δύναμιν πολλαπλασιασθῇ· οἷον ὑποθώμεθα τὸν ἀριθμὸν μονάδων β̅· ἡ δύναμις αὐτοῦ τὰ δ̅ ἐὰν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τὰ β̅ πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται ὁ η̅ ἀριθμός[h]*, ὃς δὴ κύβος ἐστί.*

Δυναμοδύναμις δέ ἐστιν ὅταν ἡ δύναμις ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθῇ· οἷον ἡ δ̅ ἐφ' ἑαυτήν[i] *καὶ γίνεται ὁ*[j] *ι̅ς̅.*

Δυναμόκυβος δέ ἐστιν[k] *ὅταν ἡ δύναμις ἐπὶ κύβον πολλαπλασιασθῇ· ὥσπερ ὁ δ̅ ἐπὶ τὸν η̅ καὶ γίνεται λ̅β̅· καὶ καλεῖται ἄλογος*[l] *πρῶτος*

---

* Voir ma Notice sur des fragments d'onomatomancie arithmétique (Not. et Extr. des mss. XXXI_2, 1885).

** Je considère comme un même personnage le maître de Iamblique et l'évêque de Laodicée; voir mon ouvrage: La Géom. grecque etc. (Paris, Gauthier-Villars 1887).

a) *κατ' αἰγυπτίους τῶν ἀριθμῶν* *F* *αἰγυπτιακὴ* *E* *b*) *ἀνάλυσιν* *F* *c*) *καὶ* *F* *ἔστι* *E* *d*) cf Euclide, VII déf. 1. *F* écrit *ἕκαστα* et omet *ἓν* · *E* omet *τῶν ὄντων* *e*) *μὲν* om. *F* *f*) Mot du texte de Diophante, auquel est substitué dans les manuscrits de cet auteur celui d'*ἄλογος* (von Note *l*) *g*) *αὐτὸς* *E* *h*) *ἀριθμὸς* om. *E* *i*) *ἐφ'* (avant *ἑαυτὴν*) om. *F* *j*) *ὁ* om *F* *k*) *ἐστιν* om. *E* *l*) *F* a en marge le glos-

(οὔτε γὰρ τετράγωνός ἐστιν οὔτε κύβος) καὶ ἀριθμὸς πέμπτος· πρῶτος[m] γὰρ ἁπλοῦς[n]) ἀριθμός· δεύτερος δύναμις· τρίτος κύβος· τέταρτος δυναμοδύναμις· καὶ πέμπτος οὗτος ὁ δυναμόκυβος.

Κυβόκυβος δέ ἐστιν ὅταν κύβος ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθεὶς ἀριθμὸν ποιήσῃ.

Ἄλογος δὲ δεύτερος ἀριθμός ἐστιν ὅταν δύναμις ἐπὶ ἄλογον πρῶτον πολλαπλασιασθῇ· τῆς γὰρ δυνάμεως οὔσης μονάδων δ̅, ὡς εἴρηται, τοῦ δὲ πρώτου ἀλόγου μονάδων λβ̅, τὸ ὑπ' αὐτῶν ἔσται μονάδων ρκη̅, ὅπερ καλεῖται ἄλογος δεύτερος· καλεῖται δὲ ὁ[o]) αὐτὸς καὶ ἀριθμὸς ἕβδομος.

Τετραπλῆ δὲ δύναμίς ἐστιν ὅταν δύναμις ἐπὶ κυβόκυβον πολλαπλασιασθῇ.

Κύβος δὲ ἐξελικτός ἐστιν ὅταν δύναμις ἐπὶ ἄλογον δεύτερον πολλαπλασιασθῇ.

Τῶν δὲ τοιούτων ἀριθμῶν[p]) καὶ τὰ ὁμώνυμα μόρια ὁμοίως τούτοις κληθήσεται· τοῦ μὲν ἀριθμοῦ ἀριθμοστόν· τῆς δὲ δυνάμεως δυναμοστόν· τοῦ δὲ κύβου κυβοστόν· τῆς δὲ δυναμοδυνάμεως δυναμοδυναμοστόν· τοῦ δὲ δυναμοκύβου δυναμοκυβοστόν· τοῦ δὲ κυβοκύβου κυβοκυβοστόν.

Περὶ δὲ τῆς αἰγυπτιακῆς μεθόδου ταύτης Διόφαντος μὲν διέλαβεν ἀκριβέστερον, ὁ δὲ λογιώτατος Ἀνατόλιος τὰ συνεκτικώτατα μέρη τῆς κατ' ἐκεῖνον ἐπιστήμης ἀπολεξάμενος, ἑτέρως Διοφάντου[q]) συνοπτικώτατα[r]) προσεφώνησε· καὶ εἴ τις τὰς ἐντεῦθεν μεθόδους εἰδείη, τὰ προβαλλόμενα ἐνίοις ἐν τοῖς ἐμμέτροις ἐπιγράμμασιν ἀριθμητικὰ προβλήματα σαφέστατα διαλύσειε· τὰ μὲν γὰρ τούτων διαλύεται διὰ τοῦδε τοῦ θεωρήματος τῆς αἰγυπτιακῆς ἀναλύσεως, τὰ δὲ δι' ἑτέρου· δεῖ γὰρ τὸν προβεβλημένον ἀριθμὸν διελεῖν ἢ ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ ἢ ἐν ἐπιτετάρτῳ ἢ ἐν ἑτέρῳ τοιούτῳ· καὶ ἀπὸ τῆς τοιαύτης διαιρέσεως εὐσύνοπτον τὸ προβεβλημένον γενήσεται. Καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοσοῦτόν σοι[s]).

Je crois inutile de donner une traduction de ce texte très-facile à comprendre. Je me bornerai donc à quelques remarques sur les points essentiels.

1. Les expressions ἡ κατ' Αἰγυπτίους μέθοδος, ἡ αἰγυπτιακὴ ἀνάλυσις, appliquées à ce que nous appelons la méthode algébrique de Diophante, soulèvent un problème d'autant plus grave qu'on ne peut guères les croire forgées par Psellus.

---

sème ἀναίτιος. *m*) *F* a **πρῶτον** et ensuite **δεύτερον, τρίτον, τέταρτον, πέμπτον** (**καὶ** étant omis). *E* a de même **τρίτον** et **τέταρτον** *n*) **ἁπλῶς** *EF* *o*) **ὁ** om. *E* *p*) **τὸν δὲ τοιοῦτον** *F*, **τῶν δὲ κατὰ τῶν** *E* *q*) **ἑτέρῳ Διοφάντῳ** *EF*, comme si Anatolius avait dédié son ouvrage à un second Diophante, sens que je crois peu admissible; mais on pourrait peut être conserver *Διοφάντῳ*, en faisant régir ce mot par **πρός**, qui marquerait une addition (à Diophante) *r*) **συνεκτικώτατα** *E* (comme à la ligne précédente *s*) **σοι** om. *E*.

Dans la scholie mathématique sur le Charmide de Platon, que je crois empruntée à Anatolius*, on lit sur la logistique: *μέρη δὲ αὐτῆς αἱ Ἑλληνικαὶ καὶ Αἰγυπτιακαὶ καλούμεναι μέθοδοι ἐν πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς κ.τ.ε.* Mais il semblerait qu'il s'agit là de tout autre chose, c'est-à-dire de différents procédés de calcul pour les opérations élémentaires.

Faut-il, d'après le fragment de Psellus, entendre que la méthode égyptienne pour les multiplications et divisions de la scholie du Charmide consiste essentiellement dans la distinction et la nomenclature des diverses puissances successives de l'inconnue et de leurs inverses, et dans les relations qui subsistent entre elles pour leurs produits et leurs quotients? Mais on peut opposer à cette hypothèse le grave témoignage d'un auteur certainement antérieur à Anatolius et très probablement à Diophante. Les Philosophumena** attribuent en effet à Pythagore la série des sept degrés de l'unité au cubocube (sixième puissance), c'est à dire la seule série que reconnaisse Diophante.

Je suis donc porté à croire que le commentateur de Diophante qui aura compilé Anatolius, a fait quelque confusion sur le sens dans lequel ce dernier a pu employer l'expression de méthode égyptienne.

2. Quoiqu'il en soit à cet égard, le fragment de Psellus nous prouve clairement que la série des sept degrés de Pythagore et de Diophante avait été prolongée jusqu'à dix par Anatolius et que celui-ci avait soit proposé soit au moins mentionné une nomenclature différant essentiellement, sur certains points, de la seule que nous connaissions d'après Diophante.

Cette nomenclature, incomplètement rapportée par Psellus, est la suivante:

	Anatolius.	Diophante.
0	*Μονάς.*	*μονάς.*
1	*πρῶτος ἀριθμός — ἀριθμὸς (ἁπλοῦς) — πλευρά.* —	*ἀριθμός.*
2	*δεύτερος ἀριθμός — τετράγωνος-δύναμις.*	*δύναμις.*
3	*τρίτος ἀριθμός — κύβος.*	*κύβος.*
4	*τέταρτος ἀριθμός. — δυναμοδύναμις.*	*δυναμοδύναμις*
5	*πέμπτος ἀριθμός — ἄλογος πρῶτος.*	*δυναμόκυβος*
6	*ἕκτος ἀριθμός.* — ?	*κυβόκυβος.*
7	*ἕβδομος ἀριθμός. — ἄλογος δεύτερος*	
8	*(ὄγδοος ἀριθμός) — τετραπλῆ δύναμις.*	
9	*(ἔννατος ἀριθμός) — κύβος ἐξελικτός.*	

Cette nouvelle nomenclature est d'ailleurs elle-même double; sous une forme, elle exprime aussi nettement que possible la notion des puissances successives, classées d'après leur degré. Il eût suffi de traduire cette notion par un symbole approprié pour obtenir la notation exponentielle.

---

* Voir ma Géometrie Grecque, p. 4, 8.

** Doxographi Greeci éd. Diels, p. 557, 4.

Sous la seconde forme, la nomenclature d'Anatolius a une singulière relation avec celle des algébristes italiens de la renaissance qui dénommaient les puissances d'après la composition en facteurs de leurs exposants (et non, comme Diophante, d'après la composition additive de ces exposants). Le rapprochement s'impose particulièrement pour la dénomination des puissances à exposant premier; ἄλογος πρῶτος = relato primo; ἄλογος δεύτερος = relato secondo. Il y aurait évidement à rechercher si entre ces deux nomenclatures, il n'y a pas en un intermédiaire arabe, encore inconnu.

3. Il semble ressortir inéluctablement, tant du témoignage du scholiaste copié par Psellus, que de la différence des nomenclatures dont nous venons de parler, que Diophante a composé son ouvrage avant qu'Anatolius ait rédigé le sien. Le fait a son importance, puisque l'époque de Diophante n'est déterminée par des preuves suffisantes qu'entre Hypsiclès (IIe siècle avant notre ère) et Théon d'Alexandrie (IVe siècle de notre ère).

J'estime d'ailleurs que si Diophante avait vécu assez longtemps avant Anatolius pour que sa réputation ait été assise comme elle l'était par exemple dès le temps de Théon d'Alexandrie et d'Hypatia, les fragments sur la logistique que nous possédons de l'évêque de Laodicée et où il est fait mention de problèmes du genre de ceux que traitent les Arithmétiques, contiendraient une allusion plus nette à cet ouvrage. Je considèrerais donc Diophante comme à peu près contemporain d'Anatolius, mais tandis qu'avant de decouvrir le fragment de Psellus, je l'aurais plutôt regardé comme postérieur, je dois aujourd'hui affirmer son antériorité.

4. La fin du fragment, dans laquelle Psellus explique, comme il la conçoit, l'usage que l'en peut faire de la méthode de Diophante, semble devoir être laissée à son compte et non attribuée au scholiaste, comme ce qui précède. Il ne s'élève pas de fait au delà du problème I, 2. Nous savons que Léonard de Pise a trouvé à Constantinople au moins un arithméticien qui gardait encore la tradition des problèmes d'analyse indéterminée. L'ignorance dont fait preuve Psellus n'était donc pas générale parmi ses contemporains, quoique le mauvais état du texte de Diophante et le fait que les manuscrits actuels dérivent tous d'un même exemplaire du VIIIe ou IXe siècle très-fautif, prouvent assez que cet auteur était absolument négligé chez les Byzantins.

En résumé, le fragment que j'ai publié ci dessus me paraît soulever des problèmes historiques nouveaux sur lesquels j'ai indiqué mon opinion, mais que je ne prétends nuellement avoir résolus définitivement. Je serais heureux que leur discussion apportât quelque nouvelle lumière, dont je pourrais profiter pour l'édition de Diophante que je prépare et dont, je l'espère, l'apparition ne sera désormais plus retardée.

Zur Erinnerung an Paul Günther.

Von

A. Gutzmer.

In der schönsten und hoffnungsvollsten geistigen Entwicklung begriffen, noch bis zum letzten Tage mit mathematischen Problemen beschäftigt, ist Paul Günther am 27. September 1891 zu Berlin einem langen, schweren Leiden erlegen. Wiewohl ihm nur eine sehr kurze Frist zum Forschen und Wirken bestimmt war, hat er doch eine Reihe wichtiger und schwieriger Untersuchungen unternommen, die auch Denen, welche ihn nicht persönlich kannten, zu erkennen geben, was die Wissenschaft noch von dem Talent und dem analytischen Geschick des Dahingeschiedenen zu erwarten hatte. Der Erinnerung an den uns allzu früh Entrissenen und an seine Arbeiten seien die folgenden, von Freundeshand verfassten Zeilen gewidmet.

Paul Günther wurde am 2. April 1867 zu Bernburg als der jüngste Sohn des Gymnasialdirectors Prof. Dr. Friedrich Günther geboren und empfing seine Schulbildung auf dem vom Vater geleiteten Gymnasium. Nach dem im Jahre 1875 erfolgten Tode des Vaters überwachte die Mutter mit grösster Sorgfalt die Erziehung des etwas schwächlichen Knaben. Der Letztere machte geistig so schnelle Fortschritte, dass er bereits Ostern 1884 die Reifeprüfung auf's Glänzendste bestand. Schon als Schüler hatte er sich eigenen mathematischen, meteorologischen und astronomischen Studien hingegeben, und zwar in durchaus exacter und wissenschaftlicher Weise. Als er zu Ostern 1884 die Berliner Universität bezog, um sich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften zu widmen, war er mit der Algebra und der Lehre von den Determinanten bereits in hohem Masse vertraut, so dass er in seinem zweiten Semester der Kronecker-schen Vorlesung über die Theorie der algebraischen Gleichungen mit Verständniss und Erfolg zu folgen vermochte. Neben einer sehr grossen Zahl mathematischer Vorlesungen hörte er astronomische, physikalische meteorologische, naturwissenschaftliche und philosophische Collegien, überall seinen ausdauernden Fleiss, seine schnelle und scharfe Auffassungsgabe beweisend.

Mit der ausgesprochen wissenschaftlichen Begabung waren bei Günther die schönsten menschlichen Tugenden vereinigt; liebenswürdig, gesellig und

heiter, dabei bescheiden und im höchsten Masse rücksichtsvoll, war er trotz seiner Jugend eine in sich abgeschlossene Persönlichkeit, die, frei von allem Streberthum, in der wissenschaftlichen Arbeit ihre innere Befriedigung fand.

Auf die mathematische Ausbildung Paul Günther's hatten, ausser den Vorlesungen von Fuchs, Kronecker und Weierstrass, namentlich seine persönlichen Beziehungen zu den Herren Fuchs und Hamburger einen nachhaltigen Einfluss. Die Fortschritte, welche Günther machte, waren sichtbare; er reifte geistig ausserordentlich schnell, — um so beklagenswerther ist sein frühes Ende.

Paul Günther hat im Ganzen sieben Arbeiten druckfertig hergestellt, von denen fünf bereits veröffentlicht sind, während sich die beiden andern bei der Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik befinden. Die in diesen Arbeiten niedergelegten Untersuchungen, welche theils der Theorie der linearen Differentialgleichungen, theils dem Gebiete der elliptischen Functionen und theils der allgemeinen Functionentheorie angehören, mögen im Folgenden kurz charakterisirt werden; sie zeigen den Verfasser in verschiedenen Gebieten der höheren Mathematik gleich wohl bewandert und gleich glücklich in seinen Forschungen.

In seiner Dissertation, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 105, auf Grund deren er nach einer mit dem Prädicate „summa cum laude" bestandenen Prüfung am 15. März 1889 die philosophische Doctorwürde erlangte, beschäftigt sich Günther, im Anschluss an eine Arbeit des Herrn Hamburger (a. a. O., Bd. 103), mit linearen Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und sich im Unendlichen regulär verhalten; und zwar handelt es sich dabei um die Existenzbedingungen und die Darstellung der diesen Differentialgleichungen genügenden Normalintegrale. Bekanntlich kommt es dabei auf die Bestimmung des sogenannten determinirenden Factors und eines gewissen Exponenten A an. Herr Hamburger hatte sich bei dem genannten Problem darauf beschränkt, dass die algebraische Gleichung, welche zur Bestimmung des höchsten Coefficienten der im Exponenten des determinirenden Factors auftretenden ganzen Function dient, nur einfache Wurzeln besitzt. Hier setzt Günther's Arbeit ein. Mit Hilfe eines wohlbestimmten Rechnungsverfahrens, das in allen Fällen nach einer endlichen Anzahl von Operationen zum Ziele führt, erledigt er den Fall gleicher Wurzeln vollkommen. Dabei erwies es sich als nothwendig, dass man sich nicht auf den grösstmöglichen Werth des Grades des Exponenten des determinirenden Factors beschränkt, sondern gleich allgemein die Fälle in Betracht zieht, in denen der Grad dieses Exponenten alle möglichen Werthe annimmt. Ist der determinirende Factor ermittelt, so handelt es sich noch um die Bestimmung einer Potenzreihe; hierzu muss der erwähnte Exponent A vermittelst einer gewissen, von Herrn Hamburger ange-

gebenen algebraischen Gleichung bestimmt werden. Es ist nun ein sehr bemerkenswerthes Resultat der Dissertation Günther's, dass er die beiden bisher erforderlichen algebraischen Gleichungen durch eine einzige ersetzt, welche sowohl den determinirenden Factor, als auch den Exponenten A liefert.

Die beiden nächsten Publicationen, auf Grund deren sich Paul Günther im Sommer 1890 an der Universität Berlin habilitirte, behandeln die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der Differentialgleichungen. Die Bestimmung der Coefficienten der Fundamentalgleichung, welche im Falle irregulärer Integrale bekanntlich die Ermittlung transcendenter Grössen erfordert, war von Herrn Hamburger auf die Berechnung gewisser anderer Grössen zurückgeführt worden. Für diese Grössen, und somit für die Coefficienten der Fundamentalgleichung, gelingt es Günther in der ersten der in Rede stehenden Arbeiten (Journal für Mathematik, Bd. 106) explicite Ausdrücke durch die Coefficienten der Differentialgleichung zu finden mittels der merkwürdigen, von Herrn Fuchs angegebenen Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen durch iterirte Integrationen (Annali di Matematica 1870, Bd. IV). In der zweiten dieser Arbeiten (a. a. O., Bd. 107) behandelt Günther dieselbe Aufgabe auf Grundlage derselben Darstellungsweise der Integrale nach einer zweiten Methode, die zugleich wichtige Nebenresultate liefert.

Wie in der Theorie der Differentialgleichungen, so hatte Paul Günther auch in der Theorie der elliptischen Functionen eindringende Studien gemacht; dies bekunden seine nächsten beiden Schriften (a. a. O., Bd. 108 und 109), zu deren Abfassung er durch eine kleine Controverse zwischen den Herren Humbert und Otto Schlesinger veranlasst wurde. Günther beschäftigt sich mit der Frage, wie man auf rein algebraischem Wege entscheiden kann, ob die zwischen zwei eindeutigen elliptischen Functionen mit denselben Perioden bestehende algebraische Gleichung vom Range 0 oder 1 ist, und zwar vor der wirklichen Herstellung derselben, und wie man, falls der Rang gleich 0 ist, ohne Kenntniss der algebraischen Gleichung auf rein algebraischem Wege eine dritte eindeutige doppelt-periodische Function aufstellen kann, durch welche sich die beiden ursprünglichen rational ausdrücken. Die Untersuchung wird auf zwei Wegen durchgeführt, von denen der in der zweiten Arbeit befolgte zugleich die zwischen den doppelt-periodischen Functionen bestehende algebraische Gleichung ohne fremden Theiler liefert.

Von den beiden noch nicht veröffentlichten Arbeiten Paul Günther's, die sich bei der Redaction des Journals für Mathematik befinden, sei — um der Veröffentlichung derselben nicht vorzugreifen — nur so viel bemerkt, dass die eine im Anschluss an die von Abel in seinem Précis gegebene Herleitung über das Additionstheorem der elliptischen Functionen handelt, während sich die zweite mit den zu einem algebraischen Gebilde (x, y) gehörenden eindeutigen Functionen beschäftigt.

Ausser diesen bereits veröffentlichten, bezw. für den Druck bestimmten Arbeiten Paul Günther's sind die beiden Vorlesungen zu erwähnen, die er bei seiner Habilitation gehalten hat, und welche vielleicht noch in der einen oder andern Form zur Veröffentlichung gelangen. Beide Arbeiten sind historischer Art. An der öffentlichen Rede, die er am 6. August 1890 hielt, und welche von der geschichtlichen Entwicklung der modernen Theorie der Differentialgleichungen handelt, erscheint beachtenswerth, dass sie u. a. Zeugniss ablegt für das eingehende Studium der Cauchy'schen Untersuchungen über Differentialgleichungen, sowie für den historischen Sinn des Verfassers. In der zweiten dieser Arbeiten, der vor der philosophischen Facultät gehaltenen Vorlesung, hat Günther seine Studien über die Untersuchungen, welche Gauss im Gebiete der elliptischen Functionen angestellt hat, niedergelegt. Er hat sich in dieser Rede bemüht, die Quellen aufzudecken, aus denen die im Nachlasse von Gauss in zusammenhangslosen Notizen sich vorfindenden Resultate ihren Ursprung nehmen.

Im Laufe des Jahres 1891 war Günther, soweit es sein Befinden zuliess, mit der Abfassung gewisser Capitel eines Handbuchs der Theorie der linearen Differentialgleichungen beschäftigt, das er in Gemeinschaft mit Herrn Ludwig Schlesinger herausgeben wollte. Auch ausserdem hat er sich während seiner Leidenszeit noch mit weit angelegten Untersuchungen beschäftigt; aus seinen mündlichen Mittheilungen war zu entnehmen, dass er Manches nahezu fertig im Kopfe trug, was ihn sein Leiden verhindert hat aufzuzeichnen, doch lässt sich aus den Andeutungen, welche er seinen nächsten Freunden gab, kein bestimmter Gedankengang reconstruiren.

So unvollkommen auch das Bild von der Persönlichkeit Paul Günther's und seinen mathematischen Leistungen ist, das diese wenigen Zeilen zu bieten vermögen, so dürfte doch auch aus den unvollständigen Angaben zu erkennen sein, eine wie ausserordentlich reich begabte, schöpferische Natur der Dahingeschiedene war. Er war durch und durch eine wissenschaftliche Persönlichkeit. Obwohl reich an originalen Anschauungen, suchte er doch niemals mit einer hingeworfenen Idee zu glänzen, er erkannte vielmehr den wahren Fortschritt der Wissenschaft in der Ausführung der Gedanken, in der stetigen Arbeit.*

---

* Es werde darauf aufmerksam gemacht, dass inzwischen, nach Abfassung obiger Worte, auch die beiden S. 48 u. erwähnten Arbeiten Paul Günther's im Journal für Mathematik, Bd. 109, zur Veröffentlichung gelangt sind.

Recensionen.

Théorie des Nombres. Von EDOUARD LUCAS. T. I. (XXXIV, 520). Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891.

Wenngleich eine grosse Anzahl französischer Mathematiker unausgesetzt ihre Bemühuugen der Zahlentheorie zugewandt haben, so ist doch merkwürdiger Weise seit dem Erscheinen (1830) der letzten Auflage von Legendre's grossem Werk in diesem Heimathlande klassischer Lehrbücher über alle Zweige der Mathematik keine zusammenfassende Darstellung der Zahlentheorie veröffentlicht worden.

Diese Lücke schien E. Lucas ausfüllen zu wollen, und ich glaube, dass der erste Band seiner Théorie des Nombres nicht blos in Frankreich freudig begrüsst worden ist, und dass man mit Spannung dem Erscheinen des zweiten Bandes entgegensah.

Aber der Tod hat mit unerbittlicher Hand die Hoffnungen, die auf dieses Werk gesetzt wurden, vereitelt, indem er den Verfasser in der Blüthe der Jahre mitten aus der Arbeit abrief. Lucas hatte an dem in Marseille stattfindenden Congress der Association française pour l'avancement des sciences theilgenommen und den Sectionen für Mathematik und Astronomie präsidirt. Während des Banketts, das den Theilnehmern des Congresses gegeben wurde, liess ein Diener, als er neben Lucas vorbeiging, einen Haufen Teller fallen, von denen einer Lucas an den Kopf traf und einige Schrammen in der Nähe des Ohres hervorrief. Der Verletzung wurde keine Bedeutung beigelegt, aber der Rothlauf trat ein, und nach drei Tagen war Lucas todt.

Wie mir der Verleger schreibt, hat die Société mathématique de France auf den Wunsch der Familie des Verstorbenen einige ihrer Mitglieder bestimmt, das von Lucas hinterlassene Manuscript entgegen zu nehmen, um zu sehen, ob die Veröffentlichung des zweiten Bandes der Zahlentheorie möglich sein wird. Eine Entscheidung hierüber ist noch nicht erfolgt. Inzwischen möge mir gestattet sein, einer Besprechung des ersten Bandes einige Worte über Lucas selbst und seine übrigen mathematischen Arbeiten vorauszuschicken.

Edouard Lucas, geboren zu Amiens im Jahre 1842, wurde 1861 in die École normale supérieure aufgenommen und 1864 nach abgelegtem Examen Hilfsastronom am Observatorium zu Paris. In dem

Kriege gegen Deutschland diente er als Artillerieofficier mit Auszeichnung. Seitdem war sein ganzes Leben der Wissenschaft und dem Unterricht gewidmet. Zuletzt war er Professor der Mathematik am Lycée Charlemagne in Paris. Er beschränkte sich aber nicht auf die Belehrung seiner Schüler im engeren Sinne des Wortes, sondern suchte auch in weiteren Kreisen das Interesse für Mathematik zu wecken. Zu diesem Zwecke hielt er oft Sonntags in dem grossen Amphitheater des Conservatoire des Arts et Métiers Vorträge über unterhaltende mathematische Fragen. Bei solchen Gelegenheiten war der Saal regelmässig zu klein, alle Erschienenen aufzunehmen.

Die wissenschaftlichen Arbeiten, die Lucas in verschiedenen Zeitschriften veröffentlichte, sind so zahlreich, dass es hier unmöglich ist, auch nur eine Uebersicht zu geben. Eine von Laisant im Juli 1880 verfasste Zusammenstellung giebt Titel und Inhalt von mehr als 150 dieser Arbeiten. Dieselben beziehen sich auf fast alle Zweige der Mathematik, und es ist zu wünschen, dass uns dieselben bald in einer Gesammtausgabe zugänglich gemacht werden.

Im Jahre 1883 veröffentlichte Lucas ein zweibändiges Werk „Récréations mathématiques". Der erste Band ist 1891 in zweiter Auflage erschienen. In diesem Werke wird eine grosse Anzahl mehr oder weniger bekannter Spiele und unterhaltender Aufgaben in einer Weise behandelt, die als eine glückliche Vereinigung strenger Wissenschaftlichkeit und fesselnder Unterhaltung bezeichnet werden muss. Jedem Capitel ist eine geschichtliche Einleitung gegeben; auch ist dem ersten Band in seiner neuen Auflage ein ungemein reichhaltiger Index bibliographique beigefügt. Lucas hat sich Bachet's problèmes plaisants zum Vorbild genommen, aber natürlich seinen Vorgänger an Fülle des Inhalts und Klarheit der Darstellung weit übertroffen.

In der Vorrede zur Théorie des Nombres, zu der ich mich jetzt wende, wird der Leser gebeten, etwaige Bemerkungen, Berichtigungen und Zusätze dem Verfasser zur Berücksichtigung bei einer zweiten Auflage mitzutheilen. Da es für mich keinem Zweifel unterliegt, dass ein so trefflich angelegtes Buch von irgend einer Seite vollendet und durch weitere Auflagen noch lange Zeit vor dem Untergange bewahrt bleiben wird, so sei es mir gestattet, bei der Musterung des Inhalts der einzelnen Capitel einige kleine Wünsche zu äussern.

Die Einleitung bildet eine kurze Geschichte der Zahlenlehre. Nach pag. XXVII könnte man meinen, Fibonacci's Liber quadratorum sei statt um 1225 schon 1202, dem Geburtsjahr des Liber Abbaci, geschrieben worden. Auf derselben Seite wird das Wesen und die Bedeutung von Diophant's Arithmetik durch Uebersetzung einer Stelle der Praefatio von Gauss' Disquisitiones geschildert, in der es heisst, Diophant's Werk sei ausschliesslich unbestimmten Aufgaben gewidmet,

während doch ein nicht unbedeutender Theil desselben in noch heute mustergiltiger Weise bestimmte Aufgaben behandelt. Es dürfte sich empfehlen, in einer zweiten Auflage Diophant's Bedeutung in einer widerspruchsfreien Fassung zu geben und jener ohnehin weit verbreiteten irrigen Meinung nicht noch Vorschub zu leisten.

Das erste der drei Bücher, in welche der erste Band zerfällt, giebt in 8 Capiteln die Lehre von den ganzen Zahlen. Der Verfasser behandelt die Zahlenlehre im weitesten Sinne des Wortes, erörtert also auch Gegenstände, die sonst der Algebra zugewiesen werden. Die Grenzlinien zwischen Arithmetik und Algebra liefert ihm der Begriff der Continuität: Alle Untersuchungen, welche die Zahl als (continuirliche) Grösse voraussetzen (Irrationale Zahlen, Logarithmen etc.), gehören in die Algebra, dagegen diejenigen, bei welchen die Zahl einfach als Nummer beim Zählen angesehen wird (Combinationslehre, Wahrscheinlichkeitsrechnung) in die Arithmetik.

Die vier ersten Capitel des ersten Buches sind der Reihe nach der Addition, Subtraction, Multiplication und Division, sowie der auf letzterer beruhenden Classification der ganzen Zahlen gewidmet. Die Behandlung ist hier wie überall ein klare, lichtvolle. Der Verfasser ist ein Führer, der dem Leser Zeit lässt zu folgen, der nicht ungeduldig einem Gipfel zustrebt, sondern auf die Schönheiten, die sich unterwegs darbieten, hinweisst und so die Reise zu einer genussreichen macht. Den reichen Inhalt zu skizziren, würde zu viel Raum in Anspruch nehmen. Freunde der Rechenkunst finden interessante Operationen dargestellt, auch Bemerkungen über Rechenmaschinen, über Zahlensysteme und dergleichen. Um nur zwei Beispiele herauszugreifen, erwähne ich erstens das schöne Verfahren, welches, die Kenntniss des Einmaleins bis $5 \,.\, 5$ voraussetzend, die übrigen Producte durch Benutzung je eines Fingers der beiden Hände liefert (das Verfahren ist übrigens in Stifel's Arithmetica integra, fol. 3 beschrieben und begründet), und zweitens die Division durch 9, welche vermittels der Identität

$$E\frac{a+10b+10^2c+\ldots}{9}=E\frac{a+b+c+\ldots}{9}+[b+c+\ldots]$$
$$+10\,[c+d+\ldots]+10^2\,[d+e+\ldots]+\ldots$$

in eine Addition verwandelt wird.

Das 5. und 6. Capitel behandeln in klarer und durch interessante Anwendungen fesselnder Weise die figurirten Zahlen, die Combinationslehre und einige Probleme der Geometrie der Lage, deren Lösung von der Theorie der Combinationen abhängt. Den Schluss des ersten Buches bildet ein umfangreiches Capitel über algebraische Multiplication.

Das zweite Buch, welches 10 Capitel enthält, ist den rationalen Zahlen gewidmet. Es behandelt die Bruchrechnung mit den Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die algebraische Division, die Interpolation und giebt das Wichtigste über die abgeleiteten Polynome.

In sehr ausgedehnter Weise wird die Summation der Potenzen gleichen Grades der ganzen Zahlen von 1 bis n dargestellt. Wenn es pag. 224 heisst, dass die Formel für die Summe der Quadrate aller Zahlen von 1 bis n sich schon in Fibonacci's Liber quadratorum findet, so ist zu bemerken, dass Fibonacci diese Formel (Bd. II, p. 262) zwar in seiner geometrisch schwerfälligen Weise, aber streng herleitet. Auch die pag. 227 gemachte Bemerkung über die bisher dunkel gebliebene Observatio Fermats zu Bachet's Appendix II, 27 ist nach Tannery (Fermat's Werke, I, S. 241) richtig zu stellen. Weiter sind die symmetrischen Functionen und die Determinanten behandelt, letztere mit besonders schönen Uebungsaufgaben. Eine derselben, von der wir erfahren, dass sie von Le Verrier ein problème piège genannt worden ist, findet sich übrigens schon in Fibonacci, I, pag. 277. Darauf folgt noch ein Capitel über lineare recurrirende Reihen und eins über numerische Functionen zweiter Ordnung.

Das dritte Buch handelt in 6 Capiteln von der arithmetischen Theilbarkeit. Das erste Capitel ist der Betrachtung der gemeinschaftlichen Divisoren und der gemeinschaftlichen Vielfachen der Zahlen gewidmet, das zweite den Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen; das dritte betrachtet die Divisoren der Zahlen, besonders Anzahl, Summe und Product derselben. Hier wird auch die Theorie der vollkommenen und die der befreundeten Zahlen gegeben, die der Verfasser zwar für veraltet hält, aber aufgenommen hat, weil sie die wichtigsten Arbeiten Fermats veranlasst und so die Zahlentheorie ins Leben gerufen haben. Das folgende Capitel giebt die Eigenschaften der Function $\varphi(m)$, welche nach Cauchy Indicateur genannt wird. Es schliesst mit den Formeln Legendre's, die den Zweck haben, die Anzahl der Zahlen zwischen 1 und n zu bestimmen, welche durch gegebene Primzahlen nicht theilbar sind, und mittels welcher, wie wir erfahren, es Piarron de Mondésir gelungen ist, die Anzahl der Primzahlen zwischen 1 und 1000000 zu bestimmen. Die viel weiter gehende schöne Arbeit Meissel's über diesen Gegenstand (Mathem. Annalen II u. III) scheint der Aufmerksamkeit des Verfassers entgangen zu sein. Das nächste Capitel betrachtet die Reste der Zahlen für gegebene Moduln, die Reste der arithmetischen und der geometrischen Reihe, den Fermat'schen und den Wilson'schen Satz, sowie die Verallgemeinerungen derselben. Das letzte Capitel endlich enthält eine ausführliche Theorie der Kettenbrüche nebst Anwendungen auf die Zerlegung der Zahlen in Quadrate und die Auflösung der Gleichung $ax + by = c$ in ganzen Zahlen.

Ehe ich die Besprechung des schönen Buches schliesse, sei mir gestattet, mich gegen einen vom Verfasser gewählten Ausdruck auszusprechen. Wenn man Begriffe oder Sätze der Mathematik nach verdienten Mathematikern benennt, so will man nicht blos diesen Männern eine Huldigung erweisen, sondern auch eine Abkürzung des Ausdrucks erzielen. Es ist

also Nichts dagegen zu sagen, dass die interessante Reihe, deren Bildungsgesetz $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ ist, den Namen des Fibonacci trägt, der sich zwar nicht mit derselben beschäftigt hat, aber in I, pag. 284 eine Aufgabe löst, die zu dieser Reihe führt. Wenn dagegen „der Exponent, zu welchem die Zahl a für den Modul n gehört", der „Gaussien von a für den Modul n" genannt wird (pag. 439), so ist damit keine erhebliche Abkürzung erreicht, und ich würde es für besser halten, den alten Ausdruck, der das Gedächtniss weniger belastet, beizubehalten, zumal der in Rede stehende Begriff wohl nicht wichtig genug ist, den Namen des Princeps Mathematicorum zu tragen.

Frankfurt a. M., den 31. December 1891.

G. Wertheim.

Verzeichniss der Programmbeilagen der schweizerischen Mittelschulen. Mit einem Anhang, umfassend die Programmbeilagen der Académie de Neufchâtel und der Eidgenössischen Polytechnischen Schule in Zürich. Zusammengestellt von G. Büeler. Frauenfeld 1890. J. Huber's Verlag. 68 S.

Das Verzeichniss erstreckt sich über die Jahrgänge 1855 bis 1889 und ist in doppelter Anordnung vorhanden. Zuerst sind die Beilagen nach der alphabetischen Reihenfolge der Schulanstalten, von welchen sie ausgingen, angegeben und bei jeder einzelnen Anstalt chronologisch geordnet. Ein zweites Mal findet man sie nach einzelnen Fächern geordnet, unter jeder Fachüberschrift alphabetisch nach den Namen der Verfasser aufeinanderfolgend. Endlich ist drittens noch ein allgemeines Namenregister vorhanden. Es ist keine Frage, dass ein solches Verzeichniss sich in verschiedener Hinsicht als zweckdienlich erweisen kann; insbesondere gewährt es einen gewissen Einblick in die da und dort vorherrschende wissenschaftliche Richtung der Verfasser der Programmbeilagen, aus welcher man mitunter zu Rückschlüssen auf die Anstalten, an welchen sie thätig waren, geführt wird. Von den 48 mathematischen Programmbeilagen entstammen 9 aus Basel, 6 aus Frauenfeld, je 5 aus Bern, Schaffhausen, Winterthur.

Cantor.

The nuptial number of Plato: its solution and significance by James Adam, M. A., fellow and tutor of Emmanuel College, Cambridge. London 1891. C. J. Clay and Sons, Cambridge University press warehouse. 79 p.

Die geheimnissvollen Zahlen in Plato's VIII. Buche vom Staate, so sagten wir ungefähr in unseren Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, 191, hat eine ganze Literatur hervorgerufen, welche unserem Gefühle nach noch nicht vermochte, die Schwierigkeiten der Stelle endgiltig zu lösen. Versuche, welche, seit wir jene Zeilen niederschrieben, von Demme, Dupuis, Gow, Hultsch, Tannery veröffentlicht wurden,

konnten unser abweisendes Urtheil nur bestärken. Jeder neue Erklärer verstand die Stelle, aber jeder verstand sie anders, und fand bei den Mitarbeitern am Erklärungswerke keine Beistimmung. Heute liegt abermals ein Versuch vor, und wir gestehen gern, dass er uns mehr anmuthet, als irgend etwas, was wir vordem lasen. Es kommt nur auf eine Schwierigkeit hinaus: kann *ἑξήκοντα τρὶς αὐξηθέν*, also 60 dreimal multiplicirt 60^4 bedeuten? H. Adam behauptet es, darauf gestützt, dass drei Multiplicationen zur Bildung erforderlich seien, von welchen $60 \,.\, 60 = 60^2$ die erste, mithin 60^3 die zweite, 60^4 die dritte darstelle. Wir sind des Griechischen nicht kundig genug, um die sprachliche Möglichkeit dieser Auffassung zu prüfen, die uns sachlich sehr zusagt. Dann ist des Räthsels Lösung in zwei Identitäten enthalten, welche Plato bekannt gewesen sein müssen:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

$$[(3 + 4 + 5)\, 5]^4 = 3600^2 = 4800 \,.\, 2700$$

Nach jener kubischen Identität haben wir leider vergebens Diophant durchmustert. Hätten wir sie, was keineswegs unmöglich war, dort wiedergefunden, so wäre diese Begegnung nicht ohne Wichtigkeit. Nach der Adam'schen Auffassung ist die Wortverbindung *ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν* seiner Zeit von uns unrichtig aufgefasst worden. Der rationale beziehungsweise irrationale Diameter von 5 ist 7 und $\sqrt{50}$; deren Quadrate (*τὸ ἀπὸ διαμέτρων*) sind 49 und 50; diese um 1, beziehungsweise um 2 vermindert sind 48, für welche Zahl daher überflüssiger Weise zwei Entstehungsarten angegeben sind.

Cantor.

De Euclidis elementorum libris qui feruntur XIV et XV. Von Gustav Kluge. Leipzig 1891. Doctordissertation. 47 S.

Dass von den beiden Büchern über regelmässige Vielflächner, welche als XIV. und XV. Buch den Euklidischen Elementen angefügt zu sein pflegen, nur das erste von Hypsikles von Alexandria herrührt, also zwischen 200 und 100 v. Chr. Geb. entstanden ist, hat Friedlein 1873 entdeckt, und an der Wahrheit dieser Behauptung zweifelt Niemand mehr. Fraglicher ist es, wann das andere Buch geschrieben wurde, und wen es zum Verfasser hat. Bald hielt man für Letzteren Damascius von Damaskus am Anfang des VI. Jahrhunderts, bald einen Schüler des Isidorus von Milet am Schlusse des gleichen Jahrhunderts. H. Kluge geht um einen grossen Schritt weiter als seine Vorgänger. Man hatte längst die fünf ersten Sätze des Buches vom sechsten und vom umfangreichen siebenten Satze unterschieden. (Vergl. des Referenten Vorles. Gesch. Math. I, 310.) H. Kluge sucht aus den sprachlichen Unterschieden, sowie aus der bald grösseren, bald geringeren Flüchtigkeit der Darstellung nachzuweisen, dass hier Bruchstücke von drei verschiedenen Verfassern vorliegen, die er die Ver-

fasser von XV A, B, C nennt. Der Verfasser von XV C ist der Schüler des Isidor, wahrscheinlich des Isidor von Milet und den beiden Anderen weit überlegen. Zur genauen Prüfung der von H. Kluge ausgesprochenen Meinung gebricht es dem Referenten im Augenblicke an Zeit, doch scheinen ihm die vorgebrachten Gründe ziemlich schwerwiegend. CANTOR.

Grundzüge des jüdischen Kalenders und leichtfassliche Anleitung zu seiner Berechnung bearbeitet von DR. MAX SIMON, Seminarlehrer in Berlin. Berlin 1891. Verlag des Bibliographischen Bureaus, Alexanderstrasse 2. 39 S.

Das jüdische Jahr ist ein Mondjahr, dessen zwölf einzelne Monate jeweil von einem Neumonde bis zum nächsten sich erstrecken, und welches bei der auf wenig mehr als 29½ Tage sich bemessenden Länge dieser Monate eine Dauer von 356 Tagen besitzen würde, wenn nicht der Wunsch, mit der Jahresdauer des Sonnenjahres in Einklang zu stehen, Einschaltungen eines dreizehnten Monates sieben Mal innerhalb neunzehn Sonnenjahre nöthig machte. Ursprünglich war die Regelung den im Synhedrion vereinigten Gelehrten überlassen, später wurde durch Hillel eine bestimmte Kalenderlehre geschaffen. Wir sind nicht im Stande zu entscheiden, ob dieser Hillel, wie H. Simon annimmt, der zweite seines Namens in der Mitte des IV. Jahrhunderts, ob er, wie uns von anderer Seite versichert wird, der ältere Hiller am Anfang der jetzigen bürgerlichen Zeitrechnung war. Der jüdische Kalender ist wesentlich Festkalender, und steht deshalb unter dem Einflusse religiöser Vorschriften, welche nicht gestatten, dass gewisse Feiertage auf gewisse Tage der Woche fallen, und welche dieses unzulässige Zusammentreffen bald durch Einschiebung, bald durch Weglassung eines einzelnen Tages vermeiden, so dass es nicht weniger als sechs verschiedene Jahre giebt: regelmässige, überzählige, mangelhafte, und zwar alle diese Abarten im Jahre von zwölf, wie in dem von dreizehn Monaten. Eine mathematische Formel ähnlicher Art, wie Gauss und Andere sie für die christliche Osterrechnung geschaffen haben, deren Schwierigkeit ebenfalls in der Vereinigung von Mond- und Sonnenzeit besteht, scheint den jüdischen Kalenderkundigen nicht bekannt zu sein. Wenigstens geht die vom Verfasser gelehrte Anleitung nicht über eine gewisse Empirie hinaus, welche jedesmal auf's Neue Alles das beachtet, was beachtet werden soll.

CANTOR.

Dürer als Mathematiker von Professor DR. H. STAIGMÜLLER. Programm des Königlichen Realgymnasiums in Stuttgart am Schlusse des Schuljahres 1890|91. (Programm Nr. 590.) 57 S. 4⁰. Stuttgart 1891.

Herr Staigmüller ist nicht der erste Schriftsteller, welcher den mathematischen Leistungen Albrecht Dürer's seine Aufmerksamkeit zugewandt hat.

In dem II. Bande unserer Vorlesungen über Geschichte der Mathematik S. 421, Note 3, konnten wir als erwähnenswerthe Vorgänger Kästner, Chasles, Gerhardt, S. Günther anführen, von welchen der Letztgenannte 1886 eine Ansbacher Programmabhandlung unter dem Titel „Die geometrischen Näherungsconstructionen Albrecht Dürer's" veröffentlichte und 1887 in seiner „Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525" abermals darauf zurückkommen musste. H. Staigmüller hat diese Vorarbeiten nebst anderen weniger erheblichen durchaus studirt. Er hat aber insbesondere Dürer's eigene Schriften der sorgsamsten Durcharbeitung unterzogen und den Beweis geliefert, dass auch nach so vielen und tüchtigen Vorgängern noch Manches zu finden war. Wir sind weit entfernt davon, diesen einen Vorwurf daraus zu machen. Wer als Historiker ein Werk liest, muss ein nach vorwärts und nach rückwärts gerichtetes Gedächtniss besitzen, und wie leicht bei so gespalteter Aufmerksamkeit dem Einen entgehen kann, was dem Anderen auffällt, ist leicht begreiflich. Aber was Jenen kein Vorwurf ist, hört dadurch nicht auf, diesem zum Lobe zu gereichen, und wir sind verpflichtet, H. Staigmüller unsere Anerkennung für seine schöne geschichtliche Leistung in vollem Masse auszusprechen. Sie reiht sich seinen in dieser Zeitschrift veröffentlichten Untersuchungen über Luca Pacinols würdig an. Von Einzelheiten, welche H. Staigmüller zuerst bemerklich gemacht hat, nennen wir (S. 16) Dürer's Irrthum, als habe die Elipse nur die grosse Achse als Symmetrieachse, während sie, an dem Kegel selbst betrachtet, ein spitzeres und ein stumpferes Ende besitze, dieses der Grundebene des Kegels näher gelegen als jenes. Wir erwähnen ferner (S. 18—20) die Ableitung und Erörterung der Gleichung 4. Grades derjenigen Curve, welche Dürer Muschellinie nannte. Wir machen auf die Besprechung (S. 50) von Dürer's Quellen aufmerksam, wo sein persönliches Verhältniss zu dem Wiener Baumeister Johannes Tschertte berücksichtigt ist, dessen Beziehungen zu Grammateus hervorgehoben zu werden verdient hätten. Cantor.

Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. Contributo alla Storia critica dell' Algebra di Gino Loria. (Estratto dalla Rivista di Matematica. Anno 1891, pag. 185—248.) Torino 1891. 64 pag.

Als eine der unangenehmsten Schwierigkeiten bei geschichtlichen Untersuchungen — darin dürfte Jeder einstimmen, der sich einmal mit solchen beschäftigt hat — erscheint die Wahl eines Anfangpunktes. Mag man ihn durch einen Gewaltact, der jedem Forscher frei steht, da oder dorthin verlegen, es wird kaum möglich sein, im Laufe der Untersuchung nicht auch einmal jenseits des Anfangs zurückgreifen zu müssen. Eine Ausnahme von dieser Regel findet kaum dann statt, wenn die Forschung einem einzelnen Lehrsatze gilt.

Wohl ist er irgendwann zum ersten Male ausgesprochen worden, aber meistens waren Ahnungen desselben früher vorhanden, welche zu vernachlässigen man nicht das Recht hat. Herr Loria hat in der vorzüglichen Abhandlung, auf welche wir unsere Leser aufmerksam machen, die gleiche Erfahrung gemacht. Er hat Spuren des Satzes von der Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung jenseits D'Alembert nachgehen müssen, wenn er auch vorzugsweise über diejenigen Beweise berichtet, welche in unanfechtbarer Weise die Wahrheit des Fundamentalsatzes sichern und deren erster in der Gauss'schen Doctordissertation von 1799 enthalten ist. H. Loria hat inzwischen in Enström's Bibliotheca Mathematica 1891, pag. 99—112 einen Aufsatz „*Escame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche*" folgen lassen, der als Auszug aus und zugleich als Ergänzung zu der grösseren Abhandlung zu betrachten ist. Aus den 71 Schriften, über welche jene berichtete, sind deren 80 geworden, und in dem Abzuge, welchen wir der Liebenswürdigkeit des Verfassers verdanken, ist handschriftlich noch eine 81. Bearbeitung des Satzes nachgetragen: Murphy, A Treatise on the Theory of algebraical Equations. London, 1838 (?). Dass 81 von einander durchaus verschiedene Beweise des einen Satzes möglich seien, wird Niemand glauben wollen, und in der That ist es H. Loria gelungen, dieselben in einige wenige Gruppen zu sondern. Gerade diese Gruppenbildung erscheint uns als wesentlichster Vorzug der Abhandlung; dem Leser erleichtert sie ungemein die Uebersicht, dem Verfasser gestattete sie, seine kritischen Bemerkungen im Zusammenhange zu mehreren Beweisführungen gleichzeitig auszusprechen. Schon um dieser kritischen Bemerkungen willen wird die Abhandlung auf allgemeine Berücksichtigung rechnen dürfen. CANTOR.

Zur Abbildung des Erdellipsoides. Von E. HAMMER. Ergänzung zu des Verfassers Schrift: „Ueber die geographisch wichtigsten Kartenprojectionen." Stuttgart, Verlag von K. Wittwer. 1891. 40 S.

Die Schriften des Verfassers, worin er sich mit den durch Tissot in die Kartenprojectionslehre hineingetragenen neuen Principien beschäftigt und dieselben nach verschiedenen Richtungen hin weiter ausbildet, sind bekannt; es wird darin durchweg von der für die Praxis ja in der Mehrzahl der Fälle ausreichenden Annahme ausgegangen, dass die Oberfläche der Erde sphärisch sei. In der vorliegenden Abhandlung wird nun die Untersuchung um einen Schritt weiter geführt, und es wird gezeigt, dass und wie der Abplattung der Erde Rechnung getragen werden kann. Das haben natürlich auch schon andere Kartographen gethan und thun müssen, aber die Art, wie es hier geschieht, erscheint uns als eine durchaus originelle, obgleich der Verfasser selbst betont, dass eigentlich nur der eine der beiden Acte, aus denen sich seine Lösung der Aufgabe zusammensetzt, von ihm selber her-

rührt, während er sich bezüglich des anderen auf die Schultern des alten wackeren Mollweide stellt, dessen Arbeiten er einer unverschuldeten Vergessenheit entrissen hat. Dass blos die winkel- und flächentreue Abbildungen berücksichtigt werden, hat seinen Grund darin, dass den bekannten Anschauungen der neueren Schule auch bei der wirklichen Kartenzeichnung wesentlich blos Methoden, die zu der einen oder anderen dieser beiden Classen gehören, Berücksichtigung finden sollen.

Wie man von der Kugel zur Ebene überzugehen hat, das ist bekannt, dafür sind die Formeln längst aufgestellt, so dass es sich also eigentlich nur darum handelt, das Umdrehungsellipsoid auf einer Kugel abzubilden. Die Kugel, die hier gemeint ist, wird aber im Allgemeinen keine willkürliche, sondern eine durch die Umstände geforderte Lage haben, indem dem Punkte, in welcher die Aufnahmekugel das Sphäroid berührt, eine bestimmte Mittelbreite zukommt. Um nun den Process möglichst zu vereinfachen, schiebt der Verfasser, und dies ist eben die neue Idee, von welcher wir vorhin sprachen, eine Hilfs- oder Normalkugel ein, welcher zur Erde concentrisch ist und deren Aequator mit demjenigen der Erde übereinstimmt. Den von Mollweide aufgestellten Vorschriften entsprechend, überträgt man den abzubildenden Bezirk alsdann zunächst von der sphäroidischen Oberfläche auf die eingeschaltete Kugel, auf welcher die Längen völlig die des Originales sind, während die zur Ellipsoidbreite φ gehörige Kugelbreite ψ, wenn e die Excentricität der Meridianellipse bedeutet, mittelst der eben das Wesen der Winkeltreue ausdrückenden Proportion

$$\frac{(1-e^2)\,d\varphi}{(1-e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} : \frac{\cos\varphi\, d\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} = d\psi : \cos\varphi\, d\lambda$$

ermittelt wird. Die Integration ist leicht und ergiebt

$$tg\left(45^0-\frac{\psi}{2}\right) = tg\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Hieraus findet Mollweide die Reihenentwickelung

$$\psi = \varphi - \left(\frac{1}{2}e^2+\frac{5}{24}e^4\right)\sin 2\varphi + \frac{5}{48}e^4 \sin 4\varphi + \ldots$$

Um diese Reihe zu finden, war Gebrauch gemacht von dem Gleichungspaare

$$tg\,\gamma = m\,tg\,\delta;\;\; \gamma-\delta = \frac{m-1}{m+1}\sin 2\gamma + \frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 \sin 4\gamma + \frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3 \sin 6\gamma + \ldots$$

Es wäre vielleicht am Platze gewesen, gelegentlich einen Beweis für diese immerhin weniger bekannte Formel zu geben, umsomehr, da die in Brünows Lehrbuch der sphärischen Astronomie (Berlin 1862, S. 15 ff.) zu findende Ableitung an Uebersichtlichkeit Manches zu wünschen übrig lässt.

Jedenfalls macht von Hammer von seinen vorläufigen Ergebnissen eine Anwendung, welche des allgemeinen Interesses sicher sein kann, weil sie auf eine anscheinend unerwartete Thatsache führt. Wenn man nämlich

die sogenannte geocentrische Breite φ' eines Sphäroidpunktes durch die geographische oder verbesserte Breite φ desselben Punktes ausdrückt, so wird

$$\varphi' = \varphi - \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{6}{24}e^4\right) sin 2\varphi + \frac{6}{48}e^4 sin 4\varphi + \ldots$$

Zieht man mithin keine höheren Potenzen von e, als die vierte in Betracht, so wird

$$\varphi' - \psi = \frac{1}{24}e^4 sin 2\varphi - \frac{1}{48}e^4 sin 4\varphi,$$

d. h. eine unter allen Umständen äusserst kleine Grösse. Man sieht also, dass für wenig abgeplattete Rotationsellipsoide die winkeltreue Abbildung auf der Normalkugel ein Bild liefert, fast genau übereinstimmend mit jenem, welches durch centrale Uebertragung auf diese Kugel zu Stande kommen würde.

Nunmehr kommt der Uebergang von der Normalkugel auf die eigentliche Bildkugel in Frage. Jetzt soll die Beziehung „Kugellänge = α mal Ellipsoidlänge" obwalten, wobei jedoch α nicht etwa constant ist, sondern, wie die mittleren Krümmungshalbmesser, von φ_0 bis φ_{90} stetig wächst. Zu ganz anderen, nämlich rein geodätischen Zwecken, hat dieses Problem bereits Gauss gelöst („Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie"), und an dessen Behandlung lehnt sich natürlich auch die vorliegende an. Der Halbmesser der Bildkugel wird gleich dem mittleren Krümmungshalbmesser der Ellipsoidfläche; die Längenreductionsconstante wird, wenn φ_0 den uns bekannten Werth beibehält, gleich $\sqrt{1 - \frac{e^2}{1-e^2} cos^4 \varphi_0}$; zwischen der gegebenen Mittelbreite φ_0 und der ihr entsprechenden Breite u_0 auf der neuen Kugel besteht die Relation $sin\, u_0 = \frac{1}{\alpha} sin\, \varphi_0$.

Dem Sinne nach in völlig analoger Weise wird vom Verfasser auch die flächentreue Projection einer sphäroidischen Figur auf einer Kugel, deren Bestimmung nach strengen Regeln erfolgt, durchgeführt, indem eine Normalkugel als Zwischenglied benützt wird. Der Halbmesser letzterer ist hier natürlich kein willkürlicher, vielmehr gilt als selbstverständliche Bedingung, dass die Gesammtoberfläche von Kugel und Ellipsoid einander gleich sein müssen. Auch diesmal werden, wenngleich schon diese letztere Bedingung auf keine ganz einfache Gleichung führt, die Schlussausdrücke nicht besonders verwickelt. Ueberraschend mag es sein, dass, wie wirkliche Ausrechnung zeigt, die Gauss'sche Darstellung einer Ellipsoidzone gleichzeitig fast flächen- und winkeltreu ausfällt und sonach auch als annähernd längentreu gelten kann. Dass es sich hier nur um eine Annäherung, aber von merkwürdiger Schärfe, handeln kann, leuchtet ein, insofern das Ellipsoid nicht zu den auf einer Kugel abwickelbaren Flächen gehört.

Ein Hauptwerth der Hammer'schen Schrift liegt in den mühsam berechneten Tabellen. Bei denselben wurden neben den Bessel'schen Erd-

dimensionen auch diejenigen von Clarke berücksichtigt, welche insbesondere in England als vorzüglich geeignet dazu erachtet werden, „die Gestalt der Erde im Ganzen treu darzustellen“. In einem Vorberichte erörtert der Verfasser sehr eingehend die Methoden zur Ermittelung der Erdabplattung sowie der jeweils für letztere gefundenen Zahlen. Als neuesten Beitrag zu diesen noch immer weit von ihrem Abschlusse entfernten Arbeiten möchten wir derjenigen des Amerikaners Harkness Erwähnung thun, durch welche die Abplattung noch mehr verkleinert wird, als man gemeiniglich annimmt; sie soll danach nämlich nur $\frac{1}{300,2}$ betragen.

Sehr dankenswerth ist die allenthalben hervortretende Rücksichtnahme auf das geschichtliche Element. So wird u. A. bemerkt, dass die Forderung, eine Kugel anzugeben, welche sich einem Ellipsoide an gegebener Stelle am meisten anschmiegt, schon vor hundert Jahren die Forscher lebhaft beschäftigte und v. Lindenau, v. Zach und Prony zu Studien hierüber anregte. Der Letztgenannte kam der Wahrheit am nächsten, indem er, wenn ϱ_1 und ϱ_2 den grössten und kleinsten Krümmungsradius des betreffenden Punktes bedeuten, den Halbmesser der gesuchten Kugel gleich $\frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)$ setzte. Solange beide Summanden nur wenig von einander verschieden sind, ist bekanntlich der Unterschied von arithmetischem und geometrischem Mittel auch kein beträchtlicher.

München.

Dr. S. Günther.

Vorschule zur Geometrie von F. Roese, Oberlehrer in Wismar. Wismar, Eberhardt'sche Hof- und Raths-Buchdruckerei. 1890. 16 S. 2 Tafeln.

Wenngleich vorliegendes Büchlein der Vorrede entbehrt, so liegt die Tendenz desselben zu Tage. Ein propädeutischer Unterricht in der Geometrie, der von der Anschauung ausgeht, ist nothwendig. Durch ihn sollen die abstracten Begriffe des wissenschaftlichen Systems dem Schüler näher gebracht werden, durch ihn soll er auf die Wahrnehmung des gestaltlichen Zusammenhanges der Eigenschaften geometrischer Gebilde hingeführt werden. Das wichtigste Mittel hierzu ist das Zeichnen von geometrischen Figuren und das Beschreiben ihrer Eigenschaften. Solche interessante und schöne Figuren, wie sie der Verfasser auf 2 Tafeln beigefügt hat, und die zugleich decorative Verwendung finden können, halten wir für obigen Zweck ganz geeignet, da sie im Stande sind, Interesse für die abstracte Wissenschaft zu wecken. Leider nimmt Verfasser im Verlaufe des Textes gar keinen Bezug auf diese Figuren. — Inhalt und Umfang des Werkchens sind durchaus entsprechend. Die Beweise für die Lehrsätze und die Richtigkeit der Constructionen sind mit wenigen Ausnahmen fortgelassen. Die Betrachtungen über das n-Eck mitsammt dem höchst mangelhaften Beweise über die Anzahl Diagonalen eines solchen, und den beiden sich wider-

sprechenden Näherungsconstructionen, die doch kein Zeichner anwendet, wären ebenfalls besser fortgeblieben, da das n-Eck für den Quintaner bezw. Quartaner ein viel zu abstracter Begriff ist. Bei der Construction des regulären Zehnecks, sowie an vielen anderen Stellen dürfte eine Figur nicht fehlen. Desgleichen vermissen wir Erklärungen über die Messung des Winkels, Gradeintheilung und den Gebrauch des Transporteurs, dann die vier Grundaufgaben der Dreiecksconstruction. Hingegen die detaillirte Aufzählung der sämmtlichen 28 möglichen Winkelpaare bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden halten wir für überflüssig. Mehrfach wird von Endpunkten der Schenkel eines Winkels gesprochen, so dass der Schüler auf den Irrthum verfallen kann, dass es bei der Grösse eines Winkels auf die Länge der Schenkel ankomme. Nachfolgend geben wir noch einige Definitionen und sprachliche Wendungen, von denen der geneigte Leser selbst urtheilen möge, wie glücklich sie gewählt sind: „Wenn eine Gerade sich so fortbewegt, dass jeder Punkt derselben eine geradlinige Bahn zurücklegt, so heisst ihr Weg eine Ebene“. „Die Kreislinie entsteht durch die Fortbewegung eines Punktes, welcher seine Entfernung von einem festliegenden Punkte nicht verändert“. „Ein doppelter Halbmesser wird Durchmesser oder Diameter genannt.“ „Der Unterschied in den Richtungen zweier Ungleichlaufenden heisst Winkel.“ „Man zeichne unterbrochene Geraden mit 1, 2, 3 und mehr Punkten in den Unterbrechungsstellen; man construire (schlage) von einem Punkte aus mit einer Zirkelöffnung einen Bogen etc. Die Synonyma „Linie, Gerade, Strahl, Strich, Strecke“, ohne Unterschied ganz nach Willkür zu gebrauchen, ist ebenfalls eine Eigenthümlichkeit des Verfassers.

F. Schütte.

Lehrbuch der ebenen Geometrie nach neuen Grundsätzen bearbeitet von Karl Koch, Professor am Lyceum in Cannstatt. Ravensburg. Verlag der Dorn'schen Buchhandlung (Otto Maier). Erster Theil 104 Seiten mit 80 Figuren. 1889. Preis M. 1.20. Zweiter Theil 120 Seiten mit 47 Figuren. 1890. Preis M. 1.20.

„Das vorliegende Lehrbuch ist nach neuen Grundsätzen bearbeitet, indem unter Benutzung des Princips der Symmetrie die Lehre vom Kreise in den Vordergrund gerückt wurde.“ — Es lässt sich nicht leugnen, dass eine theilweise Verschmelzung der Lehren der neueren Geometrie mit der alten Euklidischen Schulgeometrie manche Vortheile bietet durch die Leichtigkeit und Eleganz, mit welcher sich Sätze aussprechen und beweisen lassen. So ist in diesem Buche besonders das Princip der Symmetrie mit Erfolg angewandt worden. Die Gegenüberstellung der dualen Sätze, ohne dass das Princip der Dualität herangezogen oder bewiesen wird, ist in jeder Hinsicht zu billigen. Auch die Hinzufügung der Lehre von den perspectivischen Gebilden am Ende des Buches dürfte manchem Leser willkommen sein. Wenn so dieses und der überaus reiche Inhalt an Lehrsätzen und

Aufgaben leicht befriedigen kann, so befriedigt das Formale weniger. Von einem systematischen Aufbau des Ganzen ist keine Rede, wie man sich bei Uebersicht der Inhaltsangabe leicht überzeugen kann. Die Congruenzsätze für das Dreieck erscheinen erst auf Seite 43, das Parallelen-Axiom erst auf Seite 53, der Satz über die Winkelsumme des Dreiecks Seite 52. Dagegen wird gleich zu Anfange dem Schüler die Stetigkeit und Congruenz des Raumes vorgetragen und die Vorstellung, den ganzen Raum in sich zu verschieben und ihn um zwei feste Punkte zu drehen, sowie das Verständniss der Congruenz unendlicher Gebilde ihm zugemuthet. Die Definition der Geraden, noch weniger die des Winkels als „abgegrenztes Stück einer Ebene“ werden den Beifall der Leser finden. Auf Seite 4 giebt Verfasser eine neue Definition von Linie und Fläche (wobei auch ein bisher noch nicht entdeckter Unterschied zwischen Fläche und Oberfläche zu Tage kommt), um derselben sofort auf Seite 5 und 6 untreu zu werden. Dass er dem Seite 18 ausgesprochenen Vorhaben, im Folgenden nur solche Vielecke zu behandeln, „deren Seiten sich nicht schneiden“, untreu wird, wollen wir ihm nicht verargen, wohl aber, dass er den Winkelhalbirer „Mediane“ nennt, die Mittellinie „Transversale“, während er Seite 74, II. erklärt: „Mit Transversale pflegt man j e d e Gerade zu bezeichnen, die durch eine Ecke des Dreiecks gezogen ist.“ Nun sieht er sich veranlasst, die früheren Transversalen in „Schwerlinien“ umzutaufen. Auf Seite 58, II. wird der Schüler darauf aufmerksam gemacht, dass die Dimension der beiden Seiten einer Gleichung dieselbe sein muss. Seite 59 sündigt der Verfasser dagegen, indem er das Product zweier Strecken mit c bezeichnet und an einer anderen Stelle wird die Längeneinheit mit le bezeichnet, als wäre sie ein Product. Auf derselben Seite 59, sowie noch auf mancher andern, finden wir auch das Wort „Sehne“ in einem Sinne gebraucht, der gar nicht mit der Seite 21, I. gegebenen Erklärung übereinstimmt. Die Fassung mancher Sätze und Aufgaben lässt in Bezug auf Klarheit und Präcision des Ausdruckes viel zu wünschen übrig. Eigenthümlich ist die Scheu des Verfassers vor dem bestimmten Artikel und dem Subjecte Man und Ich. So heisst es z. B.: „Zweiter Schnittpunkt ist unnöthig“, „Um M beschreibe K mit r statt: D e r zweite Schnittp... Um M beschreibe i c h d e n Kreis...“ Nebenbei mag noch bemerkt werden, dass dieser Kreis gleich darauf mit $\odot M$ bezeichnet wird, obschon in der Figur 3 Kreise um M vorkommen, später mit $\odot Mr$! Varietas delectat! Der Genitiv scheint auch nicht mehr beliebt zu sein; Seite 23 steht: „Der Schnittpunkt v o n z w e i Senkrechten heisst Fusspunkt“. Seite 86, II. Die drei Potenzlinien v o n drei Kreisen etc. — Wir könnten noch eine grosse Menge sachlicher und sprachlicher Incorrectheiten, Druckfehler etc. anführen; die wenigen, die wir angeführt haben, mögen zeigen, wie sehr das Buch noch den Stempel der ersten Auflage trägt. Noch wollen wir hinzufügen, dass die vom Verfasser erfundenen Abkürzungen, wodurch die Aufgaben in Rebusse

verwandelt werden, auch abgesehen davon, dass sie nicht consequent sind, wohl kaum Beifall finden werden. Ausserdem klingen manche Abkürzungen derartig komisch, dass sich unsere norddeutschen Schüler dieselben als Object derber Schulwitze nicht entgehen lassen würden. Vielleicht sind die süddeutschen harmloser.

F. Schütte.

Trigonometrie. 78 Seiten. } **Stereometrie.** 115 „ } Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. (Zwei separate Bändchen) von Wilh. Winter, Professor für Mathematik und Physik am kgl. alten Gymnasium in Regensburg. München, Theodor Ackermann, kgl. Hofbuchhändler. 1890.

Das erste der angeführten Lehrbücher behandelt die wichtigsten Lehren der Goniometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie kurz, klar, einfach und übersichtlich. Ferner enthält dasselbe eine reiche Zahl von Aufgaben, an welchen wir Folgendes anerkennen wollen: 1. sie sind nicht zu schwer und nicht zu verwickelt, sondern einfach und können vom Schüler ohne Anstrengung verstanden und selbständig gelöst werden; 2. die Aufgaben sind interessant, indem sie vielfach einen praktischen Hintergrund haben — Triangulations- und astronomische Aufgaben; 3. sie sind nicht planlos hintenan gefügt, sondern in das System eingefügt und zwar gleich von Anfang an und beleben, üben ein und befestigen das Gelernte. An Umfang und Inhalt weicht vorliegendes Werkchen von ähnlichen kaum ab; lobend hervorheben wollen wir jedoch die Darstellung der Sinus-, Cosinus-, Tangenten- und Cotangenten-Curve. Das Papier ist gut, der Druck sauber und correct. Nur die Figuren entsprechen nicht den verwöhnten Anforderungen unserer Zeit. Ihr Mangel scheint jedoch weniger an der gewählten billigen Herstellungsweise, als an den unschönen Originalzeichnungen zu liegen.

Was über die zweckmässige Anlage, die trefflichen Aufgaben und die Figuren der „Trigonometrie“ gesagt ist, gilt ebenfalls von desselben Verfassers „Stereometrie“. Ausser dem üblichen Pensum enthält dieselbe Abschnitte über das Prismatoid und Obelisk, den schiefen Cylinder, über Cylinderdreiecke und die Guldin'sche Regel. Bei dem Capitel über die regulären Polyeder dürfte man Zeichnungen derselben oder ihre Netze wohl vermissen. Auch die Aufgaben sind ohne alle Figuren. Jedoch steht der Verfasser mit diesem Mangel in Deutschland nicht allein da; auch anderswo scheint man es leider nicht zu lieben, auch die Aufgaben mit Figuren zu versehen. Leider!

F. Schütte.

Sammlung planimetrischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen von Dr. phil. E. Schilke, Oberlehrer am Gymnasium zu Saarburg i. L. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1890. 54 Seiten. Preis kart. M. 1.

Das Büchlein enthält 890 leichte oder mässig schwere planimetrische Aufgaben ohne Andeutungen zur Lösung oder irgend welche Erklärungen

der Auflösungsmethoden und ohne Figuren. Einige Inhaltsaufgaben erscheinen in der Form von Berechnungsaufgaben. Die wichtigsten Aufgaben, etwa 60, sind durch besondern Druck hervorgehoben. Das Inhaltsverzeichniss beginnt folgendermassen:

1. Aufgaben über gerade Linien und Winkel; einfache Dreiecksaufgaben.
2. Aufgaben über das Viereck.
3. Aufgaben, in denen Summen und Differenzen von Strecken und Winkeln als gegebene Grössen vorkommen.
4. Aufgaben über Linien und Winkel beim Kreise etc.

Das nennt der Verfasser methodisch geordnet!!

Das Werkchen kann nur, aber auch nur dazu dienen, Uebungsmaterial zu liefern, und wie alle derartigen Sammlungen, so ragt auch diese durch die grosse Zahl der Aufgaben hervor. — Ausstattung, Druck und Papier sind, wie man es bei Teubner gewohnt ist, gut.

F. Schütte.

Leitfaden für den trigonometrischen und stereometrischen Unterricht an höheren Bürger- und Realschulen von Dr. Karl Schulze, Lehrer an der Biber'schen Realschule in Hamburg. Erstes Heft: Trigonometrie. 72 S. Zweites Heft: Stereometrie. 60 S. Preis kart. je M. 1, 20. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner 1890.

Der vorliegende Leitfaden will den besonderen Bedürfnissen der höheren Bürgerschulen Rechnung tragen. Ihre Schüler sollen die Elemente der Trigonometrie und Stereometrie in verhältnissmässig frühem Alter lernen. Daher geht der Verfasser sehr zweckmässig von Vorstellungen aus, die dem Schüler schon bekannt sind (Berechnung der regulären Vielecke) und berechnet zuerst die trigonometrischen Functionen von 30^0, 60^0, 45^0, 72_0 etc. Alle Formeln werden zunächst nur für spitze Winkel abgeleitet, auch das Additionstheorem. Erst die Entwickelung des Sinus- und Cosinus-Satzes giebt dem Verfasser Veranlassung, auch von den Functionen stumpfer Winkel zu sprechen. — Eine Tafel der natürlichen trigonometrischen Zahlen ist beigefügt. Der zweite Theil enthält Aufgaben, wohlgeordnet und mit entsprechenden Vorbemerkungen versehen, von denen wir insbesondere auf die über die vier Berührungskreise eines Dreiecks aufmerksam machen. Mit Hilfe dieser gelangt man oft zu höchst eleganten Lösungen, was häufig nicht genügend gewürdigt wird; auch hier scheinen uns diese Beziehungen nicht weit genug ausgenützt.

Ebenso geschickt wie die Einleitung in die Trigonometrie, ist die in die Stereometrie. Hier beginnt der Verfasser mit der Zergliederung des Würfels. Diese Zergliederung liefert die Bausteine zu dem ersten Theile, welcher von der Lage der Geraden und Ebenen etc. handelt. Der zweite Abschnitt handelt von den Körpern. (In Cavalieri's Grundsatze

Seite 19 befindet sich ein sinnstörender Fehler.) Dann folgen Aufgaben, der Anlage des zweiten Theiles entsprechend geordnet. Anerkennend hervorheben wollen wir noch das Capitel über die Kartographie und die geschichtlichen Notizen, welche auch der Trigonometrie beigefügt sind.

Die Ausstattung ist eine vorzügliche, nur würden wir empfehlen, die wichtigsten Formeln nicht durch Unterstreichen, sondern durch Fettdruck hervorzuheben. Die Ausführung der Figuren ist tadellos; schade, dass einige, z. B. Fig. 31, so nachlässig gezeichnet sind. Scharfe Rüge verdient auch der Umstand, dass überall die Projection eines Kreises nicht als Ellipse, sondern als von Kreisbögen gebildetes Zweieck dargestellt ist.

F. Schütte.

Leitfaden der Stereometrie für den Schulunterricht von Franz Lucke, Gymnasiallehrer in Zerbst. Mit 9 lithographirten Tafeln. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner 1890. Preis M. 2. 80. 204 S. 9 Tafeln.

Die Figuren zu diesem Buche sind der Billigkeit halber auf lithographirten Tafeln hinten angefügt, was für den Gebrauch nicht sehr bequem ist. Dafür wird man aber reichlich durch die saubere Ausführung der mustergiltigen und sehr anschaulichen Figuren entschädigt. Der erste Theil handelt von den ungeschlossenen stereometrischen Gebilden, Ebenen in Verbindung mit Geraden und unter sich etc., und ist verhältnissmässig kurz. Der zweite Theil handelt von den geschlossenen Gebilden und ist sehr umfangreich. Es werden nicht nur die gewöhnlichen stereometrischen Körper behandelt, sondern alle überhaupt möglichen Gebilde, deren Oberfläche oder Inhalt auf elementarem Wege ermittelt werden kann, auch solche mit windschiefen Seitenflächen: Paraprisma, Interprisma, Antiprisma und Pyramide, sowie die durch Abstutzung erhaltenen Körper, Ponton, Obelisk, Keil, gedrehter Kegelstutz, Cylinder, Wanne, Glocke, Cylinderhufe; ferner die sogenannten sphärischen Körper, Kugel, Kugelabschnitt, Kugeltonne, Kreis- und Ellipsenkant, Pyramidoid, Pyramidoidstutz, Prismoid. Die regulären Polyeder sind gebührend berücksichtigt. Der hier gegebene Beweis des Euler'schen Lehrsatzes ist äusserst elegant und verdient wegen seiner Einfachheit vor anderen den Vorzug. Er lautet: Man kann jedes Polyeder in Tetraëder zerlegen. Baut man umgekehrt das Polyeder aus Tetraëdern auf, so hat man offenbar für das erste Tetraëder $E+F=K+2$. Legt man nun an dieses das zweite, dann das dritte, vierte u. s. w. mit der deckenden Fläche an, so vermehrt sich jedesmal E um 1, F um $3-1$, dagegen K um 3; die beiden Summen bleiben also stets gleich. — In den zweiten Theil sind entsprechende Aufgaben nebst ihren Lösungen eingeflochten.

Der dritte Theil enthält Uebungsstoff und zwar vorzugsweise Constructionsaufgaben (ohne Lösung), Berechnungsaufgaben und zu beweisende Sätze. Die Auswahl ist eine sehr gute und die Aufgaben sind durchweg interessant. — Nach Angabe des Verfassers soll das Buch nicht für den

Selbstunterricht, sondern nur für die Schule dienen. Ausgezeichnet ist dasselbe durch die logische Entwickelung des Systems, die zweckmässige Aufeinanderfolge der Sätze, wodurch die Uebersichtlichkeit sehr gefördert wird; ferner durch die grosse Ausführlichkeit, die jedoch nicht selten in Breite ausartet. Wegen letzterer Eigenschaft kann das Buch, namentlich auf Gymnasien, nur mit Auswahl gebraucht werden.

F. Schütte.

Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, technischen Hochschulen, sowie zum Selbststudium dargestellt und mit zahlreichen Uebungsbeispielen versehen von Dr. F. Rudio, Professor am Polytechnikum in Zürich. Mit 12 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1891 bei B. G. Teubner. X, 156 Seiten.

Im XXXV. Bande dieser Zeitschrift, historisch-literarische Abtheilung Seite 37—38 haben wir die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene besprochen, zu deren Abfassung Herr Rudio sich mit Herrn Ganter vereinigte. Konnten wir jenem Buche ein uneingeschränktes Lob aussprechen, so gebührt mindestens die gleiche Anerkennung der heute uns vorliegenden Fortsetzung, der von H. Rudio allein verfassten Raumgeometrie. Analytische Geometrien des Raumes giebt es in beträchtlich geringerer Anzahl, als solche der Ebene, eine naturgemässe Folge des Umstandes, dass letztere an sehr vielen, erstere an sehr wenigen Anstalten gelehrt wird, kaum irgendwo sonst als an Universitäten und Polytechniken. Zöglingen dieser Anstalten pflegt man aber meistens die Raumgeometrie als Lehre von den Curven im Raume und von den Oberflächen unter Anwendung, um nicht zu sagen als Anwendung das Infinitesimalcalcüls vorzutragen, und wenn Elemente der höheren Behandlungsweise vorausgeschickt werden, so beschränken dieselben sich meistens auf das Nothdürftigste. Ein Tadel will damit so wenig ausgesprochen werden, dass Referent selbst seine vierstündige Sommervorlesung über analytische Geometrie der Ebene und des Raumes nach diesem Plane zu halten gewohnt ist. Vielleicht wird darin eine Aenderung eintreten, seit Herr Rudio auf noch nicht 10 Druckbogen, von welchen überdies ein gar nicht unbeträchtlicher Raum durch Aufgaben in Anspruch genommen ist, gezeigt hat, dass man mit sehr elementaren Betrachtungen recht weit kommen kann, ohne an Zeit zuzusetzen, was an Mitteln erspart wurde. Ein wesentliches Merkmal der Unterscheidung des neuen Buches von allen älteren Elementarschriften über analytische Geometrie des Raumes besteht in der Anwendung der Gauss'schen Einheitskugel, welche schon auf Seite 19 auftritt und auf Seite 22 es gestattet, sämmtliche Richtungen des Raumes durch die Punkte der Oberfläche der Einheitskugel abzubilden. Gegen Ende des Buches, Seite 133, sind dann sogar die Gauss'schen Flächencoordianten u, v eingeführt. Wie die Ein-

heitskugel zu sehr einfacher Darstellung mancher Dinge führt, mag die in § 13, Seite 27—29 behandelte Aufgabe der Bestimmung einer zu zwei gegebenen Richtungen normalen Geraden zeigen. Die Punkte, welche die gegebenen Richtungen abbilden, werden durch einen Grösstenkreis der Einheitskugel verbunden und dann die Endpunkte des auf diesem Grösstenkreise senkrechten Durchmessers gesucht. Unter den in elementaren Schriften sonst nicht regelmässig auftretenden Gegenständen erwähnen wir das Ebnenbüschel (Seite 69) und Ebnenbündel (Seite 72). Wir erwähnen auch die Kreislinie im Raume (Seite 103), die Vereinigung von Kugel und Geraden (Seite 106), ohne damit die Dinge erschöpft zu haben, welche wir als bemerkenswerthe empfehlen möchten. Dem einen Leser wird wahrscheinlich der eine, dem anderen der andere Abschnitt besser gefallen, sicherlich wird aber das ganze Buch so viele Freunde als Leser gewinnen.

Cantor.

Die Brocard'schen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Von Dr. A. Emmerich, Gymnasiallehrer zu Mülheim a. d. Ruhr. Mit 50 Figuren im Text und einer lithographischen Tafel. Berlin, 1891 bei Georg Reimer. XIV, 154 Seiten.

Im XXXV. Bande dieser Zeitschrift, historisch-literarische Abtheilung, Seite 34—35, ist ein Programm des gleichen Verfassers angezeigt, welches mit dem Brocard'schen Winkel sich beschäftigte. Das heute zur Besprechung gelangende Buch ist eine Fortsetzung und Erweiterung jener Programmabhandlung. Herr Emmerich hat nämlich nicht nur die Winkel ω, sondern alle elementargeometrische Gebilde der neuesten Dreiecksgeometrie, die Punkte, die Geraden, die Kreise, durch welche vereinte Bemühungen räumlich und national getrennter Forscher die Wissenschaft bereichert haben, im Zusammenhange betrachtet, ohne anderer Hilfsmittel sich zu bedienen, als der der Planimetrie und der ebenen Trigonometrie. Nur anhangsweise sind die auf ein rechtwinklig geradliniges Coordinatensystem bezogenen Coordinaten von 24 Punkten angegeben, eine ganz bequeme Hilfstabelle für Anwendung der analytischen Geometrie auf die in Rede stehenden Gebilde. Die Kegelschnittbeziehungen, welche gleichfalls einen keineswegs geringfügigen Bestandtheil der Dreiecksgeometrie ausmachen, hat Herr Emmerich aus seiner Zusammenstellung ausgeschlossen. Ihre Aufnahme würde, meint er, die einheitlich elementare Anordnung zerstört haben und verhindert haben, einzelne Abschnitte als zusammenhängende Beispielgruppen dem Unterrichte in Oberclassen zu Grunde zu legen. So gewiss jeder Verfasser selbst zu bestimmen hat, welche Grenzen er seinen Veröffentlichungen zu stecken wünscht, so möchten wir jener Begründung der geübten Enthaltsamkeit doch nicht beipflichten. Für den Schüler ist das Buch doch nicht geschrieben. Dass dieser es benutze, ist schon durch die mehrfachen

Beweise der meisten Sätze ausgeschlossen. Wenn aber der Lehrer das Buch benutzen soll und es gewiss mit Erfolg benutzen wird, um ohne allzugrossen, durch Nachschlagen in zahlreichen Zeitschriften und Programmen verursachten Zeitverlust sich mit den behandelten Theorien bekannt zu machen, so sehen wir nicht ein, warum für ihn nicht einige weitere Capitel beigefügt werden konnten, allerdings andere Vorkenntnisse voraussetzend, aber doch nicht solche, über welche nicht jeder Lehrer verfügt. Vielleicht holt Herr Emmerich in einem Nachtrage oder in einer Programmabhandlung nach, was gleich uns gewiss viele Leser vermissen. Dem eigentlichen Buche ist ein drei Seiten langes chronologisch geordnetes Verzeichniss sämmtlicher Quellen vorausgeschickt. Bei dessen Durchsicht fiel uns auf, dass auch nicht ein einziger italienischer Namen unter den Schriftstellern, welche zu erwähnen waren, vorkommt. Sollten wirklich die Italiener keinen Geschmack an der Dreiecksgeometrie finden, oder ist die Lücke durch die Schwierigkeit, elementar-mathematische Sammelschriften zu erhalten, zu erklären?

Cantor.

A treatise on plane trigonometry bei E. W. Hobson, M. A., fellow and assistent-tutor of Christ's College, Cambridge, and university-lecturer in mathematics. Cambridge 1891 at the University press XV, 356 pag.

Wenn eine ebene Trigonometrie sich auf mehr als 22 Druckbogen ausdehnt, so kann man erwarten, dass der Inhalt dem Titel mehr als nur entspricht, dass ausser denjenigen Dingen, welchen man gewohnt ist in ähnlich benannten Werken zu begegnen, auch noch vieles Andere behandelt sein wird. Diese Erwartung wird durch Herrn Hobson's Werk reichlich erfüllt. Es hat so Vieles in sich aufgenommen, dass man fast an der Berechtigung jenes Titels zweifeln möchte. Wer z. B. wird in einer ebenen Trigonometrie ein vollständiges, ausführliches Capitel über Reihenconvergenz, ein anderes über unendliche Producte, ein drittes über die Anfangsgründe der Lehre von den complexen Zahlen erwarten? Sie finden sich aber vor und zwar in einer Ausdehnung und zugleich einer Strenge der Entwickelung, welche sie auch für andere Zwecke eines jugendlichen Lesers ausreichend macht, als nur zum Verständniss der in einer ebenen Trigonometrie auftretenden Anwendungen dieser Lehren. Wenn wir von einem jugendlichen Leser reden, so ist dieses im Sinne des Verfassers gesprochen, der die Benutzer seines Buches als solche sich denkt, welche in ihm mit der Trigonometrie sich bekannt zu machen, zugleich aber die weitere Absicht haben, bei der Trigonometrie nicht stehen zu bleiben, sondern von ihr aus zu den höheren Theilen der Mathematik zu gelangen. Nicht gar selten sieht es übrigens so aus, als denke Herr Hobson sich jenen höheren Standpunkt schon erreicht, wenn er Sätze einflicht, wie z. B. „für solche Leser, die mit dem Taylor'schen Lehrsatze schon bekannt sind“ u. s. w.

An Beispielen ist eine sehr stattliche Auswahl vorhanden und es ist besonders anzuerkennen, dass dieselben nach zwei Richtungen zur Uebung dienen können. Die eine Gruppe von Beispielen fordert das Heimischsein in den vorgetragenen Sätzen und entwickelten Formeln, die andere die praktische Anwendung jener Formeln auf bestimmte Zahlenwerthe. Dem entsprechend ist auch von der Herstellung von trigonometrischen Tafeln in einem besonderen IX. Capitel weit ausführlicher die Rede, als man es in anderen Trigonometrien findet. Uns persönlich hat gerade dieses Capitel besonders gut gefallen. Wenn wir uns gestatten sollen, auch zwei kleine Fragen an Herrn Hobson zu stellen, so geht die eine dahin, warum er fortwährend Hypothenuse mit *th* drucken lässt, die andere, wie er dazu kommt, auf einer und derselben Seite 31 einen solchen Widerspruch dem Schüler zu bieten wie der in den Bezeichnungen $sin^{-1} x = arcsin\, x$, $cot^2 A = (cot\, A)^2$ enthaltene? Wird der leider viel verbreitete Missbrauch der Potenzirung des Functionalzeichens, wo Potenzirung der Function gemeint ist, geduldet, so kann sin^{-1} nichts Anderes bedeuten als $(sin\, x)^{-1} = \frac{1}{sin\, x}$, und ist $sin^{-1} x$ wirklich $arcsin\, x$, womit wir uns gern befreunden, so kann $cot^2 A$ nur $cot\,(cot\, A)$ bedeuten.

Cantor.

The number-system of algebra treated theoretically and historically by Henry B. Fine, Ph. D., Professor of mathematics in Princeton College. Leach, Shewell & Sanborn. Boston and New-York 1891. IX, 131 pag.

Die elementare Arithmetik nach Strenge und Folgerichtigkeit der Entwickelung der Lehren der Functionentheorie nahe zu bringen, mit welchen sie ohnedies in dem Augenblicke zusammentrifft, wo eine negative Basis auf eine Potenz mit gebrochenen Exponenten geradzahligen Nenner erhoben werden soll, ist ein Bestreben, welchem deutsche Schriftsteller seit etwa 40 Jahren sich zuwandten. Referent darf vielleicht auf seine Elementararithmetik von 1855 als einen der ersten Versuche dieser Art hinweisen. Herr Fine scheint, seinem Vorworte nach, der erste amerikanische Schriftsteller ähnlicher Richtung zu sein, und wie der allgemeine Stand mathematischen Denkens und Wissens in den letzten Jahrzehnten sich in kaum zu sagender Weise gehoben hat, so auch diese höhere Elementararithmetik, wenn man die widersprechenden Wörter in Verbindung bringen darf. Herr Fine hat kein sog. „Textbook" verfasst, noch verfassen wollen. Rechnen lernen wird Niemand aus seiner knappen Darstellung, wohl aber die verschiedenen Zahlenarten, die Nothwendigkeit ihrer Einführung zur allgemeinen Giltigkeit der Regeln für die verschiedenen Rechnungsverfahren begreifen lernen. Wie weit man in einem solchen Buche zu gehen hat, ist wesentlich Geschmackssache des Verfassers. Herr Fine hat auch das Gauss'sche

Fundamentaltheorem der Algebra und das Nothwendigste aus der Lehre von der Convergenz reeller und complexer Reihen mit eingeschlossen, ohne natürlich eine vollständige Reihenlehre zu geben. So der Inhalt der ersten 80 Seiten. Die noch folgenden 50 Seiten enthalten einen Abriss der Geschichte der Arithmetik und Algebra, der ganz gut gemacht ist. Wesentliche Irrthümer sind uns darin nicht aufgestossen. Eine Vollständigkeit konnte selbstverständlich auch hier nicht angestrebt, geschweige denn erreicht werden.

Cantor.

Die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwicklungsgeschichte der Akustik, Theil I, von Dr. Ernst Robel, Oberlehrer. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Luisenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1891. [1891. Programm Nr. 98] Berlin 1891. R. Gärtner's Verlag (Hermann Heyfelder). 29 Seiten.

Im Sommer 1681 zeigte Robert Hooke, der geniale Erfinder so vieler Versuche, die Erzeugung von Tönen durch schnelle Umdrehung gezähnter Messingräder. Der Italiener Stancari machte 1706 ähnliche Versuche mit Vorrichtungen von grösseren Abmessungen. Er bediente sich eines mit 200 Nägeln besetzten hölzernen Rades von 3 Fuss Durchmesser. Der dritte Physiker, welcher ähnliche Versuche anstellte, war wieder ein Engländer John Robison, der in dem letzten Jahrzehnt des XVIII. Jahrhunderts eine Art von Theorie gab, in welcher als Hauptsatz hervortrat, dass ein Ton nicht nur durch die regelmässigen Schwingungen elastischer Körper, sondern auch durch getrennte Schläge hervorgebracht werden kann, sofern dieselben nur in regelmässiger Wiederkehr und mit genügender Geschwindigkeit erfolgen. Die Leistungen der genannten drei Physiker bilden die Vorarbeiten zur eigentlichen Erfindung der Sirenen, mit welcher Cagniard de la Tour 1819 in die Oeffentlichkeit trat, und welche er bis 1840 fortwährend erweiterte und vervollkommnete, so sein Erfinderrecht wahrend, auch nachdem es ihm zu Gunsten Robison's streitig gemacht worden war. Felix Savart hat gleichzeitig mit den späteren Arbeiten von Cagniard de la Tour die Zahnradsirene, welche gegen die Lochsirene in den Hintergrund getreten war, vervollkommnet und mit ihrer Hilfe die Frage nach den Grenzen der Hörbarkeit gebildeter Töne zu beantworten gesucht. Das dürfte als Inhaltsverzeichniss der auf Studium der Originalarbeiten sich gründenden Abhandlung von Hrn. Robel zu betrachten sein. Ein II. Theil, vermuthlich der nächstjährigen Programmbeilage vorbehalten, verspricht die späteren Untersuchungen von Ohm, von Helmholtz, von König in ähnlicher Weise zusammenzufassen.

Cantor.

Topologische Studien über die aus ringförmig geschlossenen Bändern durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde. Von Dr. FRIEDRICH DINGELDEY, Privatdocent an der technischen Hochschule zu Darmstadt. Mit 37 Figuren im Text und 5 lithographischen Tafeln. Leipzig, bei B. G. Teubner 1890. 8°. VII, 54.

Die vorliegende Schrift gehört der Richtung an, welche von O. Simony durch seine originellen Aufsätze über verschlungene und verknotete Gebilde in die Wissenschaft eingeführt wurde. Sie zerfällt in 4 Abschnitte. Der erste giebt einen dankenswerthen Ueberblick über die historische Entwickelung der geometrischen Disciplin, welche man als Topologie oder Analysis situs zu bezeichnen pflegt. Den einschlägigen Untersuchungen von Leibnitz und Listing, von Tait, von Simony und von Dyck ist je ein Paragraph gewidmet. Entsprechend der Simony'schen Geschmacksrichtung sind die für die analytische Formulirung topologischer Probleme wichtigen Hilfsmittel, wie der Sturm'sche Satz, das Gauss'sche Verschlingungsintegral, die Kronecker'schen Charakteristiken weniger stark betont, als es bei anderer Auffassungsweise der Fall sein würde. Die Untersuchungen über den Zusammenhang von Flächen — im Anschluss an Riemann — sind wohl deswegen weniger ausführlich besprochen, weil es dem Verfasser schliesslich mehr auf die topologische Curventheorie ankommt. Doch vermisst man ungern die Erwähnung des schönen Aufsatzes von Möbius über die Elementarverwandtschaft,* der auch auf die Weiterentwicklung der Disciplin anregend eingewirkt hat.**

Der 2. Abschnitt behandelt Gebilde, welche aus einem beliebig oft tordirten, geschlossenen Bande durch Führung von in sich zurücklaufenden Längsschnitten entstehen; er ist ohne Aenderung mit Zustimmung Simony's einer Abhandlung*** desselben entnommen. Es ist daher auch die Angabe der Art, wie man die Torsion eines verknoteten Bandes bestimmt (S. 20), sowie die Angabe der Aequivalenz einer „Ueberkreuzung" zweier Streifentheile mit einer Torsion von $\pm 2\pi$ (S. 22) ganz so gefasst wie bei Simony. An diesen Stellen hätte der Verfasser gut gethan, die populär gehaltenen und nicht einwurfsfreien Ausführungen Simony's durch eine exactere und wenn nicht erschöpfende, so doch die Schwierigkeiten nicht verdeckende Darstellung zu ersetzen, oder wenigstens die auf die Torsionsbestimmung bezügliche Anmerkung 5) bei Simony†

* Theorie der elementaren Verwandtschaft. Ber. der k. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Classe 1863, Bd. 15. In den ges. Werken II. Bd., S. 433.

** Vergl. W. Dyck, Beiträge zur Analysis situs. 1. Mitth. Ber. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Klasse 1885. S. 314.

*** Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe, in ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen etc. Wien 1881. 3. Aufl. Gerold u. Co.

† „Dieser Satz hat lediglich den Werth einer empirischen Regel, welche zwar speciell für die hier in Betracht kommenden Knotenformen richtige Resultate liefert, im Allgemeinen jedoch keine unbedingte Giltigkeit besitzt."

mit abzudrucken. Der Unterzeichnete hat versucht, zur Klärung der hier vorliegenden Unklarheiten durch einen Aufsatz beizutragen, auf den hiermit verwiesen sei.*

Der dritte und vierte Abschnitt bringen eigene Untersuchungen des Herrn Dingeldey. Im dritten werden geschlossene Bänder in folgender Weise behandelt: Zwei Flächenelemente des Bandes werden durch Zusammenbiegen und Drehen irgendwie zur Deckung gebracht, um eine zu ihrer Fläche senkrechte Achse ein gerades Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ gegen einander verdreht, hierauf in dieser verdrehten Lage mit einander verbunden (zusammengeleimt) und schliesslich wird an der Verbindungsstelle ein Querschnitt geführt. Herr Dingeldey zeigt, dass, abgesehen von der grösseren Mannigfaltigkeit bezüglich der in den Bändern schliesslich übrig bleibenden Torsionen, diese Operation nur eine Abänderung des im vorigen Abschnitte besprochenen Simony'schen Processes darstellt. Das Verfahren führt daher auch zu keinen neuen Knoten oder Verbindungen.

Wenn man die Rotationen nicht zu geraden, sondern zu ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ ausführt, und statt des Querschnittes oben den „Mittelschnitt“ anwendet, ergeben sich Gebilde, die unter den von Simony aus Kreisringen erhaltenen** sich befinden. Herr Dingeldey hat keine Erklärung für diese ihm auffällige Thatsache; wir wollen zur Ergänzung hier eine solche geben.

Beschreibt man Herrn Dingeldey's Operation in folgender Weise:

> Man denke sich ein geschlossenes untordirtes Band in Form zweier sich deckenden Rechtecke R, R' gebracht — vergl. Fig. 5 bei Dingeldey — und die Mittellinien dieser Rechtecke kreuzweise gezogen. Dadurch wird das ganze Band in vier andere Rechtecke r_1, r_2, r_3, r_4 getheilt, deren jedes zur Hälfte in R, zur Hälfte in R' liegt, und die alle vier in zwei sich deckenden Punkten zusammenstossen, den Mittelpunkten m, m' der ursprünglichen Rechtecke R, R'. Eine Rotation dss Streifentheiles R um m im Betrage von $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ hat eine cyklische Vertauschung der in m zusammenstossenden Rechtecksecken zur Folge. Diese Ecken sind nach der Rotation mit den von ihnen bedeckten des nicht rotirten Streifentheiles R' zusammenzuleimen und die Mittellinien sind als Schnitte zu denken,

so wird man unschwer deren topologische Identität mit einem speciellen Fall eines Simony'schen Knotenbildungsverfahrens*** einsehen, das seiner-

* Vergl. S. 106 des vorliegenden Heftes der Zeitschrift.

** Sitzb. d. Kais. Ac. d. Wiss. in Wien. Bd. 85, Abth. 2, S. 907 u. ff. oder Math. Ann. Bd. 24, S. 253 ff.

*** Wiener Sitzb. II. Abth. 1887, S. 193 u. ff.

seits mit dem auf Kreisringe angewandten topologisch äquivalent ist und kurz so beschrieben werden kann:

> Man denke sich zuerst die Seitenkanten eines regulären n-seitigen senkrecht abgeschnittenen Prisma's als Fäden, dann die Deckpolygone ein Vielfaches von $\frac{4\pi}{n}$ um die Prismenachse gegen einander verdreht, wodurch sich die Fäden in einer bestimmten Weise zu einem Zwirn Z zusammendrehen, und hierauf die nun correspondirenden Fadenenden mit einander verbunden durch Fäden, die in der neuen Lage der Polygone Prismenkanten entsprechen. In Anbetracht des Folgenden ist es zweckmässig, sich den Zwirn nie ganz zusammengedreht, sondern stets in Form einer Röhre zu denken.

Die vier Rechtecksecken um m und die vier um m' im ersten Verfahren sind den Ecken zweier quadratischen Prismenschnitte, die 4 Rechtecke r_1, r_2, r_3, r_4 den 4 Fadenkanten des Prisma's äquivalent, an Stelle der Verbindungsfäden entsprechender Ecken der verdrehten Quadrate tritt die directe Verbindung (durch den Leim).

Zunächst zwar ist das Dingeldey'sche Erzeugniss Δ noch nicht ganz congruent mit dem Simony'schen Σ; diese Congruenz würde vielmehr dann eintreten, wenn man die Verbindung der verdrehten Polygonecken bei letzterem nicht längs der Aussenseite wie oben, sondern durch den Innenraum der Zwirnröhre ausführte; aber es ist offenbar, dass ein so erhaltenes Gebilde Σ' sich durch einfache Umstülpung in ein Gebilde Σ verwandelt. Dabei ist nur noch zu beachten, dass zwei durch Umstülpung aus einander entstehende Gebilde Σ und Σ' eine entgegengesetzte Verdrehung der Deckpolygone gegen einander aufweisen.

Im 4. Abschnitt knüpft Herr Dingeldey an andere Untersuchungen von Simony* und Schuster** an. Es handelt sich um Gebilde, die aus beliebig vielen von einer Stelle ausgehenden, an einer andern Stelle wieder zusammenlaufenden, beliebig tordirten Streifen bestehen. Ist bei Besprechung derselben der Ausdruck „Fläche" kaum ganz zu umgehen, so dürfte doch die Bezeichnung „geschlossene Fläche" besser für randlose Flächen reservirt bleiben, da man bei der Simony-Dingeldey'schen Redeweise zu der Sonderbarkeit kommt, ein einrandiges Flächenstück ohne Loch als nicht geschlossen, ein Flächenstück mit Löchern dagegen als geschlossen zu bezeichnen.

Herr Dingeldey untersucht speciell, welche Torsionen in den Streifen angebracht sein müssen, damit — nach Simony'scher Terminologie — eine einfache Verbindung oder Verknotung entsteht, wenn die

* Sitzb. d. Kais. Ac. d. Wiss. in Wien Bd. 84, Abth. 2, S. 255 u. ff.; Math. Ann. Bd. 19, S. 119 u. ff.

** Sitzb. d. Kais. Ac. d. Wiss. in Wien Bd. 97, Abth. 2, S. 217 u. ff.

Mittelschnitte ausgeführt werden, und giebt eine graphische Darstellung seiner Resultate im Anschluss an Schuster's Abhandlung, die übrigens ohne Lectüre der letzteren nicht verständlich ist.

Ob und warum der Verfasser seine Aufzählung für vollständig hält, wird nicht angegeben, ebensowenig Anzahl und Ausdehnung der Experimente, aus denen inductiv auf gewisse Allgemeingiltigkeiten geschlossen wurde.

Die experimentelle Auffindung der auf Seite 46—51 niedergelegten Resultate erheischte gewiss viel Mühe, Umsicht und Geschicklichkeit und gab wohl auch manche Einblicke in das Wie und Warum. Schade, dass davon der Leser durch die Lectüre so gar nichts erlernen kann.

München, Juli 1891. HERMANN BRUNN.

Arithmetik und Algebra für höhere Schulen und Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterricht. In engster Verbindung mit der Geometrie zur Versinnlichung der Zahlbegriffe, Theorien, Operationen, Lehrsätze und Auflösung von Aufgaben systematisch bearbeitet von WERNER JOS. SCHÜLLER, Seminarlehrer in Boppard a. Rh. Leipzig 1891, bei B. G. Teubner. XIX, 452 S.

Der Verfasser hat seinem Bande ein ziemlich umfangreiches Vorwort vorausgeschickt, in welchem er sein pädagogisches Glaubensbekenntniss dahin ablegt, es müsse auch im arithmetisch-algebraischen Unterrichte ähnlich wie in den meisten anderen Fächern der Lehrer inductiv verfahren. Er solle von bestimmten Zahlenbeispielen ausgehen, solle an diesen die ihnen gemeinschaftlichen Eigenschaften, beziehungsweise Lehrsätze, bemerklich machen und dann erst eine Beweisführung anschliessen. Nur so gewinne die allgemeine Arithmetik den Vortheil, welchen die Geometrie vermöge der Anschaulichkeit ihrer Figuren von vornherein besitze, dass der Inhalt der Lehrsätze sofort klar werde und nur deren Beweis noch Schwierigkeit mache. Ein zweites Dogma für den Verfasser ist das Vorangehen der Geometrie vor der allgemeinen Arithmetik im Unterrichte, so dass die Geometrie innerhalb der Arithmetik zur Versinnlichung und Verdeutlichung benutzt werden könne. Herr Schüller stimmt in beiden Behauptungen mit zu gewiegten Schulmännern überein, als dass wir unsere, der zweiten Ansicht durchaus widersprechende Meinung ihm entgegenhalten möchten. Nur um unsere wiederholt ausgesprochene Ueberzeugung nicht zu verleugnen, bemerken wir, dass unseres Dafürhaltens die ersten Anfänge des Buchstabenrechnens gleichzeitig mit dem Zahlenrechnen vor der Geometrie gelehrt werden müssen, was Versinnlichungen an geraden Linien keineswegs ausschliesst. Herr Schüller ist in dem ganzen Verlaufe seines Buches seinem Programm treu geblieben und hat dadurch einen innerlich und äusserlich einheitlichen Lehrgang hergestellt. Zwei Kleinigkeiten müssen wir bemängeln, welche formell erscheinen mögen, aber wesentlich sind da,

wo die Form zum Wesen gehört. Klammern dürfen bei Proportionen nicht weggelassen werden. Es ist durchaus unzulässig zu drucken, wie es S. 210, 214 und häufiger geschah:

$$a \pm b : c \pm d = b : d$$

anstatt

$$(a \pm b) : (c + d) = b : d.$$

Gleichheitszeichen ferner dürfen niemals unvermittelt zwischen zwei Zahlen erscheinen, ausser um anzudeuten, dass dieselben einander gleich sind. Es ist mithin unzulässig (S. 189) zu drucken:

So ist z. B. die Quersumme von

$$79584 = 7 + 9 + 5 + 8 + 4 = 33$$

anstatt: Die Quersumme von 79584 z. B. ist

$$7 + 9 + 5 + 8 + 4 = 33.$$

Vernachlässigung dieser beiden wichtigen Regeln im Lehrbuche kann sehr schlimme Angewohnheiten und daraus entstammende Rechenfehler der Schüler zur Folge haben.

Cantor.

Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades (Diophantische Gleichungen). Sammlung von 374 Zahlen —, Buchstaben — und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen nebst den Abhandlungen des Bachez de Méziriac im französischen Originale mit beigefügter deutscher Uebersetzung. Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten bearbeitet zum Theil nach System Kleyer von W. Fr. Schüler. I. Buch. Stuttgart 1891. Verlag von Julius Maier, VIII, 176 S.

Der Verfasser erklärt sich in der Vorrede als Feind der Schablone. Er geht in dem an sich lobenswerthen Bestreben, eine solche zu vermeiden, aber doch wohl zu weit, indem er die Darstellung der Methoden, welche zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades angegeben worden sind, gleichfalls vermeidet. Sie sollen erst in einem zweiten Buche erscheinen, und dadurch wird der Inhalt des ersten Buches für elf Druckbogen etwas sehr dürftig. Wer damit sich begnügen will und kann, was ihm hier geboten wird, sich anzueignen, wird bei der grossen Anzahl von Beispielen ganz gewiss ohne sonderliche Geistesanstrengung, dagegen mit recht bedeutendem Zeitaufwand sein Ziel erreichen. Auf S. 8 finden wir unter einigen geschichtlichen Bemerkungen den Satz: „Merkwürdigerweise findet sich in dem Werke Diophant's keine einzige unbestimmte Gleichung des ersten Grades behandelt.“ Die Thatsache ist wahr, merkwürdig ist daran gar nichts, denn Diophant konnte das, was heute mit grossem Unrecht Diophantische Gleichung des ersten Grades genannt wird, nicht behandeln. Diophant dachte nur an rationale Auflösungen unbestimmter

Gleichungen, nicht an ganzzahlige. Eine unbestimmte Gleichung zweiten, dritten Grades mittels rationaler Zahlen zu erfüllen, war daher für ihn eine verlockende Aufgabe, aber was hätte ihn bestimmen können, mit $ax + by = c$ sich zu beschäftigen, wo jedem rationalen x ein ähnliches y zur Seite steht und umgekehrt? Höchstens darauf hätte er sein Augenmerk richten können, den Diorismus anzugeben, welcher die Erfüllbarkeit der Gleichung in Grenzen schliesst, da negative Wurzeln für ihn nicht vorhanden waren. Dieser Diorismus aber liegt, sowohl wenn a und b beide positiv sind, als auch wenn sie verschiedene Vorzeichen besitzen, so nahe, dass der geistreiche Diophant seine Leser damit nicht langweilte. Vielleicht mag er wenige Worte darüber in einer Anmerkung gesagt haben, welche dann, gleich manchem Anderen, z. B. der Lehre von den bestimmten quadratischen Gleichungen, verloren ging.

Cantor.

Bilder aus der Geschichte der Physik für Freunde der Naturwissenschaften und für Studirende an höheren Schulen. Von Dr. Eugen Netoliczka, kaiserl. Rath, Professor der Physik i. R. in Graz, Ritter des k. k. österr. Franz-Josef-Ordens, Besitzer der goldenen Medaille für Kunst und Wissenschaft und des Verdienstkreuzes des grossherz. Mecklenb. Ordens der wendischen Krone. Nach des Verfassers Tode fortgesetzt und durchgesehen von Dr. A. Wachlowski, k. k. Gymnasialprofessor. Wien und Leipzig 1891. Verlag von A. Pichler's Wittwe und Sohn, Buchhandlung für pädagogische Literatur. 263 S.

Wenn Herr Wachlowski in der Vorrede dem physikalischen Unterrichte mehr als dem in irgend einem anderen Gymnasialgegenstande das Verdienst eingeräumt wissen will, den Schüler zu einer bestimmten Weltanschauung führen zu können, und wenn er namentlich dann dieses Ziel für erreichbar hält, wenn der Unterricht in geschichtlicher Zeitfolge ertheilt wird, wenn er das allmälige Entstehen der heutigen Ansichten aus nach und nach verlassenen Irrthümern erkennen lässt, so sind wir vollkommen mit ihm einverstanden. Eine ganz andere Frage ist es, ob die von Herrn Netoliczka begonnenen, von Herrn Wachlowski zu Ende geführten Bilder aus der Geschichte der Physik dem Schüler in die Hand gegeben werden sollen, damit er in ihnen das in der Schule Gehörte im Zusammenhange nachlesen könne. Das Büchelchen ist in seinen einzelnen Capiteln allzu ungleich, als dass eine Empfehlung desselben nicht ungemein vorsichtig erfolgen dürfte. In manchen Abschnitten, und insbesondere in den älteren, sind so wesentlich neue Dinge vorgetragen, dass wir ohne besondere Begründung derselben, welche Verfasser und Fortsetzer sich geschenkt haben, ihnen Glauben beizumessen Anstand nehmen. Wenn S. 8 von Archimed gesagt ist, „er bestimmte bereits die Dichte verschie-

dener Flüssigkeiten mittelst eines aus Blech verfertigten und mit einer Scala versehenen Gefässes", wenn S. 9 Heron den Heronsball erfand, wenn S. 11, und damit übereinstimmend im Namenregister, von einem Kleomenes die Rede ist, der über Lichtbrechung geschrieben habe, während überall unter den Gelehrten dieser Schriftsteller Kleomedes heisst, so verlangen wir, und mit uns wohl noch andere Fachgenossen, die Beweise. Weniger wichtig sind biographische Neuerungen. Ptolemaeus hat nach S. 16 von 70—147 gelebt. Bisher kannte man weder sein Geburts-, noch sein Todesjahr. Auffallend ist, dass er im Jahre 150, also drei Jahre nach seinem Tode, laut S. 121, Untersuchungen über Höhe und Tiefe von Tönen anstellte. Coppernicus (S. 72) soll Sohn eines Wundarztes gewesen sein und soll in Wien den Unterricht von Purbach und Regiomontan genossen haben. Wie das möglich war, da Purbach 1461 und Regiomontan 1476 starb, während Coppernicus 1473 geboren ist, möchten wir wissen. S. 116 glaubt der Verfasser nicht an die vorübergehende Geisteskrankheit Newton's, welche doch nachgewiesene Thatsache ist. Wir legen auf diese Fehler nur soweit Gewicht, als sie sehr leicht zu vermeiden gewesen wären. Die Darstellung selbst ist stylistisch recht gewandt. Einen vollständig erkennbaren Geistesfaden aber zu finden, welcher das Ganze durchziehend, die Anordnung beherrscht, waren wir nicht im Stande. Es ist nicht mehr als gerecht, anzuerkennen, dass die von Herrn Wachlowski selbständig bearbeiteten letzten Capitel vor vielen ihnen vorhergehenden den Vorzug verdienen.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. März bis 31. Mai 1892.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Classe d. k. b. Akademie d. W. 1891, 3. Heft (Schluss). München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

—— der k. sächs. Gesellschaft d. Wissensch. Math.-phys. Classe. 1891. Nr. IV und V. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

—— der kais. Akademie d. Wissensch. Math-naturw. Classe, Abth. IIa. 100. Bd. Wien, Tempsky. 27 Mk. 20 Pf.

Berliner astronomisches Jahrbuch f. 1894. Herausgeg. v. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. 7. Bd., herausgeg. v. E. Weiss. Wien, Künast. 15 Mk.

—— des russ. physikal. Centralobservatoriums. Jahrg. 1890, herausgeg. v. H. Wild. Leipzig, Voss. 25 Mk. 60 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. 26. Jahrg., herausgeg. von R. Lehmann-Filhés u. H. Seeliger. Leipzig, Engelmann. 8 Mk.

Mittheilungen des Vereins von Freunden der Astronomie und kosm. Phys. 2. Jahrgang, redigirt von W. Foerster. 1. Heft. Berlin, Dümmler. compl. 6 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 21. Bd. (1889). 1. Heft, herausgeg. v. E. Lampe. Berlin, G. Reimer. 13 Mk.

Fortschritte d. Physik i. J. 1886. 1. Abth. Phys. d. Materie, redig. von E. Budde. Ebendas. 13 Mk.

Verhandlungen d. phys. Gesellsch. in Berlin. 10. Jahrg. (1891). Herausgegeben v. A. König. Ebendas. 2 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch f. 1891. Section Preussen. 2. Heft, redig. v. W. v. Bezold. Berlin, Asher. 3 Mk.

—— von 1890. Section Württemberg, bearb. v. C. Meyer. Stuttgart, Metzler. 3 Mk.

Abhandlungen d. k. preuss. meteorologischen Instituts. I. Bd., Nr. 1—5. Berlin, Asher. 17 M. 70 Pf.

Repertorium f. Meteorologie; redig. v. H. Wild. 14. u. 15. Bd., 1. Heft. Petersburg und Leipzig, Voss. 37 M. 30 Pf.

Mathem. u. naturw. Berichte aus Ungarn. 9. Bd. Redig. v. J. Fröhlich. Berlin, Friedländer. 8 Mk.

Mémoires de l'académie des sc. de St. Peterbourg. VII. série, tome 38. Leipzig, Voss. 2 Mk. 25 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Weissenborn, H., Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Berlin, Mayer und Müller. 3 Mk.

Gerland, E., Geschichte der Physik. Leipzig, J. J. Weber. 4 Mk.

Riecke, E., Rede über Wilh. Weber. Göttingen, Dieterich. 2 Mk. 40 Pf.

Burkhardt, Vortrag über Bernh. Riemann. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 40 Pf.

Ansprachen, Adressen, Diplome etc. bei der am 2. November 1891 abgehaltenen Helmholtz-Feier. Berlin, Hirschwald. 1 Mk. 60 Pf.

Reine Mathematik.

Dini, U., Grnndlagen f. eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse. Deutsch bearb. v. J. Lüroth u. A. Schepp. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

Schapira, H., Theorie allgemeiner Cofunctionen. 1. Bd., 2. Thl., 1. Heft. Ebendas. 6 Mk.

Moecke, E., Ueber zweiachsig-symmetrische Curven 4. Ordn. mit 2 Doppelpunkten. Schluss. Gross-Strehlitz, Wilpert. compl. 2 Mk. 40 Pf.

Angewandte Mathematik.

SOMMERFELD, A., Ueber eine neue Integrirmaschine. Königsberg i. Pr. Koch. 60 Pf.

KORN, A., Theorie der Gravitation u. d. elektr. Erscheinungen, auf Grundlage der Hydrodynamik. 1. Thl. Gravitation u. Elektrostatik. Berlin, Dümmler. 1 Mk. 50 Pf.

GEBS, W., Thermodynamische Studien. Aus d. Engl. v. W. OSTWALD. Leipzig, Engelmann. 14 Mk.

WOLF, R., Handbuch der Astronomie. 3. Halbband. Zürich, Schulthess 8 Mk.

HINRICHS, G., Beiträge zur Dynamik des chemischen Moleküls. Leipzig, Fock. 80 Pf.

HIRSCH et PLANTAMOUR, Nivellement de précision de la Suisse. 10. livr. II. vol. Basel, Georg. 2 M. 50 Pf.

Physik und Meteorologie.

GALILEO GALILEI, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme; aus dem Italienischen übersetzt u. erläutert von E. STRAUSS. Leipzig, B. G. Teubner. 16 Mk.

MÜLLER-ERZBACH, W., Physikalische Aufgaben für den mathem. Unterricht in Oberclassen. Berlin, Springer. 2 Mk.

HERTZ, H., Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Leipzig, Barth. 6 Mk.

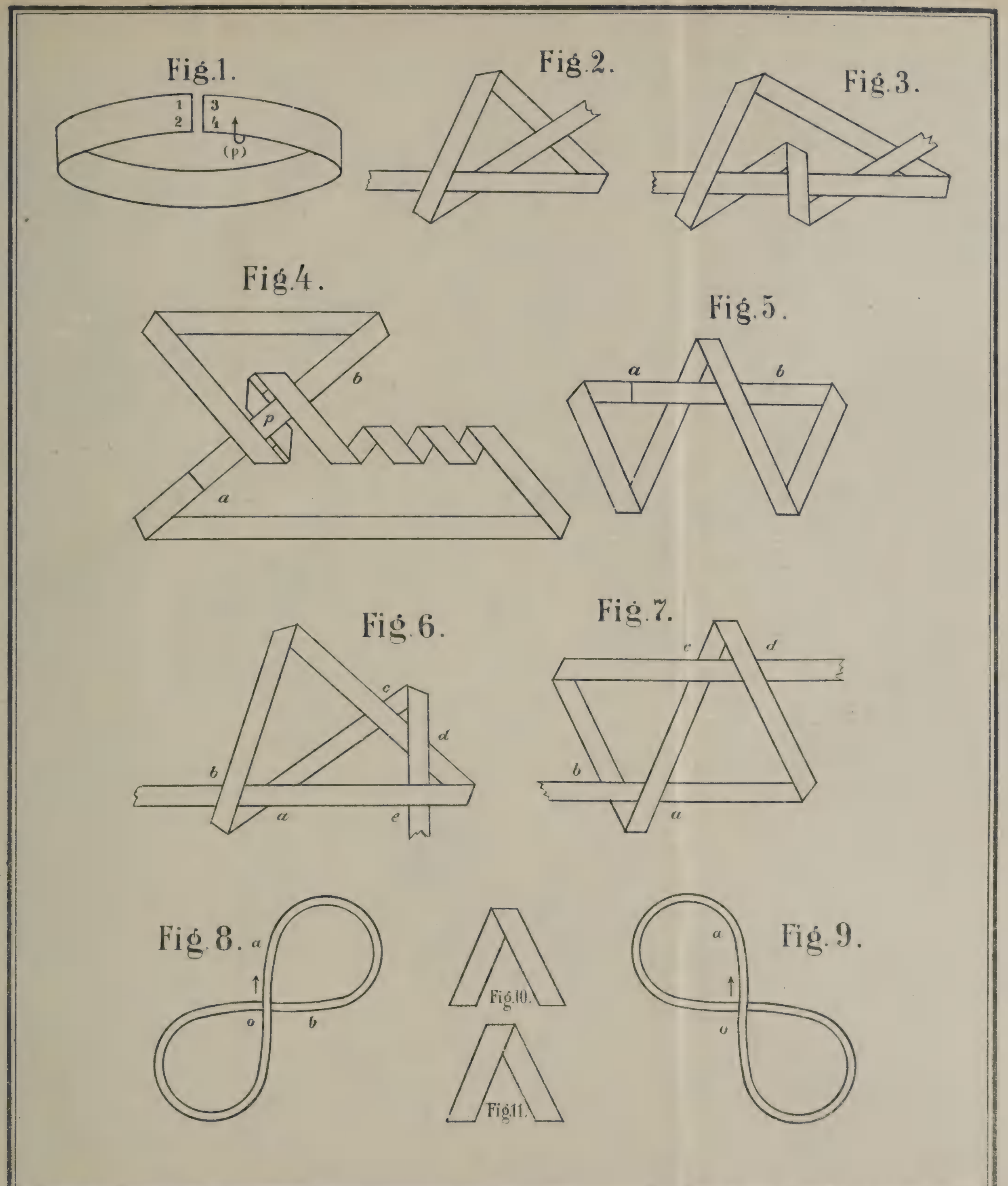
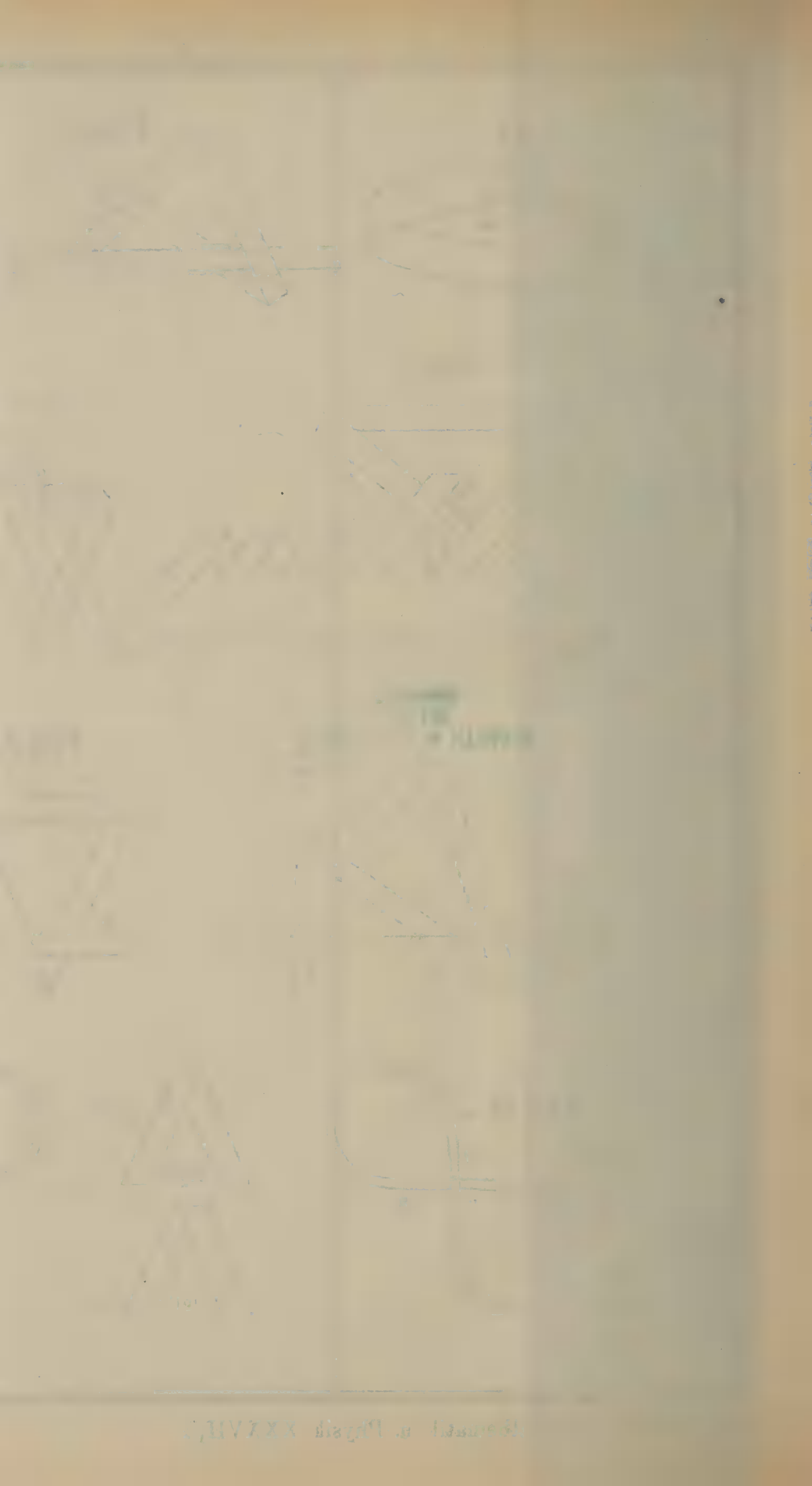
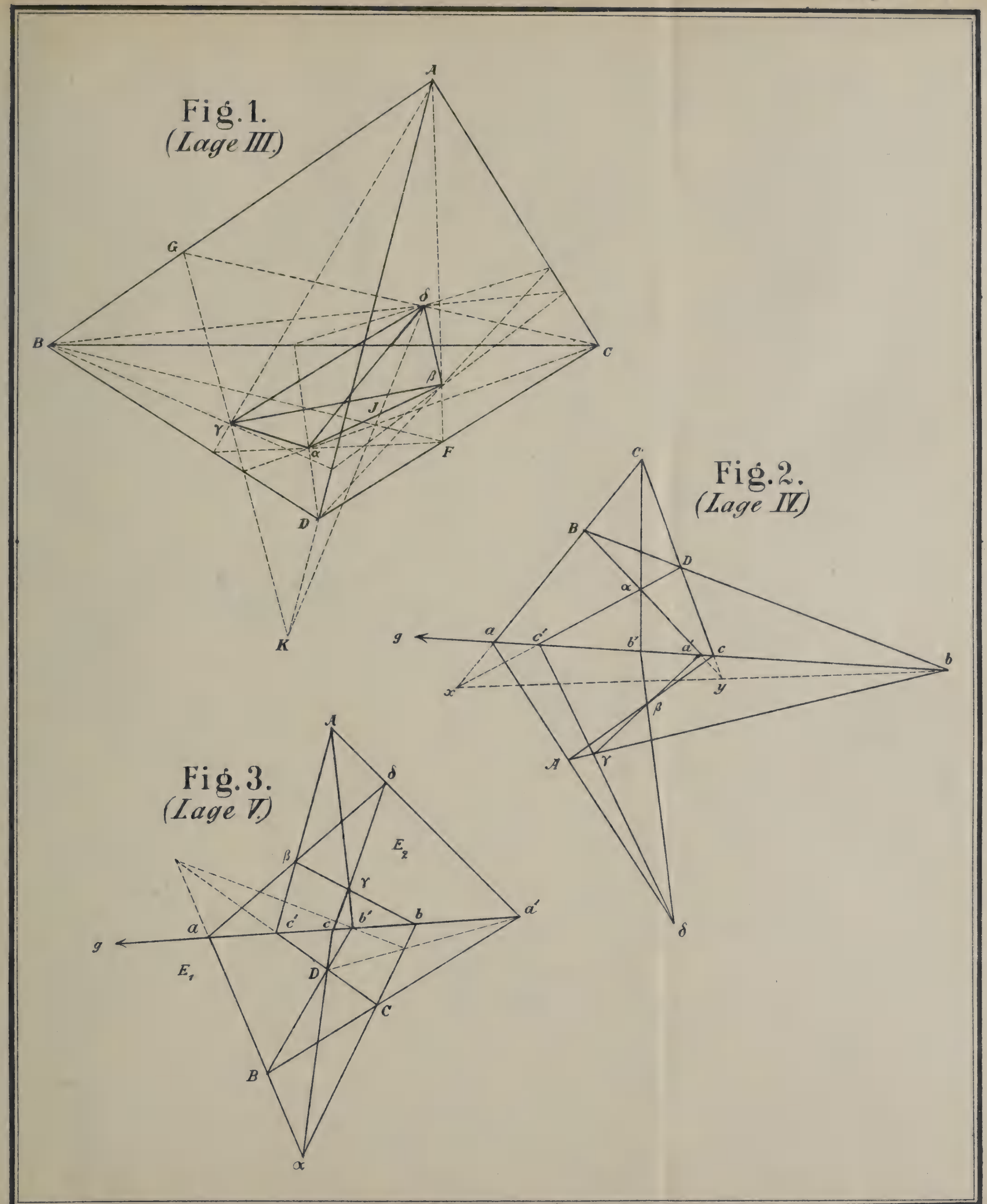


Fig.1.
1
2
3
4
(p)
Fig.2.
Fig.3.
Fig.4.
b
p
a
Fig.5.
a
b
Fig.6.
c
d
b
a
e
Fig.7.
c
d
b
a
Fig.8.
a
o
b
Fig.10.
Fig.11.
Fig.9.
a
o




Fig. 1.
(Lage III.)
A
G
B
C
δ
β
J
γ
α
F
D
K
Fig. 2.
(Lage IV.)
C
B
D
α
g
a
c′
b′
a′
c
b
x
y
β
A
γ
δ
Fig. 3.
(Lage V.)
A
δ
E2
β
γ
a
c′
c
b′
b
a′
g
E1
D
C
B
α

Historisch-literarische Abtheilung.

Die von Wilhelm von Moerbek benutzten Handschriften.

Von

J. L. Heiberg

(aus einem Briefe an M. Cantor).

Ich benutze die Gelegenheit um Ihnen mitzutheilen, dass meine Vermuthung (Abhandlungen zur Gesch. d. Math. V, S. 80) über die zwei von Wilhelm von Moerbek bei seiner Archimedes-Uebersetzung 1269 benutzten griechischen Handschriften neuerdings eine unerwartete urkundliche Bestätigung gefunden hat. In dem neuen Werk von Ehrle, Historia Bibliothecae Romanorum Pontificum I Rom 1890, finden sich nämlich Seite 95 ff. in einem 1311 verfassten Verzeichniss der päbstlichen Bibliothek unter anderen griechischen Handschriften auch folgende zwei aufgeführt:

608 item unde cim quaternos mediocris forme scriptos de lictera greca in cartis pecudinis, in quibus est liber Tholomei de resumptione, perspectiua ipsius, perspectiua Euclidis et quedam figure Arcimenidis.

612 item alium librum de lictera greca scriptum in cartis pecudinis, in quo continetur liber Arcimenidis de spera et scilindro, antiquum et non habet coperturam.

612 ist derjenige codex, der später Georg Valla gehörte; es standen darin die Bücher *περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* voran, und die erste Seite war später abgerieben und fast unleserlich, was sehr gut dazu stimmt, dass die Handschrift hier als „ohne Einband" bezeichnet wird. 608 entspricht genau der Vorstellung, die ich mir von der zweiten Handschrift Wilhelms gebildet hatte. Tholomei de resumptione ist *περὶ ἀναλήμματος*, die perspectiua nicht seine grosse Optik, die ja längst nur arabisch existirte, sondern die von Rose herausgegebene Katoptrik des „Ptolemaeus" (Heron); beide sind von Wilhelm im cod. Ottobon. 1850, der die Archimedes-Uebersetzung enthält, mit übersetzt. Ueberhaupt ist es klar, dass die hier verzeichnete Sammlung die Grundlage der Uebersetzungsthätigkeit im 13. Jahrhundert bildete. Näheres darüber werde ich bald in den Publicationen der dänischen Gesellschaft der Wissenschaften (französisch) mittheilen.

Recensionen.

Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Von Felix Klein. Ausgearbeitet und vervollständigt von Dr. Robert Fricke. Erster Band: Grundlegung der Theorie. Leipzig 1890. 8°. (Antwort auf die Recension des Herrn Schlesinger.)

Das sechste Heft des 36. Jahrganges der vorliegenden Zeitschrift bringt eine Recension des vorbezeichneten Werkes, welche nicht eben besonders anerkennend geschrieben ist, sondern der Einwürfe und tadelnden Bemerkungen eine grosse Menge enthält, während sie über eine Reihe von Punkten, auf die wir besonders Gewicht legen möchten, stillschweigend hinweggeht. Nun will ich hierüber mit dem Herrn Recensenten nicht rechten, ich möchte auch in dieser Hinsicht meinem geehrten Mitarbeiter, Herrn Dr. Fricke, nicht vorgreifen. In der That hat letzterer, wie schon der Titel unseres Werkes andeutet und übrigens im Texte genauer ausgeführt ist, viel mehr als die blosse äussere Redaction unseres Werkes übernommen; er hat sehr vielfach die von mir nur angedeuteten Gedankengänge selbstständig ausgestaltet und ist darum berechtigt, ein gut Theil des Verdienstes, welches unsere Darstellung besitzen mag, wie auch der Verantwortung für sich zu beanspruchen; — sei es mir gestattet, demselben auch an dieser Stelle für die grosse Unterstützung, die er mir durch seine nie ermüdende Arbeitskraft hat zu Theil werden lassen und die er mir eben wieder bei Fertigstellung des zweiten Bandes unseres Werkes gewährt, den allerbesten Dank auszusprechen. Was mich bewegt, hier selber zu antworten, ist ein Vorwurf des Herrn Recensenten, für den ich allein einzutreten habe, der Vorwurf nämlich, als seien wir bei unseren Quellenangaben nicht objectiv verfahren und haben insbesondere einen Brief an Herrn Hermite, der im 83. Bande von Borchardt's Journal abgedruckt ist (1876 resp. 1877) nicht nach seiner sachlichen Bedeutung anerkannt. Nun ist zwar alles Wesentliche hierüber von mir bereits im 21. Bande der mathematischen Annalen (1882 resp. 1883) gesagt (cf. p. 215 daselbst), und ich könnte kurzweg auf meine damaligen Bemerkungen verweisen, die ich ungeändert aufrecht erhalte; ich will aber doch etwas näher auf die hierbei in Betracht kommenden mathematischen Momente eingehen, als bezüglich derselben bei dem Herrn Recensenten ein principieller Irrthum vorzuliegen scheint. Auf Seite 205 (oben) der Recension findet sich nämlich die Bemerkung: „dass

die Eindeutigkeit der Modulfunctionen durch die Dreieckstheilung eigentlich nur anschaulich gemacht wird, scharfe analytische Beweise für die letztere Eigenschaft dünken uns nur der aus der Differentialgleichung fliessende Fuchs'sche (Borchardt's Journal Bd. 83) und der Poincaré'sche mit Hilfe der functions thétafuchsiennes.“ Das ist nun genau das Gegentheil von dem richtigen Sachverhalt: die Eindeutigkeit kann nur durch die Dreieckstheilung, d. h. durch das Studium der äquivalenten Gebiete, welche ihre klarste Beschreibung durch die Kreisbogendreiecke finden, erwiesen werden, und die Arbeiten der Herren Fuchs und Poincaré erbringen den Eindeutigkeitsbeweis in der That nur, so weit sie mehr oder minder explicite auf die Dreieckstheilung eingehen; sie enthalten in dieser Hinsicht keinerlei Fortschritt über die von Herrn Schwarz 1871—1872 im 75. Bande von Borchardt's Journal gegebene Darstellung. Bei Herrn Poincaré liegt dies ohne Weiteres zu Tage, indem er seine (übrigens ja viel allgemeineren) Entwickelungen mit den Kreisbogenfiguren beginnt, mit deren Hilfe er dann erst die Bedeutung seiner Thetareihen untersucht; es müsste auch merkwürdig zugehen, wenn man die Eindeutigkeit einer Function blos aus dem Umstande sollte erweisen können, dass man für dieselbe eine allerdings eindeutige, aber nur in einem Theil der Ebene convergente Reihenentwickelung aufstellen kann. Woher weiss man oder erfährt man, dass die Grenze des Convergenzbereiches dieser Entwickelung zugleich eine Grenze der Function ist? Nur aus der Discussion der Kreisbogendreiecke bez. der Fundamentalbereiche. Nun ist ja richtig, dass letztere bei Herrn Fuchs in Band 83 nur in ganz allgemeinen Zügen gegeben wird. Aber eben hierin liegt die Unvollkommenheit der Arbeit, die ihren Verfasser zu den Ungenauigkeiten und Widersprüchen hinführt, welche schon Herr Dedekind in demselben Bande 83 des Borchardt'schen Journals gerügt hat (1877). Ich kann in dieser Hinsicht nur wiederholen, was ich l. c. (p. 215 des 21. Bandes) in den mathematischen Annalen schrieb: „dass Fuchs' Brief an Hermite von den hier in Betracht kommenden Ideenbildungen nichts enthält, was nicht aus früheren Arbeiten zugleich correcter und vollständiger bekannt gewesen wäre.“ Und hier liegt nun der Grund, — wenn es durchaus verlangt wird, dass ich noch einmal sage, was ich in Band 21 aussprach — weshalb ich die Arbeit von Herrn Fuchs aus Band 83 des Borchardt'schen Journals in meinen Veröffentlichungen lieber nicht nenne: ich würde die Arbeit nur so citiren können, dass ich die kritischen Bemerkungen, die ich gerade andeutete, ausführlich entwickelte, und ich glaube nicht, dass ich damit irgend Jemandem einen Dienst erweisen würde, weder dem Autor, noch auch dem Leser, der positive Belehrung sucht und polemische Auseinandersetzungen, die als erledigt gelten können, nicht unnöthig wiederholt wünschen kann. — Aber freilich scheint der Herr Recensent für die Leistungen des Herrn Fuchs, die in ihrem eigenen Gebiete von mir niemals in Frage gestellt worden

sind und auch in den vorliegenden „Vorlesungen“ anerkannt werden, einen ganz besonderen Maassstab zu besitzen. Es tritt das an vielen Stellen der Recension zu Tage; ich verweise hier nur auf folgendes Detail. Setzt man in das Legendre'sche Normalintegral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2 . 1-k^2x^2}}$$

$x=\sqrt{z}$, so entsteht, von dem Zahlenfactor $^1|_2$ abgesehen:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z . 1-z . 1-k^2z}}.$$

Auf Seite 24, 25 unserer „Vorlesungen“ benennen wir nun dieses letztere Integral als „Riemann'sches“ Normalintegral, „eine Benennung, die darin ihren Grund hat, weil man die bei Jacobi u. A. vorkommenden Entwickelungen immer auf dieses Integral als Normalform beziehen muss, wenn man den allgemeinen von Riemann in der Theorie der Abel'schen Functionen gegebenen Definitionen gerecht werden will.“ Dieser Benennung (die übrigens nicht von mir herrührt; ich habe dieselbe von einem älteren Collegen übernommen) steht höchstens entgegen, dass man selbstverständlich schon vor Riemann zwischendurch immer wieder mit der bezeichneten Integralform operirt hat (wie wir übrigens nicht verfehlen, l. c., Seite 25 unserer „Vorlesungen“, selber anzudeuten). Aber was bemerkt hierzu unser Recensent (Seite 203 der Recension, oben)? Er verlangt alles Ernstes, dass hier statt Riemann vielmehr Herr Fuchs citirt werden müsse, weil dieser in den Bänden 71 und 83 des Borchardt'schen Journals besagte Normalform des elliptischen Integrals „eingeführt“ habe (also 1869—70, bez. 1876—77)! Controlirt man diese Angabe, so findet man, dass Herr Fuchs an den bezeichneten Stellen an dem Legendre'schen Normalintegral die Substitution $x=\sqrt{z}$ genau so beiläufig vollzieht, wie das Hunderte von Mathematikern vor ihm, und ich wiederhole: auch vor Riemann, gethan haben.

Göttingen, im April 1892. F. Klein.

Teoria della integrabilità delle funzioni e dei massimi e minimi degli integrali definiti di L. Barbera. Bologna. Gamberini e Parmeggiani. 1890. 215 S. 8°.

Der erste Abschnitt dieses Werkes, welches der Aufsuchung der Integrirbarkeitsbedingungen der Differentialausdrücke gewidmet ist, zerfällt in vier Abtheilungen, deren Inhalt der Hauptsache nach im Folgenden zusammengefasst werden kann:

I. Abtheilung. — Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass Vdx ein exactes Differential ist, wenn V ausser x die Function y und deren Ableitungen 1ter, 2ter, 3ter, ... Ordnung $p, q, r, \ldots$ enthält, ist:

$$\alpha) \qquad N - P' + Q'' - R''' + \ldots = 0,$$

wo $N = \frac{\partial V}{\partial y}$, $P = \frac{\partial V}{\partial p}$, $Q = \frac{\partial V}{\partial q}$, $R = \frac{\partial V}{\partial r} \cdots$ ist (Euler'scher Satz).

Die m nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass Vdx^m ein exactes Differential m^{ter} Ordnung ist, sind:

$$\beta) \quad N - P' + Q'' - R''' + \ldots = 0, \; P - 2Q' + 3R'' - 4S''' + \ldots = 0,$$
$$Q - 3R' + 6S'' - 10T''' + \ldots = 0, \ldots$$

Enthält V ausser der abhängigen Veränderlichen y noch andere abhängige Veränderlichen z, u, ..., so sollen noch die zu α) oder β) analogen, auf z, u... bezüglichen Gleichungen erfüllt sein.

II. Abtheilung. — Enthält V zwei unabhängige Veränderlichen x, y und eine Function z von x, y, sowie deren Ableitungen, das ist:

$$\begin{array}{llll} z & p & q & r \ldots \\ p' & q' & r' & s' \ldots \\ q'' & r'' & s'' & t'' \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

wo jede Function die Ableitung der vorhergehenden nach x und der obenstehenden nach y ist, so gilt der folgende Satz:

Ist V eine exacte Derivirte nach x und ebenso nach y, so existirt eine solche Function U, dass $V = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$.

Hieraus ergeben sich die Bedingungen dafür, dass $Vdxdy$ ein exactes Differential ist, das ist dafür, dass eine Function U existirt, für welche $U = \iint V dx dy$; diese Bedingungen sind:

$$\gamma) \quad \begin{cases} N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots = 0, & N - \frac{dP'}{dy} + \frac{d^2Q''}{dy^2} - \frac{d^3R'''}{dy^3} + \ldots = 0, \\ P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R'}{dx^2} - \frac{d^3S'}{dx^3} + \ldots = 0, & P - \frac{dQ'}{dy} + \frac{d^2R''}{dy^2} - \frac{d^3S'''}{dy^3} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

wo N, P, P'... die Ableitungen von V nach z, p, p'... bedeuten. Diese Gleichungen sind aber, wie wir nebenbei bemerken, nicht sämmtlich von einander unabhängig.

III. Abtheilung. — Bestimmung der Bedingungen dafür, dass eine Function U existirt, für welche $U = \iiint V dx dy dz$ ist, wenn V drei unabhängige Veränderlichen enthält.

IV. Abtheilung. — Es sei z eine Function der zwei unabhängigen Veränderlichen x, y, und man setze wie gewöhnlich:

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy, \ldots$$

Ist nun ein Differentialausdruck:

$$f(x,\ dx,\ y,\ dy,\ z,\ pdx,\ qdy,\ p,\ rdx,\ sdy,\ q,\ sdx,\ tdy,\ \ldots)$$

vorhanden, dessen Ableitungen nach z, p, q, ... durch N, P, Q, ... bezeichnet werden mögen, so ist die Bedingung dafür, dass f ein exactes Differential sei:

$$\delta)\qquad N-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}+\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{d^2S}{dx\,dy}+\frac{d^2T}{dy^2}-\ldots=0.$$

Die Hauptergebnisse der drei ersten Abtheilungen sind, wie der Verfasser angiebt, schon von A. J. Lexell (De criteriis integrabilitatis formularum differentialium, Novi Comm. Ac. Scientiarum Imp. Petropolitanae, T. XV, 1770) und zwar gleichfalls ohne Anwendung des Variationsbegriffes, ermittelt worden. Was den angeführten Satz aus der vierten Abtheilung betrifft, so kann er leicht aus bekannten Sätzen abgeleitet werden. Wird nämlich f auf die Form $Xdx+Ydy$ gebracht, so soll, wenn f ein exactes Differential dU ist, $X=\frac{\partial U}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial U}{\partial y}$ sein, woraus bekanntlich folgt, dass $\int\int Xdx\,dy$ und $\int\int Ydx\,dy$ auf einfache, über die Begrenzung der Integrationsfläche erstreckte Integrale reducirbar sind; dazu ist aber (siehe z. B. Moigno, Calcul des variations, Paris 1861, § 41) nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung δ) für X und Y, folglich auch für $Xdx+Ydy$, erfüllt sei.

Bei der Gelegenheit der Aufstellung von Gleichung γ) bemerkt der Verfasser, dass die gewöhnliche, vermittelst der Variationsrechnung gefundene Integrirbarkeits-Bedingung für $Vdx\,dy$, nämlich $N-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}+\ldots=0$, unrichtig ist. Es ist aber zu beachten, dass $Vdx\,dy$ nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise „integrirbar" ist, wenn $\int\int Vdx\,dy$ sich auf ein einfaches Integral reducirt, während Herr Barbera nur solche Ausdrücke $Vdx\,dy$ als „integrirbar" bezeichnet, für welche die Integration $\int\int Vdx\,dy$ unabhängig von der Form der in V vorkommenden Functionen ausführbar ist. Die besprochene Bemerkung ist also hinfällig.

Schon aus dem soeben Gesagten ist zu ersehen, dass Herr Barbera ein entschiedener Gegner der Variationsrechnung ist. Er hat sich in früheren Schriften gegen diesen Theil der Infinitesimalrechnung sehr scharf ausgesprochen, und bietet jetzt im zweiten und dritten Abschnitte des vorliegenden Werkes einen Ersatz für denselben dar. Diese zwei Abschnitte sind der Analysis des Maximums- und Minimumsbegriffes und der Theorie der Maxima und Minima der bestimmten Integrale gewidmet. Die Schlussfolgerungen des Verfassers sind aber leider grösstentheils nichts weniger als verständlich, und sind auch ohne Zweifel mit manchen Fehlern behaftet; es werden z. B. S. 167–168 aus $M+Np+Pq+\ldots=\overline{M}+\overline{N}+\overline{P}q+\ldots$ die Identitäten $M=\overline{M}$, $N=\overline{N}$, $P=\overline{P}\ldots$, abgeleitet, ohne zu beachten, dass M, N, P, ..., $\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{P}$, ... die Functionen p, q..., enthalten. Es ist

hier unmöglich, auf eine ausführliche Besprechung und Kritik der vorgetragenen Theorie einzugehen; und wir begnügen uns damit, eine curiose Folgerung derselben anzuführen, welche dem Leser einen Begriff von ihrem Werthe geben kann. Wird das Problem vorgelegt, welche Linie $y=f(x)$ den Flächeninhalt $\int y\,dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht, so findet man durch Anwendung der Barbera'schen Theorie, dass diese Linie eine Gerade ist. Aber noch merkwürdiger ist das zur Rechtfertigung dieses Resultates beigefügte Raisonnement: die durch die Gerade bestimmte Fläche ist ein Maximum oder ein Minimum in Bezug auf die den concaven bezw. convexen Linien entsprechenden Flächen.

Was den polemischen Theil des Werkes betrifft, welcher fast die ganze Vorrede ausmacht, so halten wir es für nutzlos, darauf einzugehen.

Mantua, den 7. Juli 1891. G. Vivanti.

Nuovi Studi Gallileiani per Antonio Favaro. Venezia 1891. Tipografia Antonelli. 430 pag.

Hat Herr Favaro seit geraumer Zeit erfolgreiche Mühe auf Einzelforschungen zur Lebensgeschichte Galilei's verwandt, so ist selbstverständlich sein diesen Bestrebungen gewidmeter Eifer nur gewachsen, seit ihm die Leitung der neuen Ausgabe von Galilei's Werken übertragen worden. Sollte er die neuen Ergebnisse aufsparen, bis sie innerhalb jener Ausgabe zur Veröffentlichung gelangen konnten, sollte er sie vorzeitig dem Drucke übergeben? Für das Eine wie für das Andere liessen Gründe sich angeben. Herr Favaro hat zum Letzteren sich entschlossen, hauptsächlich deshalb, weil das Erscheinen der neuen Ausgabe sich über viele Jahre ausdehnen wird, weil kein zwingender Grund vorhanden ist, die für Galilei sich interessirenden Gelehrten so lange Zeit auf gefundene Ergebnisse warten zu lassen, weil endlich auch andere Schriftsteller nach Herrn Favaro die von ihm entdeckten Dinge nunmehr leicht in Erfahrung bringen könnten und vielleicht nicht gleiche Enthaltsamkeit üben würden, wodurch ihm der ihm in der öffentlichen Meinung gebürende Finderlohn verenthalten werden könnte. Fünfzehn einzelne Abhandlungen sind deshalb hier in einem Bande der Oeffentlichkeit übergeben, deren Inhalt wir in knappster Form kennzeichnen wollen.

1. Giovanni Battista Ricasoli Baroni war ein Freund Galilei's. Er hatte eine bedeutende Schenkung an einen entfernten Verwandten gemacht, deren Giltigkeit von näheren Verwandten wegen Geistesstörung des Schenkers gerichtlich angegriffen wurde. Galilei gehörte zu den wichtigsten in dieser Frage vernommenen Zeugen, und alle seine Aussagen sind actenmässig abgedruckt. Jener Process fand 1589 statt. Für Galilei's eigenes Leben ist er ohne Erheblichkeit, es sei denn, dass aus seinen Aus-

sagen Feinde ihm erwuchsen, wenn auch von einem späteren Eingreifen derselben zu seinem Nachtheile uns Nichts bekannt ist.

2. Im Jahre 1656, mithin 14 Jahre nach Galilei's Tode, gab Urbano d'Aviso eine Jugendschrift Galilei's über die Sphäre heraus, welche theils für echt, theils für unecht gehalten worden ist, letzteres hauptsächlich darauf hin, dass das Buch noch ganz in der Manier Sacrobosco's gehalten ist und für die ptolemäische Weltordnung eintritt. Herr Favaro begründet die Echtheit des Buches und zugleich die Unrichtigkeit einer Behauptung Libri's, er sei vielmehr der glückliche Besitzer der autographen Schrift über die Sphäre, welche Galilei verfasste. Dieses sogenannte unschätzbare Schriftstück ist bei dem Verkaufe der Libri'schen Sammlung in den Besitz des Britischen Museums übergegangen; von Galilei rührt es nicht her.

3. In der Florentiner Nationalbibliothek hat Herr Favaro ein Exemplar der Copernikanischen Revolutionen in der Baseler Ausgabe von 1566 entdeckt, welches Randnoten enthält, in denen er Galilei's Handschrift wiedererkennen will. Da die betreffenden Randnoten nur diejenigen Aenderungen vornehmen, welche 1616 durch die Indexcongregation gefordert wurden, so kommt wenig darauf an, von wem sie herrühren.

4. Vom April 1611 bis Mai 1614 hat Marcus Welser, der bekannte Augsburger Patrizier, 18 Briefe an Johann Faber aus Bamberg, der damals in Rom lebte und Secretär der Academia dei Lincei war, geschrieben. Sie sind erhalten und hier erstmalig abgedruckt. Der Name Galilei's und Scheiner's kehrt in ihnen des Oefteren wieder, insbesondere ist von Beider Schriften über die Sonnenflecken mehrmals die Rede, doch würde man nur aus diesen Briefen nicht entfernt vermuthen können, von welcher Gehässigkeit jene Schriften allmälig wurden.

5. Es ist längst bekannt, dass Galilei, nachdem er die Jupitertrabanten entdeckt und deren Umlaufzeit berechnet hatte, auf den Gedanken kam, dieselben bei der in der Steuermannskunde hochwichtigen Aufgabe der Bestimmung der geographischen Länge eines Ortes in Anwendung zu bringen, und dass er im September 1612 diese seine neue Methode dem Könige von Spanien anbieten liess. Nicht bekannt waren aber die näheren Verhandlungen über dieses Anerbieten, deren Acten Herr Favaro im Staatsarchive in Florenz aufgefunden hat. Aus denselben geht hervor, dass die Verhandlungen oftmals unterbrochen, oftmals wieder aufgenommen wurden und sich so bis 1632 hinzogen, ein Zeitpunkt, der allzunahe bei dem Processe Galilei's liegt, als dass damals ein erfolgreicher Abschluss möglich gewesen wäre. Der frühere Nichterfolg ist theilweise in dem weiten Auseinandergehen der Bedingungen, welche Galilei stellte, von dem, was der spanische Hof bewilligen wollte, begründet.

6. Als im Jahre 1616 die geistliche Gerichtsbarkeit mit dem Werke des Koppernigk sich beschäftigt und Correcturen desselben anbefohlen hatte,

suchte Ingoli, ein damals in freundschaftlichen Beziehungen zu Galilei stehender Advocat aus Ravenna, das ganze copernikanische System auf Grundlage astronomischer, philosophischer und theologischer Widersprüche zu widerlegen. Galilei fertigte erst 1624, nachdem Urban VIII. den päpstlichen Thron bestiegen, eine Antwort aus, welche nicht vor 1814 im Druck erschienen ist, indem Galilei selbst und nicht minder die ersten Herausgeber seiner Werke es für gefährlich hielten, die kirchlich als verwegen (temerario) bezeichnete Lehre so unverhüllt und öffentlich zu vertheidigen. Die Schrift Ingoli's selbst war niemals gedruckt. Herr Favaro hat nur diese sowie auch eine handschriftliche Entgegnung Kapler's aufgefunden und beide Schriftstücke veröffentlicht, wofür man ihm ebenso, wie für die geschickt zusammengestellte Einleitung entschieden zu Danke verpflichtet ist.

7. Fürst Bald. Boncompagnie besitzt in seiner auch an werthvollen Handschriften überreichen Bibliothek einen Band Briefe, welche von Mitgliedern der Academie des Lincei an den Fürsten Fed. Cesi, den Präsidenten jener Academie gerichtet sind. Darunter befinden sich Briefe von Galilei selbst, andere in denen von Galilei wenigstens die Rede ist. Hier ist ein genaues Verzeichniss aller Briefe zum Abdrucke gebracht und aus den nicht von Galilei herrührenden Briefen sind die auf ihn bezüglichen Stellen ausgezogen.

8. Die Streitigkeiten zwischen dem Jesuiten Grassi und Galilei, welcher gegen Jenen den Saggiatore verfasste, sind in nahezu allen Einzelheiten längst bekannt. Herr Favaro hat dieselben hübsch dargestellt und einen noch nicht bekannten Brief Grassi's vom September 1633 veröffentlicht. Will man demselben vollen Glauben schenken, wozu Herr Favaro geneigter scheint, als wir es von uns behaupten können, so hätte Grassi sich während des Galilei'schen Processes alle Mühe gegeben, zu seinen Gunsten zu wirken, so dass ihn der Vorwurf nicht treffen dürfte, gemeinsam mit Scheiner im entgegengesetzten Sinne damals thätig gewesen zu sein.

9. Der in zahlreichen Bänden handschriftlich in der Pariser Nationalbibliothek erhaltene und erst zum geringsten Theil gedruckte Briefwechsel von Peiresc schliesst auch solche Briefe in sich, in welchen von Galilei die Rede ist, und welche hier gesammelt sind.

10. Ein Briefwechsel, welcher schätzbare Aufschlüsse über die Zeit der halben Gefangenschaft Galilei's in seiner Villa in Arcetri gewährt, ist der mit Elia Diodati. Zu diesen gehört der bekannte, allerdings nicht allgemein als echt anerkannte Brief Galilei's, in welchem das Wort des Pater's Grienberger enthalten ist, Galilei hätte über die Bewegung der Erde schreiben dürfen, was er wollte, wenn er sich nur das Wohlwollen der Jesuiten zu bewahren verstanden hätte, und welcher zuerst von Libri veröffentlicht wurde. Viele dieser Briefe sind leider verloren, und

wenn auch Herr Favaro aus den erhaltenen Schreiben den Nachweis des einstmaligen Vorhandenseins der verloren gegangenen und meistens auch deren Datum wiederherzustellen gewusst hat, so ist damit doch nur geringfügiger Ersatz geboten.

11. In der fünften Abhandlung war, wie wir oben sahen, von den Verhandlungen Galilei's mit dem spanischen Hofe bezüglich seiner Methode die geographische Länge eines Ortes zu finden die Rede. Noch während jene Verhandlungen im Gange waren, wurde Galilei angeregt über die gleiche Erfindung mit den Generalstaaten von Holland in Verbindung zu treten, welche, um ihren Platz an der Spitze der seefahrenden Nationen zu sichern, auf die Längenermittelung einen Preis gesetzt hatten, dessen Höhe allerdings nicht genau feststeht, und durch das Gerücht übertrieben worden zu sein scheint. Inzwischen wurde der Process gegen Galilei geführt. War derselbe für den spanischen Hof mehr als genügend, um zu verhindern, jemals wieder an Belohnung eines in Glaubenssachen immerhin Verdächtigen zu denken, so war die Wirkung auf Holland, wo die Reformation längst gesiegt hatte, die geradezu entgegensetzte. Jetzt wuchs dort nur die Begierde, in erster Linie Galilei selbst zu gewinnen, d. h. ihn aus seiner halben Gefangenschaft in Arcetri zu befreien, in zweiter Linie von seiner Erfindung für die Schifffahrt Nutzen zu ziehen. Galilei weigerte sich jene Uebersiedelung zu vollziehen, der allerdings so grosse Schwierigkeiten, Mühen und Gefahren entgegenstanden, dass man sehr begreiflich findet, dass der schon alte und gebrechliche Mann Scheu trug, diesen zu trotzen, wenn man gar nicht beachtet, dass Galilei stets ein guter Katholik blieb, und dass ihm als solchem Nichtunterwerfung unter päpstlich verhängte Haft undenkbar war. Dagegen war er erbötig seine Methode zur Längenauffindung an Holland zu verkaufen. Darüber wurden schliesslich erfolglose Unterhandlungen bis zum Jahre 1640 geführt, und das ganze zumeist in Holland aufbewahrte Actenmaterial derselben ist hier zum ersten Male veröffentlicht.

12. Unter Mittheilung einiger neuen Documente berichtet Herr Favaro über einen Jahresgehalt, welcher seit dem 20. März 1627 durch Urban VIII. für einen Neffen Galilei's ausgesetzt war, und über einen ähnlichen, der auf Galilei selbst ausgefertigt wurde. Die Erzählung ist lehrreich genug, indem man aus ihr erkennt, mit welchen Umständen es verbunden war, die Auszahlung eines solchen zugesicherten Jahreseinkommens durchzusetzen, wenn es überhaupt gelang.

13. Hier sind drei Gutachten vereinigt, welche zu verschiedenen Zeiten über Galilei'sche Angelegenheiten erhoben worden sind. Im ersten Gutachten wird begründet, dass Galilei, obwohl er nicht in Pisa wohne, den Gehalt eines pisaner Professors beziehen könne, da jener freie Wohnsitz zu den Bedingungen seiner Berufung gehörte, und da er der Universität schon durch den Glanz seines blossen Namens Nutzen bringe. Im zweiten

Gutachten ist die Fähigkeit Galilei's, ein Testament rechtsgiltig zu machen, anerkannt, weil er nicht eigentlicher Ketzerei überführt worden sei. Im dritten Gutachten ist mit ähnlicher Begründung bejaht, dass dem verstorbenen Galilei ein Grabmal errichtet werden dürfe.

14. Die Erfindung der Pendeluhren ist in den letzten Jahrzehnten wiederholt dargestellt und die Frage, ob Galilei, ob Huygens als der Erfinder zu betrachten sei, meistens dahin beantwortet worden, dass beide unabhängig von einander zu dem gleichen Gedanken kamen, dass Galilei ihn früher als Huygens hatte, dass Huygens aber ihn zweckmässiger als Galilei zur Ausführung brachte und ihn dadurch erst für die Wissenschaft wie für das tägliche Leben fruchtbringend machte. Herr Favaro, welcher das auch Anderen bekannte Material wiederholt prüft, kommt auch zu keinem anderen Ergebnisse. Auffallend erscheint uns, dass weder von denen, welche Galilei's Erstlingsrecht so laut betonen, noch von denen, welche Huygens das meiste Lob spenden, der Versuch gemacht wird, sich mit der Thatsache abzufinden, welche aus der neuen Ausgabe von Huygens Briefwechsel [Bd. II, pag. 533 u. 535] zu entnehmen ist, mit der Thatsache, dass 1615 oder 1616, mithin lange Zeit vor Galilei wie vor Huygens, durch einen Deutschen eine Pendeluhr hergestellt worden war, welche 1659 noch in Angoulême gesehen werden konnte.

15. Seit dem 25. September 1822 ist die päpstliche Erlaubniss vorhanden, die copernikanische Lehre zu vertheidigen und zu verbreiten. Schon vorher wurde dieselbe stillschweigend geduldet, aber noch 1820, als es um den Druck eines Lehrbuches der Optik und Astronomie des Pater Giuseppe Settele in Rom sich handelte, brach das unter der Asche glimmende Feuer des Hasses gegen die Lehre von der Bewegung der Erde in helle Flammen aus. Herr Favaro erzählt auf Grundlage ihm zur Verfügung gestellter Auszüge aus Settele's Tagebuch diese letzten kulturgeschichtlich merkwürdigen Kämpfe.

Wir haben, so denken wir, unseren Lesern durch diese kurzen Auszüge den Hauptinhalt des stattlichen, schön ausgestatteten Bandes kenntlich gemacht. Uns persönlich hat, wie wir auch einfliessen liesen, die 6. Abhandlung am meisten befriedigt, doch werden auch die anderen von Niemand ohne Belehrung gelesen werden. CANTOR.

Die Geschichte der Rechenkunst vom Alterthume bis zum XVIII. Jahrhundert mit besonderer Rücksicht auf Deutschland und Oesterreich. Von FRANZ VILLICUS, kaiserl. Rath, emer. k. k. Professor etc. etc. Mit Illustrationen und einer tabellarischen Zusammenstellung von Zahlwörtern aus 72 Sprachen, nebst Zählungssystemen von alt-

amerikanischen Völkerstämmen. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Wien 1891 bei Carl Gerold's Sohn. VIII, 108 S.

Referent steht allen geschichtlichen Bestrebungen in den exacten Wissenschaften zu freundlich gegenüber, als dass es ihn nicht freuen sollte, wenn eine Schrift geschichtlichen Inhaltes eine zweite Auflage erlebt. Sind doch Verbesserungen und Vermehrungen in unserer schnell fortschreitenden Gegenwart recht bald einem jedem Werke unerlässlich und machen Neubearbeitungen wünschenswerth, sobald die Gunst des kaufenden Publikums solche ermöglicht. Herrn Villicus ist diese Möglichkeit zu theil geworden. Wir können die neue Auflage nicht mit der früheren von 1883 im Einzelnen vergleichen, um zu prüfen, welcherlei Aenderungen er traf, aber jedenfalls hat er die Zahl der möglichen Verbesserungen nicht erschöpft. Es sind sinnentstellende Druckfehler in Menge stehen geblieben, es sind auch andere Mängel vorhanden, welche vielfach darauf zurückzuführen sind, dass der Verfasser neuere und neueste Schriften zu wenig beachtet hat. Günther's Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter (1887), Unger's Methoden der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart (1888) scheinen für ihn nicht vorhanden gewesen zu sein, wenigstens haben wir deren Anführung oder deren Benutzung nicht bemerken können, aber auch die älteren Arbeiten von Treutlein sind nicht genügend verwerthet. Wir schliesen Solches nicht allein aus den mangelnden Berufungen auf diese Schriftsteller — von einem populären Buche verlangen wir keine erschöpfenden Citate — aber der Inhalt ihrer Forschungen ist nicht genügend berücksichtigt, und gerade von dem Verfasser einer populären Darstellung, dessen Lesern nicht die Beweisstücke für jede einzelne Behauptung geliefert werden, dürfen und müssen wir fordern, dass er auf dem Laufenden der neusten und zuverlässigsten Forschungen auf seinem Gebiete sei. Diese Ueberzeugung haben wir aber aus dem uns vorliegenden Büchlein keineswegs zu gewinnen vermocht.

Cantor.

Handbuch der angewandten Optik. Von Ad. Steinheil und Ernst Voit. 1. Band: Voraussetzung für die Berechnung optischer Systeme und Anwendung auf einfache und achromatische Linsen. Mit Figuren und 7 Tafeln. Leipzig 1891. Verlag von B. G. Teubner.

Das ganze Werk, von welchem jetzt der erste Band erschienen ist, soll drei Bände umfassen und ein Handbuch bilden für den praktisch arbeitenden Optiker, dass dieser Zweck so gut wie möglich erreicht wird, dafür spricht schon der Name Steinheil, dessen Firma sich auf dem Gebiet der praktischen Optik eines ausgezeichneten Rufes von Alters her zu erfreuen hat. Die Methoden zur Berechnung der optischen Systeme, welche die genannte Firma seit vielen Jahren als die besten erprobt hat,

sollen nunmehr veröffentlicht und daher zum Gemeingut werden. Um aber keinen einseitigen Charakter dem Werke zu geben und die Ergebnisse der rein theoretischen Optik, soweit sie für die Praxis nutzbringend sind, zu verwerthen, hat sich der Praktiker mit einem Mann der Wissenschaft zu der Herausgabe vereinigt. Die Anforderungen an mathematische Kenntnisse werden dadurch nicht erhöht, sondern bleiben auf die Elementarmathematik beschränkt. — Der erste Band, welcher gleichsam das wissenschaftliche Werkzeug für den Gebrauch der beiden folgenden Bände liefert, zerfällt in fünf Capitel, wovon das erste die Reflexion und Brechung des Lichtes behandelt mit specieller Berücksichtigung der Glassorten. Während das zweite Capitel sich ausschliesslich mit den Fundamentaleigenschaften eines dioptrischen Systems beschäftigt und die Construction der Bilder umfasst bei specieller Lage der Fundamentalpunkte, so sind in dem dritten Capitel die Anforderungen zasammengestellt, die an ein wirkliches Linsensystem zu stellen sind, unter Aufzählung der zu hebenden Fehler. Die beiden letzten umfangreicheren Capitel sind der wirklichen Berechnung gewidmet, und zwar zunächst der trigonometrischen Berechnung einer Linse mit eingehender Discussion ihrer Bildfehler, sodann derjenigen von achromatischen zweilinsigen Objectiven. Besonders hervorzuheben ist, dass wirkliche Berechnungen durchgeführt und tabellarisch zusammengestellt sind. Um den praktischen Nutzen des Werkes noch zu erhöhen, sind in der Beilage 1 die den verschiedenen Fällen entsprechenden Formeln übersichtlich geordnet. Die Beilagen 2 und 3 sind Abdrücke aus den Sitzungsberichten der bayrischen Academie der Wissenschaften, es sind die Arbeiten: Ueber die Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisses verschiedener Medien von C. A. v. Steinheil und L. v. Seidel, und Trigonometrische Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an centrirten sphärischen Flächen von L. v. Seidel. — Beilage 4 enthält die Unterschiede zwischen Sinus und Bogen von 10 zu 10 Secunden von 0^0 bis 30^0. — Liessen sich bei den folgenden Bänden die Berichtigungen am Schluss nicht vermeiden? — Druck und äussere Ausstattung machen der Verlagsfirma alle Ehre. — Es wäre zu wünschen, dass die beiden letzten Bände nicht zu lange auf sich warten lassen. Der zweite soll die Verwerthung der im ersten Band gewonnenen Resultate zur Berechnung optischer Constructionen enthalten, während der dritte Band die Prüfung des optischen Effectes an ausgeführten Instrumenten behandeln wird.

B. Nebel.

Dr. J. Frick's Physikalische Technik, specielle Anleitung zur Ausführung physikalischer Demonstrationen und zur Herstellung von physikalischen Demonstrations-Apparaten mit möglichst einfachen Mitteln. Von O. Lehmann. Sechste umgearbeitete und vermehrte Auflage. 1. Band mit 708 Holzstichen. 725 S. Braunschweig. Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 1890. Preis 15 Mk.

Frick's Physikalische Technik ist durch die neue Bearbeitung derart bereichert worden, dass eine Theilung des Stoffes in zwei Bände nöthig wurde. Auch die Eintheilung wurde wesentlich geändert. Der erste Theil des ersten Bandes hat die Behandlung der Apparate im Allgemeinen und die Anleitung zu einigen häufiger vorkommenden Arbeiten zum Gegenstande. Dabei bespricht der Verfasser die Ausstattung und Einrichtung der verschiedenen Räumlichkeiten eines physikalischen Instituts und geht auf die von ihm getroffenen Aenderungen an dem Institut der Karlsruher Technischen Hochschule näher ein. Das Capitel über das Reinigen, Repariren und Aufstellen der Apparate ist für die Lehrer an unseren Mittelschulen von ganz besonderer Wichtigkeit, da sie während ihrer Studienzeit meistens nicht die nöthige Zeit finden, sich damit gründlich vertraut zu machen. Der zweite Theil enthält die Anleitung zu einzelnen physikalischen Versuchen, die derartig eingetheilt sind, dass zuerst die Versuche über das Gleichgewicht der Kräfte bei festen, flüssigen und gasförmigen Körpern zur Erledigung kommen. Darauf folgen die Versuche über Wärme, woran sich dann das grosse Capitel über Dynamik und Thermorynamik anschliesst. — Viele der Abbildungen sind Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, 9. Auflage, bearbeitet von Pfaundler, entlehnt, um den Preis des vorliegenden Werkes herabzudrücken. Bei den Illustrationen, die aus den Catalogen von Mechanikern entnommen sind, wurde auch Firma und Preis des Apparates in Klammern beigefügt, um bei Neuanschaffungen auch in dieser Hinsicht zu orientiren. — Es ist sicher, dass diese erweiterte Auflage von Frick's Physikalischer Technik für den praktischen Theil des physikalischen Unterrichts von wesentlichem Nutzen sein wird.

B. Nebel.

Handbuch der Vermessungskunde. Von W. Jordan. 3. Band: Landes-Vermessung und Grundaufgaben der Erd-Messung. Dritte verbesserte und erweiterte Auflage. Stuttgart 1890. Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung. 549 S. und 48 S. Anhang.

Der Schluss des ganzen Werkes wird durch den vorliegenden dritten Band gebildet, der den interessantesten Theil der Vermessungskunde, nämlich die Landesvermessung und die Erdmessung, enthält. Nach einem geschichtlichen Ueberblick über Erdmessungen geht der Verfasser zur Triangulirung erster Ordnung über, wobei die technischen Hilfsmittel eingehend besprochen werden. Die Betrachtung des Erd-Ellipsoides bedingt neue mathematische Studien, so die sphärische Dreiecksberechnung, die sphärischen Coordinaten, und führt zu der sphäroidischen Geodäsie mit Normalschnitten und Krümmungshalbmessern. Die Theorie der geodätischen Linie wurde auf geometrischem Wege erheblich vereinfacht und somit die Theorie dieser Linie um einen weiteren für den Praktiker besonders wichtigen Beitrag vermehrt. Daran schliessen sich weitere mathematische

Theorien an, insbesondere die allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Den Anhang bilden eine Reihe wichtiger Hilfstafeln, die für den praktischen Gebrauch des Buches von ganz besonderem Werthe sind. Hervorzuheben sind ebenfalls die zahlreichen Literaturvermerke und die Hinweisung auf die Originalabhandlungen in speciellen Fällen. Ein solches Handbuch wird überall sich leicht Eingang verschaffen.

B. Nebel.

Grundriss der Festigkeitslehre. Zum Gebrauch an Handwerkerschulen, insbesondere Baugewerk- und Maschinenbauschulen, sowie zum Selbstunterricht bearbeitet von E. Glinzer. Mit 91 in den Text gedruckten Figuren und mehreren Tafeln, sowie mit zahlreichen Uebungsbeispielen und Aufgaben. Dresden 1890. Verlag von Gerhard Kühtmann. 123 S.

Dieser Grundriss der Festigkeitslehre ist ganz dem Bedürfniss der Schule für Bauhandwerker angepasst, an welcher der Verfasser den Unterricht auf diesem Gebiete seit einer Reihe von Jahren ertheilt. Die zahlreichen Beispiele und Tabellen tragen dazu bei, dass das Buch auch noch nach Absolvirung der Schule häufig zu Rathe gezogen wird.

B. Nebel.

Berichtigungstafel zur Umwandlung des mit der Lux'schen Gaswage gefundenen scheinbaren in das wirkliche specifische Gewicht; nebst einem Begleitwort. Von R. Mehmke. Ludwigshafen a. Rh. Verlag von Friedrich Lux.

Da sich die Aichung der Lux'schen Gaswage auf 15° Celsius und 760 mm Quecksilberdruck bezieht, so ist das bei t^0 Celsius und beim Quecksilberdruck gefundene specifische Gewicht δ_{bt} noch zu corrigiren, um das wirkliche specifische Gewicht δ zu erhalten. Um nun der öfteren Berechnung des specifischen Gewichts nach der Formel

$$\delta = 1 - \frac{1 - \delta_{bt}}{\frac{283}{273+t} \cdot \frac{b}{760}}$$

enthoben zu werden, sollte ein Hilfsmittel geschaffen werden, um ebenso schnell und leicht das wirkliche specifische Gewicht zu finden. Dass an eine Berechnung von Hilfstabellen nicht gedacht werden konnte, zeigt schon die nähere Betrachtung der Formel. Verfasser hat daher graphische Tabellen entworfen nach Art der Rechenschieber, wonach man auf der einen Theilung eine durch die Beobachtungsdaten gegebene Strecke mit dem Zirkel abgreift und dieselbe nun in bestimmter Weise in einer weiteren Theilung bei dem gefundenen specifischen Gewicht abträgt, so dass der andere Endpunkt der Strecke das wirkliche specifische Gewicht abzulesen gestattet. Die Theilung wurde mit der grössten Vorsicht auf Stein aus-

geführt, und sodann durch ein Trockendruck-Verfahren vervielfältigt, um die sonst unvermeidlichen Längenänderungen zu umgehen. Die Herstellung dieser Berichtigungstafel ist für den häufigen Gebrauch der Lux'schen Gaswage von grossem Vortheil und wird daher von allen Betheiligten auf's Lebhafteste begrüsst werden. B. Nebel.

Handbuch für Spectroscopiker im Cabinet und am Fernrohr. Praktische Winke für Anfänger auf dem Gebiete der Spectralanalyse. Von N. von Konkoly. 335 Holzschnitte. 568 Seiten. Halle a. S. 1890. Verlag von Wilhelm Knapp. Preis 18 Mk.

Ein merkwürdiges Buch! — Aehnlich mag auch der Verfasser selbst gedacht haben, da er nach eigener Aussage wenig Muth hatte, das Werk zu Stande zu bringen. Nach dem Vorwort ist nämlich das Buch für Anfänger in der Spectralanalyse oder Mittelschullehrer aus der Provinz, die mit weniger Mitteln dotirt sind, als z. B. die Laboratorien von Hochschulen, bestimmt, während der Inhalt eine Reihe von Instrumenten umfasst, wie sie, der grossen Kosten wegen, nur auf den Sternwarten oder verwandten Instituten zu finden sind. Dann sind wieder Dinge beschrieben, die der Betreffende schon aus der Physik wissen sollte. Wirkliche Fortschritte sind manchmal ganz übersehen, wie z. B. die Gülcher'sche Thermosäule, die Verbesserung der Leclanché-Elemente u. s. w.

Die Illustrationen erinnern nur zu oft an die Preisverzeichnisse von Krüss, Hartmann und Braun, Schmidt und Hänsch (Linnemann). Der wiederholt vorkommende Name „Mayerstein" statt „Meyerstein" dürfte nicht unter die zahlreichen Druckfehler gerechnet werden. Abbildungen, wie z. B. Fig. 83, S. 127, Observatorium mit Siderostat, haben in einem derartigen Werke gar keinen Nutzen. — Die Schreibweise dürfte vielfach kürzer sein. — Für welche Sorte Menschen der Verfasser das Buch sozusagen auf den Leib geschnitten hat, lässt sich bei Berücksichtigung der deutschen Schulverhältnisse nicht sagen. B. Nebel.

Der Betrieb und die Schaltungen der elektrischen Telegraphen. Von Zetzsche. Bearbeitet unter Mitwirkung von mehreren Fachmännern. Zugleich als zweite Hälfte des 3. Bandes des Handbuchs der elektrischen Telegraphie. Heft 2. Dritte Abtheilung: Die Einrichtungen und Schaltungen für die mehrfache Telegraphie, bearbeitet von A. Tobler und E. Zetzsche. Mit 89 in den Text gedruckten Abbildungen. 1575. Halle a. S. 1890. Verlag von W. Knapp.

Das vorliegende Heft enthält das ungemein reiche Capitel der verschiedensten Einrichtungen und Schaltungen für die mehrfache Telegraphie. Was bei der Besprechung des ersten Heftes gesagt wurde, wird auch von dem zweiten Hefte im vollen Umfange bestätigt. B. Nebel.

Lehrbuch der Vermessungskunde. Von Anton Baule. Mit 244 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1890. Verlag von B. G. Teubner. 404 Seiten.

Dieses Lehrbuch der niederen Geodäsie soll in knapper Form nur Dasjenige, was für den Landmesser, Techniker, Forstmann, Militär zur Ausführung von Vermessungen nothwendig ist, bieten. Zu diesem Zweck war es eine Hauptaufgabe des Verfassers, aus dem reichlich vorhandenen Stoff geschickt auszuwählen und das Gewählte einheitlich zu verarbeiten. Bei der Anordnung des Stoffes hat sich der Verfasser derjenigen von Bauernfeind angeschlossen. Geeignete Zahlenbeispiele zeigen, wie die vorgetragenen Messmethoden anzuwenden sind. Das Buch darf den oben genannten Kreisen bestens empfohlen werden.

B. Nebel.

Uebersichtliche Darstellung der mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichtes. Von Breuer. I. Theil. Normale Dispersion. Mit einer Figurentafel. Hannover 1890. 55 Seiten. Preis 1 Mk.

Verfasser beabsichtigt durch die übersichtliche Darstellung der mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichtes einmal eine Form zu geben, in welcher man den geistigen Inhalt der Originalarbeiten der bekanntesten Forscher den Lehrbüchern über theoretische Physik einverleiben könnte, sodann diese Forschungen, deren Studium in den Quellenwerken oft mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist, einem weiteren Kreise zugänglich zu machen, damit dadurch die Ideen Anderer befruchtet, und somit neue Fortschritte erzielt werden. Durch diese Arbeit wird sich der Verfasser den Dank Vieler erwerben.

B. Nebel.

Zur Reformation der Musik. Kurze Broschüre zur weiteren Bekräftigung der neuen Ton-Theorie. Von Ch. A. B. Huth. 8 Seiten. Preis 30 Pf. Selbstverlag des Verfassers (Hamburg. I. Vorsetzen 15/17) und:

Offener Brief an alle Mathematiker. Von Ch. A. B. Huth. 4 Seiten. Preis 25 Pf. Selbstverlag des Verfassers (Hamburg. I. Vorsetzen 15/17).

Der von dem Verfasser aufgestellten neuen Ton-Theorie liegt die Anlegung des sogenannten goldenen Schnitts als Maasstab für die Tonleiter zu Grunde. Es ist dies eine ganz geniale Idee, jedoch dürfen wir auf dieselbe nur vom wissenschaftlichen Standpunkte unser Interesse lenken. Erst wenn dieselbe, an musikalischen Instrumenten durchgeführt, auch die praktische akustische Probe bestanden hat, kann an eine allgemeine Einführung gedacht werden. Im Interesse des Verfassers liegt es demnach, die Praxis zur weiteren Prüfung der Theorie heranzuziehen.

B. Nebel.

Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. Von E. Budde. I. Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. 1890. 418 Seiten. Preis 10 Mk. — II. Band: Mechanische Summen und starre Gebilde. 550 Seiten. Preis 13 Mk. 1891. Berlin, Verlag von Georg Reimer.

Verfasser ist von dem gewöhnlichen Brauche, die Mechanik darzustellen, abgewichen, indem er die Eintheilung nicht nach Principien durchführte, sondern nach den zu behandelnden Objecten. Dadurch ist es ihm ermöglicht, vom Leichteren zum Schwereren aufzusteigen, was für den Lernenden von ganz besonderem Werthe ist. Dabei ordnen sich die betreffenden Sätze wie von selbst ein, so dass deren Anwendung bei entsprechenden Problemen dadurch wesentlich Vorschub geleistet ist. Der Verfasser hat es somit verstanden, dem Studirenden den Weg zwischen Theorie und Praxis zu ebnen, was leider so selten zutrifft. — Den Ausgang bildet die Bewegung eines einzelnen Punktes, ihr folgen diejenigen von zwei und mehreren Punkten. Letztere führen zu den starren Körpern, den deformirbaren Linien, Flächen und Körpern. Beispiele sind nur in bescheidener Menge eingestreut, so dass die vorhandenen Aufgabensammlungen keineswegs überflüssig erscheinen. — Durch die klare Darstellung wird das Buch sich sicherlich eine grosse Zahl von Freunden erwerben.

B. Nebel.

A Treatise on analytical statics with numerous examples. On Routh. Volume 1. Cambridge, at the University Press 1891. 407 Seiten.

Das vorliegende Werk ist den Vorlesungen des Verfassers entsprungen, die theilweise hier noch Ergänzungen erfahren haben. Um die Darstellungsweise nicht allzusehr kürzen zu müssen, sind nun einzelne Abschnitte zurückgestellt, die in einem zweiten Bande vereinigt werden sollen. Verfasser legt grossen Werth darauf, dass der Studirende das Vorgetragene sofort an zahlreichen Beispielen einübe, weshalb er dieselben, durch kleineren Druck kenntlich gemacht, sofort einstreute. Einzelne der Aufgaben haben den Herausgeber zum Verfasser, weitaus die meisten aber sind Prüfungsaufgaben, wie sie an der Universität Cambridge gestellt worden sind. — Die ganze Anordnung ist sehr sauber und übersichtlich durchgeführt, so dass die Orientirung sehr erleichtert wird.

B. Nebel.

Maxima, Minima und Oeconomie. Inaugural-Dissertation, vorgelegt der philosophischen Facultät der Universität Göttingen. Von Petzoldt. Sonderabdruck aus der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie. Altenburg 1891. In Commission der Schnuphase-schen Hofbuchhandlung (Max Lippold). 78 Seiten.

Der Inhalt, welcher rein philosophischer Natur ist, wird in fünf Theile gegliedert: mechanische Minimumprincipien, Oeconomieprincipien der Ent-

wickelung, der Stabilitätsbegriff auf rein geistigem Gebiet im Allgemeinen und der Stabilitätsbegriff für Ethik und Aesthetik. Der Verfasser spricht das Resultat seiner Untersuchungen in dem Schlusssatz aus: „Nicht Maxima, Minima und Oeconomie, sondern Eindeutigkeit und Stabilität heben die Seiten der Wirklichkeit hervor, die für uns im Vordergrunde des Interesses stehen müssen."

B. Nebel.

Die Photographie im Dienste des Ingenieurs. Ein Lehrbuch der Photogrammetrie. Von Fr. Steiner. 1. Lieferung mit 25 Textfiguren und zwei Tafeln. Wien 1891. R. Lechner's Buchhandlung (Wilhelm Müller). 56 Seiten.

Verfasser wird sich durch Herausgabe dieses Lehrbuchs der Photogrammetrie allerseits viele Freunde erwerben. Bisher fehlte es den Amateuren an einfachen Methoden, um die photographischen Aufnahmen kartographisch verwenden zu können; dabei sei insbesondere der Officiere gedacht, die durch Aufnahme unzugänglicher Festungswerke in den Stand gesetzt werden, sich hierüber zu orientiren. Welchen Nutzen das Buch dem Geodäten und Ingenieur, namentlich bei Reiseaufnahmen, bietet, darauf hinzuweisen dürfte überflüssig sein. — Die erste der drei Lieferungen, welche nunmehr vorliegt, umfasst die grundlegenden Principien und allgemeinen geometrischen Verfahrungsweisen der Photogrammetrie. Die zweite soll das photographische Objectiv und die Photogrammeter behandeln, während die dritte, den Schluss bildende Lieferung die praktischen Durchführungsarbeiten und eine geschichtliche Uebersicht über dieses Grenzgebiet der Photographie, darstellenden Geometrie und Geodäsie enthalten wird. — Von grossem Werthe wird es sein, wenn die beiden noch ausstehenden Lieferungen möglichst rasch erscheinen.

B. Nebel.

Ueber das Galilei'sche Princip. Von Leonhard Weber. Kiel 1891. Verlag der Haeseler'schen Buchhandlung (Eckardt & Breymann). 40 Seiten.

Verfasser sucht die Newton'sche Fassung des zuerst von Galilei ausgesprochenen Trägheitsprincips durch eine neue Formulirung einwandsfrei zu machen. Zu diesem Zweck werden in dem ersten Abschnitt diejenigen Beobachtungselemente und Denkoperationen, welche der Aufstellung des Trägheitsprincips zu Grunde liegen, der Analyse unterworfen, während der zweite Abschnitt lediglich der Formulirung des Princips gewidmet ist.

B. Nebel.

Die Hydraulik auf neuen Grundlagen. Von Scheffler. Leipzig 1891. Verlag von Friedrich Förster. 225 Seiten.

Nach einem kleineren Capitel über Gleitungswiderstände folgt das weitaus grösste über die hydraulischen Grundgesetze, daran schliessen sich

die Capitel über das Princip des kleinsten Widerstandes und über das Princip des grössten Effectes an. Das Schlusscapitel enthält die Anwendungen auf die Hydraulik. Statt der Hypothese der Bewegung in parallelen Schichten legt der Verfasser seiner neuen Theorie das Fliessen in Stromfäden zu Grunde und kommt natürlich zum Theil zu ganz anderen Resultaten, die er in einem Rückblick am Schluss des Buches den bisherigen gegenüberstellt. B. Nebel.

Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Von Fr. Pockels. Mit einem Vorwort von F. Klein. Leipzig, B. G. Teubner 1891. 339 S. 8 Mk.

Die bisherigen Untersuchungen im Gebiete der mathematischen Physik rechtfertigen die Aufstellung des Postulats, dass es gelingen müsse, alle Resultate der Physik als Folgerungen von allgemeinen Sätzen der Analysis, denen noch die physikalischen Bedingungsgleichungen beizufügen sind, darzustellen. So lassen sich zwei Classen mechanischer Probleme, die mit dem Jacobi'schen Rotationsproblem und dem Problem der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit zusammenhängen und in den Anwendungen der elliptischen bezw. hyperelliptischen Functionen auf die Mechanik auftreten, je auf dasselbe System von Differentialgleichungen zurückführen. Wie Herr Caspary gezeigt hat (vergl. Comptes rendus 1891), lassen sich diese Probleme vollständig lösen durch die „Elemente eines Orthogonalsystems", ausgedrückt mit Hülfe der Jacobi'schen Theta- oder den Weierstrass'schen Sigmafunctionen, wenn man noch die willkürlichen Argumente und eine willkürlich gebliebene Function vermittelst der durch das vorgelegte Problem gegebenen Constanten bestimmt. (Vergl. auch Bulletin d. S. M. t. 13.)

Bei einer anderen ausgedehnten Classe mechanischer Probleme ist man noch nicht zu einem so einfachen Resultat gelangt, dazu gehören die Probleme der schwingenden Saite, der transversalen Schwingungen einer gespannten Membran, der freien Schwingungen dünner Luftschichten, der Schwingungen elastischer fester Körper, der transversalen Schwingungen elastischer Platten, der Wärmeleitung in isotropen und crystallinischen Körpern und verwandte. Die Probleme dieser Classe verlangen die Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 f(x, y, z)\, u = 0,$$

wo k reell und imaginär sein kann und f eine beliebige Function der unabhängigen Variablen bezeichnet. Die mathematischen Untersuchungen, welche über diese Differentialgleichung vorliegen, lassen noch viele wichtige Fragen offen, einmal wegen der Schwierigkeit des Gegenstandes und dann auch, weil der specielle Fall

$$\Delta u = 0$$

noch fast vollständig das Interesse der mathematischen Physiker in Anspruch nimmt. Von hohem Werthe muss unter diesen Umständen eine Arbeit erscheinen, die, ähnlich der Bacharach'schen im Gebiete der Potentialtheorie, eine einheitliche Darstellung der auf die genannte Differentialgleichung bezüglichen Untersuchungen liefert, eine Darstellung, welche die bestehenden Lücken und die noch zu überwindenden Schwierigkeiten klar zu Tage treten lässt. Bei dem gegenwärtigen Stande dieser Untersuchungen empfiehlt es sich, die physikalische Erfahrung als leitenden Gesichtspunkt aufzustellen, denn die mathematischen Beweise für die Sätze, welche über die Lösungen der genannten Differentialgleichung aufgestellt worden sind, müssen in den meisten Fällen noch erbracht werden.

Wir geben eine kurze Uebersicht des mit grossem Fleiss und Geschick gesammelten Materials, welches eine Reihe noch wenig bekannter, von Herrn Klein herrührender Untersuchungen, sowie an einzelnen Stellen eigene Entwickelungen des Verfassers bringt.

Auf ein einleitendes Capitel über das Vorkommen der Differentialgleichung, wobei auf die bezüglichen Arbeiten von Sturm, Liouville, P. du Bois-Reymond und der Herren H. A. Schwarz, Bianchi und Picard eingegangen wird, lässt der Verfasser zunächst die Betrachtung der „ausgezeichneten" Lösungen, welche sich bei den wichtigsten physikalischen Problemen darbieten, folgen. Man überzeugt sich nämlich leicht, dass es nur ganz bestimmte Werthe von k^2 giebt, für die eine reguläre Lösung der Differentialgleichung auftreten kann. Diese speciellen Werthe von k^2 nennt der Verfasser die ausgezeichneten Werthe, die ihnen entsprechenden Lösungen u ausgezeichnete Lösungen. Die Kenntniss dieser ausgezeichneten Lösungen ist für die später folgende Untersuchung allgemeiner Integrale der Differentialgleichung erforderlich. Man kann nun durch eine Art von Grenzübergang, das schon J. und D. Bernouilli und Lagrange bekannte, neuerdings wieder von englischen Physikern in Anwendung gebrachte „Rayleigh'sche Princip", zu dem Existenztheorem gelangen, wie der Verfasser nachweist; dies ist indessen nicht als wirklicher Existenzbeweis anzusehen, so lange nicht, wie der Verfasser gleichfalls hervorhebt, die Zulassung des Grenzübergangs zu $n = \infty$ streng bewiesen ist. Dabei wird durch Einführung von Normalcoordinaten nach dem Vorgange englischer Physiker (Routh, Rayleigh) ein Zusammenhang mit dem Problem der simultanen Transformation zweier quadratischen Formen gewonnen.

Es sind eine Reihe lösbarer Specialfälle bekannt, wo es gelungen ist, sämmtliche „Normalfunctionen" wirklich herzustellen. Es handelt sich dabei ausschliesslich um ausgezeichnete Lösungen der einfachen Differentialgleichung

$$\varDelta u + k^2 u = 0$$

und solcher Gleichungen, welche durch Einführung anderer orthogonaler Coordinaten aus derselben hervorgehen. So werden die Fälle des Rechtecks und rechtwinkligen Parallelepipedons, wo die Normalfunctionen trigonometrisch sind, die Fälle der Kreis- und Kugelfläche, der Vollkugel und Kugelschale, wo Bessel'sche und Kugelfunctionen zur Anwendung kommen, behandelt, ferner die Gebiete in der Ebene und auf der Kugel, welche von ebenen bezw. sphärischen confocalen Kegelschnitten begrenzt werden, wobei die bezüglichen Arbeiten von H. Weber, Mathieu, Heine, Lindemann, Bruns, Klein, Callandreau, Hartenstein, Baer Erwähnung finden, während Referent vergebens nach den Namen Wangerin (Ueber die Reduction der Gleichung $\varDelta V = 0$ auf gewöhnliche Differentialgleichungen) und Haentzschel (Beiträge zur Theorie der Functionen des elliptischen Cylinders) gesucht hat. Ausser den genannten Bereichen werden noch solche erörtert, welche aliquote Theile schon behandelter sind (Lamé, Rayleigh, Routh, Klein). Auch auf den von Herrn Mathieu in Angriff genommenen Fall eines von zwei excentrischen Kreisen oder von zwei confocalen Cassini'schen Curven begrenzten Bereiches wird hingewiesen.

Während die Auffindung sämmtlicher ausgezeichneten Lösungen bisher nur für eine Anzahl von Specialfällen gelungen ist, besitzt man ein Verfahren, das gestattet, für einen beliebigen ebenen Bereich diejenige ausgezeichnete Lösung der Differentialgleichung

$$\varDelta u + k^2 u = 0$$

zu finden, welche innerhalb des Bereiches nirgends verschwindet, d. i. dem kleinsten ausgezeichneten Werthe von k^2 entspricht. Dieses von Herrn H. A. Schwarz herrührende Verfahren liefert auch den eben bezeichneten Werth von k^2, sowie die entsprechende Lösung der obigen in krummlinige Coordinaten transformirten Differentialgleichung für irgend welche Bereiche auf krummen Flächen. Dagegen fehlt immer noch der Existenzbeweis für die höheren ausgezeichneten Lösungen. Andererseits stösst die wirkliche Herstellung der Lösungen nach der Schwarz'schen Methode in den meisten Fällen auf unüberwindbare Hindernisse, da sie die Bestimmung einer unendlichen Reihe von Functionen voraussetzt, die durch complicirte Doppelintegrale gegeben sind. Hiernach geht der Verfasser noch auf die Abhängigkeit der ausgezeichneten Werthe k^2 von der Dimension und der Gestalt des Bereiches, sowie von den Constanten der Grenzbedingung ein. (Rayleigh, Poincaré.)

Ein dritter Theil enthält allgemeine Sätze über die Functionen, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\varDelta u + k^2 u = 0$$

genügen, ohne Berücksichtigung besonderer Grenzbedingungen. Diese Sätze verallgemeinern die entsprechenden, welche in der Potentialtheorie auf-

gestellt worden sind. Dabei stellt sich in dem Verhalten im Unendlichen ein wesentlicher Unterschied zwischen den Lösungen der genannten Differentialgleichung und den Potentialfunctionen heraus, im Gegensatz zu dem übereinstimmenden Verhalten an singulären Stellen im Endlichen. In der That, es werde untersucht, wie sich die betrachteten Functionen bezw. die zugehörigen Differentialgleichungen bei der Inversion verhalten. Durch eine Betrachtungsweise, die von Herrn Darboux herrührt und die Herr Klein in seinen Vorlesungen (durch Einführung polysphärischer Coordinaten) verallgemeinert hat, zeigt sich, dass für die Potentialfunctionen das unendlich Weite keine wesentlich ausgezeichnete Rolle spielt: Zerlegt man nämlich ein Potential des Raumes von n Dimensionen unter Anwendung polysphärischer homogener Coordinaten durch Abtrennung eines algebraischen Factors, so bleibt eine von Herrn Klein Potentialform genannte Function zurück, die ihren Charakter bei allen Inversionen des R_n behält. Anders bei den Functionen u; hier bewahrt der entsprechende Factor bei einer Inversion seinen Character nicht, folglich ist der unendlich ferne Punkt ein singulärer Punkt der zugehörigen Differentialgleichung. Dieses Ergebniss ist von weittragender Bedeutung. In der Potentialtheorie ist man gewöhnt, dass Sätze, die für ganz im Endlichen liegende Bereiche hergeleitet sind, auch für Gebiete, die sich in's Unendliche erstrecken, entweder direct oder doch nach geringer Modification noch Giltigkeit behalten; hier ist indessen eine solche Uebertragung nicht mehr zu erwarten. Auf Grund des Green'schen Satzes ergiebt sich sodann (nach v. Helmholtz, Weber, Mathieu, Poincaré) eine Darstellung von u durch ein Rand- bezw. Oberflächenintegral. Ein weiteres Analogon zur Potentialtheorie ist das Analogon zum Gauss'schen Mittelwerthsatze. Dabei tritt ein anderer wesentlicher Unterschied der Functionen u gegenüber den Potentialfunctionen und eine klare Analogie zu den periodischen Functionen zu Tage.

Den Abschluss bildet die Darlegung allgemeiner Integrationsmethoden, die Bestimmung der Functionen u aus gegebenen Randwerthen und verwandten Bedingungen. War der dritte Theil von mehr mathematischem Interesse, so tritt hier die physikalische Erfahrung bezw. die physikalische Evidenz als Leitprincip wieder in den Vordergrund. Nachdem die physikalischen Probleme aufgezählt worden sind, welche auf die drei Randwerthaufgaben hinführen, folgt ein Excurs über die entsprechenden Randwerthaufgaben in der Potentialtheorie, wo zunächst das Dirichlet'sche Princip in seiner Bedeutung als Existenzbeweis beleuchtet wird. Sodann bespricht der Verfasser die Methoden, welche man zur wirklichen Herstellung der Lösungen angewendet hat:

1. Die Methode der Green'schen Functionen, mit deren Hilfe F. Neumann und Herr F. Klein die Lösung der drei Randwerthaufgaben gegeben haben. Dabei treten eine erste, zweite und dritte Green'sche Function auf, deren Existenz vom physikalischen Standpunkte aus als sicher gestellt gelten darf.

2. Die Combinationsmethode von Herrn C. Neumann, welche im Princip mit dem gleichzeitig von Herrn H. A. Schwarz aufgefundenen Verfahren übereinstimmt. Mittelst dieser Methode kann man, wenn die (erste) Randwerthaufgabe für specielle Bereiche gelöst ist, die Lösung auch für solche Bereiche herstellen, die aus jenen so zusammengesetzt sind, dass dieselben theilweise über einander greifen.

3. Die Methode des arithmetischen Mittels von Herrn C. Neumann, das ist ein Verfahren, welches die Lösung der ersten Randwerthaufgabe direct für gewisse sehr allgemeine, ebene oder räumliche Bereiche liefert. Diesem verwandt ist ein neuerdings von Herrn Poincaré angegebenes Verfahren. Während aber Herr C. Neumann die Randwerthe einer auf bestimmte Weise gebildeten Lösung von $\Delta V = 0$ successive corrigirt, bis sie in die gegebenen übergehen, wählt Herr Poincaré eine Function, welche bereits die vorgeschriebenen Randwerthe besitzt, doch nicht der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügt, und bringt nun durch ein Approximationsverfahren den zweiten Differentialparameter jener Function successive im ganzen Bereiche zum Verschwinden.

4. Die Methode der Reihenentwicklungen, welche Herr F. Klein zur Lösung der Randwerthaufgaben für einen Bereich angewendet hat, der von sechs confocalen Flächen zweiten Grades oder noch allgemeiner von sechs confocalen Cycliden begrenzt ist.

Analoge Methoden sind für die Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

noch nicht aufgestellt worden, wenn man von einem Falle absieht. Das oben erörterte Approximationsverfahren von Herrn H. A. Schwarz, welches zur Bestimmung des kleinsten ausgezeichneten Werthes von k^2 und der zugehörigen Lösung u dient, lässt sich nämlich auch zur Bestimmung von u aus gegebenen Randwerthen anwenden. Indessen hat diese Methode nur für ebene Bereiche und auch da nur unter gewissen Beschränkungen Giltigkeit. Entsprechend der vorhin erwähnten Methode 1. aus der Potentialtheorie sind die Randwerthaufgaben für die Functionen u von Herrn F. Klein mit Hilfe verallgemeinerter Green'scher Functionen gelöst worden, wobei die Existenz dieser Functionen wieder durch physikalische Erwägungen begründet wird. Der Verfasser geht noch auf die Unbestimmtheit der Randwerthaufgaben für Gebiete ein, die sich ins Unendliche erstrecken, und beweist ferner, in Analogie mit der Potentialtheorie, den Satz, wonach man das Geschwindigkeitspotential u beliebiger Erregungspunkte, die innerhalb einer geschlossenen Fläche liegen, für den Aussenraum durch das von einer einfachen oder Doppel-Belegung jener Fläche mit Erregungspunkten ausgehende Geschwindigkeitspotential ersetzen kann, während es dahingestellt bleibt, ob es möglich ist, einen Erregungspunkt bezüglich seiner Wirkung im Innern einer geschlossenen Fläche oder Curve, die ihn nicht umschliesst,

durch eine einfache oder Doppelbelegung jenes Gebildes zu ersetzen. Aus diesem Grunde können auch, wie der Verfasser nachweisst, die Sätze, welche Herr Mathieu über die Darstellbarkeit jeder beliebigen, innerhalb einer geschlossenen Fläche bezw. Curve endlichen und stetigen Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ aufgestellt hat, in ihrer allgemeinen Fassung nicht richtig sein (vergl. E. Mathieu, Theorie des Potentials. Deutsch von H. Maser. Berlin 1890. Cap. 3, § 9 — 12 — sowie meine Besprechung dieses Werkes im 35. Bande dieser Zeitschrift, Seite 214, 215).

E. Jahnke.

Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3$.
Inaugural-Dissertation von R. Güntsche. Jena 1891.

Laguerre und Brioschi haben zuerst auf eine Classe von Differentialgleichungen aufmerksam gemacht, die bei einer Veränderung der abhängigen und unabhängigen Variablen ihre Form bewahren. Bei dieser Substitution bleiben auch gewisse Functionen der Coefficienten der Differentialgleichung und ihrer Ableitungen unverändert, welche Laguerre die Invarianten der Differentialgleichung genannt hat. Die Bedeutung dieser Invarianten für die Integration der zugehörigen Differentialgleichung ist ausführlich von Halphen dargelegt worden, welchem es durch Benutzung des Invariantenbegriffs gelang, eine Classe linearer Differentialgleichungen auf integrable Formen zu reduciren. Weitere Classen von Differentialgleichungen hat Herr Appell in Bezug auf ihre Invarianten und Integrabilität eingehend studirt, wobei sich die schon früher von Herrn Roger Liouville gewonnenen Resultate durch Specialisirung ergaben. Der Liouville'sche Specialfall bildet auch den Gegenstand der vorliegenden Inauguraldissertation. (Vergl. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces.)

Zunächst wird unter Benutzung analoger Untersuchungen von Herrn Elliot für den Fall constanter Coefficienten p, wo die Invarianten einfache charakteristische Formen haben, die Integralgleichung in der Form

$$\prod_{i=1}^{3} (A_i + y)^{h_i} = cB$$

aufgestellt, dabei bedeutet B eine Function von z und die A_i, h_i, c Constanten. Der Herr Verfasser hat nun den glücklichen Gedanken gehabt, auch die A_i als Functionen von z vorauszusetzen und das umgekehrte Problem zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die so definirte Function y dann noch einer Differentialgleichung der betrachteten Form genügt. In dem besonderen Falle

$$\sum_{i=1}^{3} h_i A_i = 0$$

überzeugt man sich leicht, dass die zugehörige Differentialgleichung unter einer gewissen Annahme auf den Fall constanter Coefficienten reducirt werden kann. Wird die Integralgleichung

$$\prod_{i=1}^{4} [A_i(z) + y]^{h_i} = cB(z)$$

zu Grunde gelegt, so stellt der Herr Verfasser wieder unter der nicht ausgesprochenen Bedingung

$$\sum_{i=1}^{4} h_i A_i = 0$$

bei gewissen Annahmen die zugehörige Differentialgleichung auf, deren Coefficienten und Invarianten bei besonderen Werthen der Exponenten h_i in besonders ansprechender Form dargestellt werden. Als Bedingungsgleichung tritt (wie auch im allgemeinen Falle) $\sum_i h_i = 0$ auf.

Wie der Herr Verfasser die Güte hatte, mir mitzutheilen, steht er im Begriff, seine Untersuchungen, die sich auf den allgemeinen Fall $i = 3, 4$ beziehen, zu veröffentlichen.

E. Jahnke.

Grössen und Zahlen. Rede von Prof. Dr. O. Stolz. Leipzig 1891.

In neuerer Zeit haben es sich die ersten Mathematiker angelegen sein lassen, eine neue und eingehende Prüfung der Grundbegriffe der Mathematik gegenüber einer beinahe zweihundertjährigen Praxis vorzunehmen. So haben die Herren Weierstrass, Dedekind, G. Cantor neue Theorien der irrationalen Zahlen aufgestellt; zu einer anderen Ansicht ist Herr Kronecker gelangt, welcher die irrationalen und imaginären Zahlen aus der Analysis ganz entfernt und in die Geometrie und Mechanik verwiesen wissen will; und auch sonst bemerken wir in Abhandlungen wie in Lehrbüchern das Bestreben, die Fundamente der Mathematik mit bisher nicht geübter Schärfe zu fixiren. Die vorliegende, an der Universität Innsbruck bei Gelelegenheit der feierlichen Kundmachung der gelösten Preisaufgaben gehaltene Rede führt uns die Elemente der mathematischen Darstellung in vergleichender, auch weiteren Kreisen verständlicher Betrachtung vor. Es werden die Grössenarten der Alten beleuchtet, die Verdienste von Descartes, Fermat und Stifel um Einführung der negativen und irrationalen Zahlen hervorgehoben und die Missverständnisse und Widersprüche kurz geschildert, von denen die Geschichte der neuen, von Leibniz und Newton erfundenen Wissenschaft zu erzählen weiss. Dann folgt eine längere Betrachtung der von Gauss complex genannten Zahlen. Zum Schluss finden die von Hamilton eingeführten Quaternionen eingehende Besprechung, wo auch auf die von Herrn Frobenius gegebene Darlegung verwiesen wird. Dagegen vermisst Referent einen Hinweis auf die Bedeutung Grassmann's, auf die Stellung der Quaternionen in der Ausdehnungslehre. Mathematiker der verschiedensten Nationen haben an die Grassmann'schen Untersuchungen angeknüpft (vergl. W. Gibbs, An address etc., Proc. Amer. Assoc., V. 35). In neuerer Zeit hat auf derselben

Grundlage Herr Caspary eine allgemeine Methode aufgebaut, die zur Lösung zweier vielumworbenen Probleme geführt hat (1. Caspary, Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiten Grades, die durch sieben gegebene Punkte gehen, Crelle's J. B. 99; 2. Caspary, Sur les deux formes sous lesquelles s'expriment, au moyen des fonctions thêta de deux arguments, les coordonnées de la surface du quatrième degré, décrite par les sommets des cônes du second ordre qui passent par six points donnés, C. R. juin 1891).

E. Jahnke.

Bibliographie

vom 1. bis 30. Juni 1892.

Periodische Schriften.

Physikalische Abhandlungen der k. preuss. Akademie der Wissenschaften Aus dem Jahre 1891. Berlin, G. Reimer. 27 Mk.

Geschichte der Mathematik.

Brückner, M., Das Ottajano'sche Problem. Leipzig, Focke. 1 Mk.

Reine Mathematik.

Weierstrass, K., Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, herausgeg. v. H. Schwarz. Berlin, Springer. 10 Mk.

Rosenow, H., Die Normalformen für die 472 verschiedenen Typen eigentlicher bilinearer Formen von 10 Variabelenpaaren bei congruenter Transformation der Variabelen. Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Weltzien, C., Ueber die Bedingungen, unter denen eine ganze rationale Function von mehreren Veränderlichen die vollständige Potenz einer anderen darstellt. Ebendas. 1 Mk.

Breuer, A., Ueber Conographie. Ein Beitrag zur construct. Geometrie. Erfurt, Bacmeister. 1 Mk.

—— Die goniometrischen Functionen complexer Winkel. Ebendas. 1 Mk.

—— Imaginäre Kegelschnitte. Ebendas. 1 Mk.

—— Die Logarithmen complexer Zahlen in geometrischer Darstellung. 50 Pf.

—— Die einfachste Lösung des Tactionsproblems. Eine Anwendung der neuen Theorie des Imaginären. Ebendas. 1 Mk. 50 Pf.

Panzerbieter, W., Ueber einige Lösungen des Trisectionsproblems mittelst fester Kegelschnitte. Progr. Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Peveling, J., Das System confocaler Parabeln, die eine Strecke harmonisch theilen. Tübingen, Fues. 80 Pf.

Heun, K., Untersuchungen über die Gauss'sche Quadraturmethode. Progr. Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Heyden, R., Elementare Einführung in die Lehre von den harmonischen Bewegungen. Ebendas. 1 Mk.

Angewandte Mathematik.

Auszug aus den Nivellements der trigonometrischen Abtheilung der preuss. Landesaufnahme. 2. u. 4. Heft mit Nachträgen. Berlin, Mittler & S. 5 Mk. 70 Pf.

Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureaus, ausgeführt unter Th. v. Oppolzer, herausgeg. von E. Weiss und R. Schram. 3. Bd. Längen-Bestimmungen. Prag, Tempsky. (Leipzig, Freytag.) 16 Mk.

Physik und Meteorologie.

Poincaré, H., Elektricität und Optik. Vorlesungen, übers. v. W. Jaeger und E. Gumlich. 2. Bd. Die Theorien von Ampère und Weber. Die Theorie von Helmholtz und die Versuche von Hertz. Berlin, Springer. 7 Mk.

Götz, H., Lehrbuch d. Physik f. Realschulen. München, Franz. 3 Mk. 60 Pf.

Bertram, A., Physikalisches Praktikum. Berlin, Nicolai. 1 Mk. 50 Pf.

Müller, M., Das räumliche Wirken und Wesen von Elektricität und Magnetismus. Hannover-Linden. Manz & Lange. 3 Mk. 50 Pf.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1891.

Erste Hälfte: 1. Jannar bis 30. Juni.

A.

Abbildung.

1. Remarques sur la théorie de la représentation conforme. E. Phragmén. Acta math. XIV, 225.
2. Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. D. Hilbert. Mathem. Annal. XXXVIII, 459.
3. Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis. P. A. Nekrassoff. Math. Ann. XXXVIII, 82.
4. Ueber eine Abbildung durch eine rationale Function. L. Fuchs. Crelle CVIII, 181. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 66.]
5. On some problems of orthomorphosis. A. Cayley. Crelle CVII, 262.

Abel'sche Transcendenten.

6. Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen. M. Noether. Mathem. Annal. XXXVII, 417, 465.
7. Die partiellen Differentialgleichungen der Abel'schen Thetafunctionen dreier Argumente. Ed. Wiltheiss. Mathem. Annal. XXXVIII, 1.

Absolute Geometrie.

8. Elementargeometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie. M. Simon. Crelle CVII, 84.
9. Notes sur la géometrie Euclidienne et sur la géométrie non-Euclidienne. P. Mansion. Mathesis Ser. 2, I, Supplément I.
10. Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. F. Klein. Mathem. Annal. XXXVII, 544.

Abzählende Geometrie.

11. Beziehungen zwischen den linearen Räumen auferlegbaren charakteristischen Bedingungen. H. Schubert. Mathem. Annal. XXXVIII, 598.

Vergl. Geometrie (höhere) 102.

Analytische Geometrie der Ebene.

12. Courbes enveloppes et courbes tangentes. P. Mansion. Mathesis Ser. 2, I, 92.
13. Sur les points caractéristiques. P. Mansion. Mathesis Ser. 2, I, 93.
14. Sur la résolution des problèmes déterminés par la méthode des lieux géométriques. G. de Longchamps. Mathesis Ser. 2, I, 132.
15. Sur une correspondance de droites et de points. Aug. Poulain. Mathesis Ser. 2, I, 88.
16. Lieu du foyer d'une parabole touchant une logarithmique et l'axe des x. Hacken. Déprez. Mathesis Ser. 2, I, 123.
17. Sur une cubique circulaire. Jeřábek. Mathesis Ser. 2, I, 70.
18. Sur une génération de la strophoide. Meurice, Mandart, Liénard. Mathesis Ser. 2, I, 21. — Servais ibid. 22.
19. Engendrement d'une strophoïde Cl. Servais. Mathesis Ser. 2, I, 93.

Vergl. Differentialgleichungen 38. Ellipse. Geschichte der Mathematik 120. Kegelschnitte. Normalen. Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

20. Ueber eine allgemeine Classe von ein-zweideutigen Raumtransformationen. B. Wimmer, Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 214.

Vergl. Cubatur. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

21. Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli. A. Berger. Acta math. XIV, 249.

Bessel'sche Functionen.

22. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. H. Weber. Math. Annal. XXXVII, 404.

Bestimmte Integrale.

23. Zur Theorie der bestimmten Integrale und der unendlichen Reihen. A. Pringsheim. Mathem. Annal. XXXVII, 591.
24. Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XXXVII, 500.

Vergl. Bessel'sche Functionen. Differentialgleichungen 48. Gammafunctionen. Kugelfunctionen.

Binomialcoefficienten.

25. Propriété des coefficients binomiaux. Mandart etc. Mathesis Ser. 2, I, 236.
26. Vérification et gènéralisation d'une identité. Laisant. Mathesis Ser. 2, I, 259.

C.

Cubatur.

27. Surface et volume du tore. E. Gelin. Mathesis Ser. 2, I, 66. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 31.]

D.

Determinanten.

28. Ueber die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei anderen componirt ist. K. Hensel. Acta math. XIV, 317.
29. Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen. L. Kronecker. CVII, 135.
30. Anwend. d. Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie. L. Kronecker. Crelle CVII, 254. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 329.]
31. Anwendung der Modulsysteme auf eine Frage der Determinantentheorie. E. Netto. Crelle CVIII, 144.
32. Ueber eine algebraische Determinante mit eigenthümlichem Bildungsgesetz der Elemente. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 34.
33. Sur la valeur nécessairement positive d'un certain déterminant dont les éléments sont composés au moyer de quantités positives et d'autres quantités positives on négatives dont la valeur absolue ne dépasse pas l'unité. E. Baudran. Lalisse. Mathesis Ser. 2, I, 24.
34. On a peculiar determinant of the sixth order. Th. Muir. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 429.
35. Ueber gewisse goniometrische Determinanten und damit zusammenhängende Systeme von linearen Gleichungen. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 71. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 22.]

Differentialgleichungen.

36. Démonstration de l'intégrabálité des équations différentielles ordinaires. G. Peano. Mathem. Annal. XXXVII, 192.
37. Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln. A. Mayer. Math. Annal. XXXVII, 399.
38. Zur Transformation der Differentialgleichungen von Punkt- in Liniencoordinaten. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 317.
39. Ueber die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die unabhängig Veränderliche nicht vorkommt. W. Raschke. Acta math. XIV, 31.
40. Ueber eine Normalform gewisser Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung. G. Pick. Mathem. Annal. XXXVIII, 139.
41. Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. P. Günther. Crelle CVII, 298.
42. Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme. G. Haeuser. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 116.

43. Ueber die Darstellung der Lösungen eines Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. E. Grünfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 21.
44. Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen zur Bestimmung des Geschlechts einer beliebigen algebraischen Function. L. W. Thomé. Crelle CVIII, 335.
45. Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf nichthomogene lineare Differentialgleichungen. L. W. Thomé. Crelle CVII, 51.
46. Les invariants des équations differentielles linéaires. F. Brioschi. Acta math. XIV, 233.
47. Ueber Invarianten der linearen Differentialgleichungen. Dietrichkeit. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 311.
48. Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integrirt werden. P. A. Nekrassoff. Mathem. Annal. XXXVIII, 509.
49. Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. F. Klein. Mathem. Annal. XXXVIII, 144.
50. Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XXXVIII, 225.
51. Ueber eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte. L. Pochhammer. Crelle CVIII, 50. [Vergl. Nr. 92.]
52. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. F. Klein. Mathem. Annal. XXXVII, 573.
53. Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XXXVIII, 586.
54. Ueber die Tissot'sche Differentialgleichung. L. Pochhammer. Math. Annal. XXXVII, 512.
55. Ueber eine binomische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XXXVIII, 247.
56. Intégrer l'équation $(1-x^2)y'=xy-y^2$. P. Decamps, Péters, Mdlle. Pompilianu. Mathesis Ser. 2, I, 261.
57. Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ein System linearer partieller Differentialgleichungen. J. Horn. Acta math. XIV, 337.
58. Ueber die sogenannten vollständigen Systeme von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Fr. Schur. Crelle CVIII, 313.
59. Ueber partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit gleichen Charakteristiken. Jos. Kürschák. Mathem. Annal. XXXVII, 317.

Vergl. Abel'sche Transcendenten 7. Mechanik 185, 186, 187.

Differentialquotient.

60. Sur l'identité $\frac{m^p}{(1.2\ldots m)(1.2\ldots p)} = S\frac{1}{(1.2\ldots\alpha)(1.2\ldots\beta)\ldots(1.2\ldots\lambda)\,2^\gamma(2.3)^\delta\ldots(2.3\ldots p)^\lambda}$. G. Teixeira. Mathesis Ser. 2, I, 143.

Dreiecksgeometrie.

61. Sur une classe particulière de triangles. H. Brocard. Mathesis Ser. 2, I, 153.
62. Distances des points remarquables du triangle. Cl. Thiry. Mathesis Ser. 2, I, Supplément III. — Aug. Poulain ibid. 184. — Cl. Thiry ibid. 254.
63. Théorèmes de géométrie. Sollertinsky. Mathesis Ser. 2, I, 221.
64. Trois circonférences circonscrites à certains triangles émanant d'un même triangle passent par un même point. Mdlle. de Haas, Sollertinsky. Mathesis Ser. 2, I, 208.
65. Triangles inscrits et circonscrits à deux circonferences. Déprez. Mathesis Ser. 2, I, 233.

E.

Elasticität.

66. On the flexure of a flat elastic spring. H. Lomb. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 182.

Elektricität.

67. Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps en mouvement. H. Hertz. Acta math. XIV, 349.

68. On the illustration of the properties of the electric field by means of tubes of electrostatic induction. J. J. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 149.
69. Further contributions to dynamometry or the mensurement of power. T. H. Blakesley. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 346.
70. Proof of the generality of certain formulae published for a special case by Mr. Blakesley. W. E. Ayrton. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 354.

Ellipse.

71. Problèmes sur l'ellipse. Mdme. Prim. Mathesis Ser. 2, I, 14.
72. Propriété des diamètres conjugés de l'ellipse. Genese. Mathesis Ser. 2, I, 278.— Déprez, Decamps ibid. 279.
73. Propriété des tangentes à une ellipse tirées d'un point M' d'un rayon situé sur ce rayon OM à la distance $OM = MM'$. John Milne. Mathesis Ser. 2, I, 45.
74. Ellipse déduite d'un cercle. C. A. Laisant, Sohie, Mdme. Prim etc. Mathesis Ser. 2, I, 74.
75. Sur un disque elliptique qui se déplace en restant toujours tangent à une droite fixe en un point donné. V. Jamet. Mathesis Ser. II, I, 198, 255.

Vergl. Normalen 197.

Elliptische Transcendenten.

76. Ueber elliptische Integrale dritter Gattung. J. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 123.
77. Ueber gewisse Vereinfachungen der Transformationsgleichungen in der Theorie der elliptischen Functionen. L. Kiepert. Mathem. Annal. XXXVII, 368.
78. Multiplication der lemniscatischen Function *sin am u*. K. Schwering. Crelle CVII, 196.
79. Zur Theorie der elliptischen Functionen. P. Günther. Crelle CVIII, 256.
80. Das Interpolationsproblem für ellipt. Functionen. F. Schottky. Crelle CVII, 189.
81. Verhalten des Logarithmus einer ellipt. Function. F. Schottky. Crelle CVIII, 342.

Vergl. Abbildung 5.

F.

Factorenfolge.

82. Ueber die Convergenz einer von Vieta herrührenden eigenthümlichen Productenentwickelung. F. Rudio. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, hist-lit. Abthlg. 139.
83. Eine analytisch-arithmetische Formel. L. Kronecker. Crelle CVIII, 348.

Formen.

84. Zur Theorie der linearen Formen. K. Hensel. Crelle CVII, 241.
85. Ueber bilineare Formen und deren geometrische Anwendung. M. Pasch. Mathem. Annal. XXXVIII, 24.
86. Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen. H. Minkowski. Crelle CVII, 278.
87. Zur Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen. A. Meyer. Crelle CXIII, 125.

Vergl. Invariantentheorie.

Functionen.

88. Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient. P. Mansion. Mathesis Ser. 2, I, 35, 63, 113, 139, 246.
89. Ueber die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null. D. Hilbert und A. Hurwitz. Acta math. XIV, 217.
90. Eine Verallgemeinerung des binomischen Satzes. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 60.
91. Darstellung der bei der Division zweier ganzen Functionen auftretenden Quotienten und Reste, sowie der Partialzähler bei der Zerlegung einer gebrochenen Function in Partialbrüche. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 302.

Vergl. Abbildung. Abel'sche Transcendenten. Bernoullische Zahlen. Bessel'sche Functionen. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Formen. Gammafunctionen. Geschichte der Mathematik 124, 126. Hyperelliptische Transcendenten. Invariantentheorie. Kugelfunctionen. Mittelgrössen. Reihen. Substitutionen. Symmetrische Functionen. Thetafunctionen. Transformationsgruppen.

G.

Gammafunctionen.

92. Ueber ein vielfaches auf Euler'sche Integrale reducirbares Integral. L. Pochhammer. Crelle CVII, 246. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 316.]

Geometrie (descriptive).

93. Ueber den Begriff der Projection einer geraden Linie. G. Hauck. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 379.

Geometrie (höhere).

94. Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. Th. Reye. Crelle CVII, 162. CVIII, 89. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 82.]
95. Ueber einen orthogonalen Reye'schen Complex. H. Thieme. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 349.
96. Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie. C. Juel. Acta math. XIV, 1.
97. Zur Erzeugung der ebenen rationalen Curven. W. Stahl. Mathem. Annal. XXXVIII, 561.
98. Ueber projective involutarische Gebilde. W. Stahl. Crelle CVII, 179.
99. Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. G. Hauck. Crelle CVIII, 25.
100. Ueber eine besondere Transformation algebraischer Curven und damit in Verbindung stehende Sätze Jacob Steiner's. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 339.
101. Ueber die involutorischen Gebilde, welche eine ebene Cremona-Transformation, speciell die quadratische, enthalten kann. K. Doehlemann. Zeitschr. Math Phys. XXXVI, 356.
102. Sur la révision de la théorie des caractéristiques de M. Study. H. G. Zeuthen. Mathem. Annal. XXXVII, 461.
103. Étude intrinsèque des coniques et des cassinoïdes. E. Cesaro. Mathesis Ser. 2, I, 51.
104. Lieu du point de contact de deux séries de circonférences. Déprez, De Bozóky, Decamps. Mathesis Ser. 2, I, 120. — Jéřábek ibid. 122.
105. Ueber eine einfache planare Darstellungsweise der Gestalten der ebenen Curven dritter Ordnung. M. Disteli. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 138.
106. Einige Hauptsätze aus der Lehre von den Curven dritter Ordnung. E. Kötter. Mathem. Annal. XXXVIII, 287.
107. Ueber die Schröter'sche Construction der ebenen Curven dritter Ordnung. A. Hurwitz. Crelle CVII, 141.
108. Ueber absolute Elementensysteme auf ebenen Universalcurven vierter und dritter Ordnung. W. Binder. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 78.
109. Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curven vierter Ordnung. Gust. Kohn. Crelle CVII, 1.
110. Sur les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles d'inflexion et en particulier sur la Kreuzcurve $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$. Balitrand. Mathesis Ser. 2, I, 241.
111. Ueber die bicircularen Curven vierter Ordnung. O. Richter. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 191.
112. Die Hesse'sche Configuration $(12_4, 16_3)$. H. Schroeter. Crelle CVIII, 269.

Vergl. Absolute Geometrie. Abzählende Geometrie. Formen 85. Geschichte der Mathematik 121. Kegelschnitte. Krümmung. Mechanik 188. Optik 207. Singularitäten. Topologie.

Geschichte der Mathematik.

113. Programme du cours de l'histoire des mathématiques à l'université de Moskwa. V. V. Bobynin. Biblioth. math. 1891, 79.
114. On the teaching of the history of mathematics in the University of Texas. G. B. Halsted. Biblioth. math. 1891, 53.
115. Historical sketch of the study of mathematics in the United States. F. Cajori. Biblioth. math. 1891, 74.
116. Bibliographie de l'histoire des sciences mathématiques aux Pays-Bas. D. Bierens De Haan. Biblioth. math. 1891, 13.

117. Ueber die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1891, 41, 65. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 100.]
118. Miscellen zur Geschichte der Mathematik. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1891, 113.
119. Commentar zu dem Tractatus de numeris datis des Jordanus Nemorarius. Max Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, hist.-lit. Abth. 1, 41, 81, 121.
120. Notizia storica sulle applicazioni della spirale logaritmica. A. Favaro. Biblioth. math. 1891, 23.
121. Newton's classification of cubic curves. W. W. Rouse Ball. Biblioth. math. 1891, 35.
122. Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton. H. Vivanti. Biblioth. math. 1891, 97.
123. Godefroid Wendelin un astronome belge du XVII[e] siècle. L. Le Paige. Mathesis Ser. 2, I, Supplément II.
124. Note hystorique sur les symboles qui servent à désigner des fonctions quelconques de variables données. G. Eneström. Biblioth. math. 1891, 89.
125. Esaure di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche. Gino Loria. Biblioth. math. 1891, 99.
126. Ueber die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobi'schen Thetaformeln. L Kronecker. Crelle CVIII, 325.
127. Gumersindo Vicuña (1840—1890). G Eneström. Biblioth. math. 1891, 33.
128. Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati (17. XII. 1835 — 11. IX. 1890). Gino Loria. Biblioth. math. 1891, 1.
129. John Casey † 3. I. 1891. P. Mansion et J. Neuberg. Mathesis Ser. 2, I, 13.
130. Sophie von Kowalevsky (15. I. 1851 – 10. II. 1891). L. Kronecker. Crelle CVIII, 88.
131. Edouard Lucas (1842—1891). P. Mansion et J. Neuberg. Mathesis Ser. 2, I, 217.

Gleichungen.

132. Ueber eine Stelle in Jacobi's Aufsatz „Observationculae ad theoriam aequationum pertinentes". L. Kronecker. Crelle CVII, 349.
133. Praktische Methode zur Berechnung der reellen Wurzeln reeller algebraischer oder transcendenter numerischer Gleichungen mit einer Unbekannten. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 158.
134. Eine Methode zur numerischen Auflösung einer algebraischen Gleichung. Th. Lohnstein. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 383.
135. Ueber den Casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades. O. Hölder. Mathem. Annal. XXXVIII, 307.
136. Problème des héritages. E. Gelin. Mathesis Ser. 2, I, 111. — Mister ibid. 136. – Finck ibid. 187.
137. Problème du puits. E. Gelin. Mathesis Ser. 2, I, 111. —
138. Théorème de Choquet. Matrot. Mathesis Ser. 2, I, 218.
139. Sur une identité, qui n'est vraie qu'en supposant une certaine relation. Deprez. Mathesis Ser. 2, I, 258.
140. Si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ on a également $S\,\frac{a^2-bc}{b+c}\,.\,S\,\frac{b+c}{a^2-cb}=\frac{3}{abc}\,S\,a^3$. Mdlle. de Haas etc. Mathesis Ser. 2, I, 150.
141. Équation du degré m ne pouvant avoir que 2 racines réelles. A. Laisant Mathesis Ser. 2, I, 98.
142. Résoudre un système de 3 équations du troisième degré. Mandart, Emmerich Déprez, Cristesco, Brocard. Mathesis Ser. 2, I, 210.

Vergl. Determinanten. Geschichte der Mathematik 119. 125.

II.

Hyperbel.

143. Théorème sur l'hyperbole équilatère et le quadrilatère formé par les tangentes aux points d'incidence des normales issues d'un même point. Liénard. Mathesis Ser. 2, I, 206.
144. Sur deux hyperboles l'une circonscrite, l'antre conjuguée à un triangle donné. Kluyver. Mathesis Ser. 2, I, 100.

Hyperelliptische Transcendenten.

145. Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen, H. Burkhardt. Mathem. Annal. XXXVIII, 161. [Vergl. Bd. XXXVI. Nr. 123.]

I.

Imaginäres.

146. Ueber die Anwendung der Methode der Imaginären auf Probleme des Gleichgewichts und der Bewegung in einer Ebene. A. Gleichen. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 243.

Interpolation.

147. On the reduction of the results of experiments. Sydn. Lupton. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 418.

Invariantentheorie.

148. Eine besondere Art von Covarianten bildender Operation. Ed. Wiltheiss. Mathem. Annal. XXXVII, 228. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 126.]
149. Ueber Invariantentheorie. L. Maurer. Crelle CVII, 89.
150. Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie. E. Waelsch. Mathem. Annal. XXXVII, 41.
151. Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques. Capelli. Mathem. Annal. XXXVII, 1.
152. Ueber Invariantensysteme, welche zur Chararakterisirung der verschiedenen Classen bilinearer Formen dienen. H. Rosenow. Crelle CVIII, 1.

Vergl. Differentialgleichungen 46. 47. Formen.

K.

Kegelschnitte.

153. Propriétés des coniques. Sollertinsky. Mathesis Ser. 2, I, 177.
154. Sur le rapport anharmonique de 4 points d'une conique. Liénard. Mathesis Ser. 2, I, 98.
155. Deux points satisfaisants à une transformation birationelle réversible. J. Neuberg. Mathesis Ser. 2, I, 275.
156. Sur les foyers des coniques. P. H. Schoute. Mathesis Ser. 2, I, 129.
157. Ueber den Durchschnitt einer Geraden und einer Curve zweiter Ordnung. O. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 190.
158. Propriété de la corde d'une conique qui est vue de deux points de la même conique sons des angles droits. Kluyver. Mathesis Ser. 2, I. 171.
159. Ort der Kegelschnittssehnen, die von einem gegebenen Punkte aus unter rechtem Winkel erscheinen. O. Richter. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 49.
160. Propriétés du cercle tangent à une conique, dont le rayon soit double du rayon de courbure en ce point. Déprez et Denys. Mathesis Ser. 2, I, 42. — Lalisse ibid. 43:
161. Coniques tangentes à une circonférence donnée qu'elles coupent dans deux autres points donnés egalement. J. Neuberg. Mathesis Ser. 2, I, 167.
162. Conique osculatrice à un cercle donné. Cl. Servais. Mathesis Ser. 2, I, 96. — A. Demoulin ibid. 97.
163. Coniques tangentes à une circonférence et osculatrices à une autre en un point donné. Déprez. Mathesis Ser. 2, I, 144.
164. Conique osculatrice à deux circonférences. Anderson. Mathesis Ser. 2, I, 41.

Vergl. Ellipse. Geometrie (höhere) 109. Hyperbel. Kreis. Normalen. Parabel.

Kettenbrüche.

Vergl. Formen 86.

Kreis.

165. Circonférence passant par six points. J. Neuberg. Mathesis Ser. 2, I, 164.
166. Par deux points donnés A, B faire passer une circonférence w qui soit vue d'un point donné S sons un angle donné α. Sollertinsky. Mathesis Ser. 2, I, 158.
167. Sur un rectangle inscrit dans une circonférence. Cristesco, Mandart, Déprez. Mathesis Ser. 2, I, 203.
168. Six cercles se coupant mutuellement. Emmerich. Mathesis Ser. 2, I, 238.

Krümmung.

169. Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 56.
170. Ueber zwei die Krümmung von Curven und das Gauss'sche Krümmungsmass von Flächen betreffende charakteristische Eigenschaften der linearen Punkt-Transformationen. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 206.
171. Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune; ses rapports avec les mesures de courbure gaussienne et moyenne. F. Casorati. Acta math. XIV, 95.
172. Sur les cercles osculateurs et les sphères osculatrices. V. Jamet. Mathesis Ser. 2, I, 168.
173. Note sur le rayon de courbure. C. Wasteels. Mathesis Ser. 2, I, 268.
174. Zur Krümmungstheorie der Curvenschaaren. R. v. Lilienthal. Mathem. Annal. XXXVIII, 429.
175. Ueber die Krümmungsmittelpunkte der Bahncurven in ebenen ähnlich-veränderlichen Systemen. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 129.
176. Ueber die Krümmung der Bahnevoluten bei starren ebenen Systemen. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 193.
177. Construction der Krümmungsmittelpunkte der Hüllbahnevoluten bei starren ebenen Systemen. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 257.
178. Sur la courbure de la podaire et de la polaire réciproque d'une courbe donnée. Cl. Servais. Mathesis Ser. 2, I, 84. — M. d'Ocagne ibid. 110.

Kugelfunctionen.

179. Zur Theorie der Kugelfunctionen. J. Frischauf. Crelle CVII, 87.
180. Sur les polynômes de Legendre. Ch. Hermite. Crelle CVII, 80.
181. Sur quelques formules relatives aux fonctions sphériques. F. Caspary. Crelle CVII, 137.
182. Zur Aufstellung arithmetischer Identitäten. G. Vivanti. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 1.

M.

Magnetismus.

183. The solution of a geometrical problem in magnetism. T. H. Blakesley Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 281.

Maxima und Minima.

184. Minimum de la bissectrice d'un des angles aigus d'un triangle rectangle dont la hauteur relative à l'hypoténuse est donnée. Decamps etc. Mathesis Ser. 2, I, 26. – Vladimirescu ibid. 27.

Mechanik.

185. Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Soph. Kowalevski. Acta math. XIV, 81. [Vergl. Bd. XXXV, Nr. 220.]
186. Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme. Stäckel. Crelle XVII, 319.
187. Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. W. Hess. Mathem. Annal. XXXVII, 153.
188. Ueber die Gestaltung der Koppelcurven für besondere Fälle des Kurbelgetriebes. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 11, 65. [Vergl. Bd. XXXV, Nr. 107.]
189. Beitrag zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen. Joh. Kleiber. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 296, 328.
190. Die Bestimmung der Kreispunktcurven eines ebenen Gelenkvierseits. C. Rodenberg. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 267.
191. Die Wendepole der absoluten und der relativen Bewegung. F. Wittenbauer. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 231. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 157.]
192. Sur les lignes de force. C. E. Wasteels. Mathesis Ser. 2, I, 253.
193. Sur les moments d'inertie. J. Neuberg. Mathesis Ser. 2, I, 226.

Vergl. Elasticität. Elektricität. Imaginäres. Magnetismus. Optik. Potential. Schwerpunkt. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

194. Beiträge zur Analysis situs. Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen. W. Dyck. Mathem. Annal. XXXVII, 273.
195. Classification der algebraischen Strahlensysteme. R. Schumacher. Mathem. Annal. XXXVII, 100.

Mittelgrössen.

196. Ueber den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels. A. Hurwitz. Crelle CVIII, 266.

N.

Normalen.

197. Sur le théorème de Joachimsthal. V. Jamet. Mathesis Ser. 2, I, 105.
198. Sur trois points d'une parabole tels, que les normales concourent en un même point. Déprez. Mathesis Ser. 2, I, 173.

O.

Oberflächen.

199. Zur Kenntniss der algebraischen Flächen mit Mittelpunkt. K. Stoltz. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 308.
200. Problèmes sur des surfaces. Mdme. Prim. Mathesis Ser. 2, I, 15.
201. Sur une surface du quatrième ordre. Denys et Lalisse. Matthesis Ser. 2, I, 99.
202. Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven. K. Th. Vahlen. Crelle CVIII, 346.

Vergl. Krümmung 169. 170. 171. 172.

Oberflächen zweiter Ordnung.

203. Ueber die 8 Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung. H. Schroeter. Acta math. XIV, 207. [Vergl. Bd. XXXV, Nr. 249.]
204. Ueber constructive Probleme aus der Theorie der reciproken Verwandtschaft und der Flächen zweiter Ordnung. Fr. London. Mathem. Annal. XXXVIII, 334.

Optik.

205. Anwendung der Theorie der Modulsysteme auf ein Problem der Optik. K. Hensel. Crelle CVIII, 140.
206. The elementary trentment of problems on the diffraction of light. A. Schuster. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 77.
207. Analytische Untersuchungen über die Constitution der in krummen Flächen gebrochenen a priori astigmatischen Strahlenbündel mit Anwendungen der neueren Geometrie. A. Ahrendt. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 99.
208. Visibility of interference-fringes in the focus of a telescope. A. A. Michelson. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 256.
209. On the application of interference-methods to spectroscopic measurements. A. A. Michelson. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 338.
210. On pin-hole photography. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 87.

P.

Parabel.

211. Deux nouvelles paraboles déduites d'une parabole donnée. J. Neuberg. Mathesis Ser. 2, I, 196.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 16. Normalen 198.

Planimetrie.

212. Endlich-gleiche Flächen. M. Réthy. Mathem. Annal. XXXVIII, 405.
213. Construction d'une troisième proportionelle. Cl. Thiry. Mathesis Ser. 2, I, 254.
214. Sur quatre points situés en ligne droite. Mdme. de Haas etc. Mathesis Ser. 2, I, 76.
215. Théorème sur deux series projectives de points superposées. Verbessem. Mathesis Ser. 2, I, 239.

216. Étout donnés un point A et un angle CBD, trouver sur BC, BD les points C, D équidistants de A et tels que l'angle CAD soit de grandeur donnée. Laurens etc. Mathesis Ser. 2, I, 77.
217. Construire un triangle rectangle au moyen de deux longueurs données. Mlle. Pompilianu, François, Vladimirescu etc. Mathesis Ser. 2, I, 67.
218. Relation entre les rayons des cercles exinscrits d'un triangle, dout le périmètre est égal à la somme de ces trois rayons. Lemoine etc. Mathesis Ser. 2, I. 205.
219. Sur les quadrangles complets. J. Neuberg. Mathesis Ser. 2, I, 33, 67, 81, 189.
220. Formules relatives aux polygones reguliers. E. Gelin. Mathesis Ser. 2, I, 160. — H. Brocard ibid. 254.

Vergl. Absolute Geometrie. Dreiecksgeometrie. Kreis. Maxima und Minima.

Potential.

221. Das Potential eines homogenen Ringkörpers mit elliptischem Querschnitt. Züge. Crelle CVII, 148. [Vergl. Bd. XXXV, Nr. 288.]
222. Beweis der Existenz des Potentials, das an der Grenze des betrachteten Raumes gegebene Werthe hat, für den Fall, dass diese Grenze eine überall convexe Fläche ist. Gust. Kirchhoff. Acta math. XIV, 179.

Q.

Quadratur.

223. Aire de l'ellipse microsphérique. C. E. Wasteels. Mathesis Ser. 2, I, 83.

R.

Rechnen.

224. Soustraction de nombres fractionnaires. E. Gelin. Mathesis Ser. 2, I, 92. — C. Bergmans ibid. 110.

Reihen.

225. Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen. A. Pringsheim. Mathem. Annal. XXXVII, 38. [Vergl. Bd. XXXV, Nr. 680.]
226. Ueber analytische Darstellung unendlicher Reihen, die durch Gliederinversionen aus einer gegebenen hervorgehen. A. Pringsheim. Mathem. Annal. XXXVIII, 153.
227. Ueber beständig convergirende Potenzreihen mit rationalen Zahlencoefficienten und vorgeschriebenen Nullstellen. A. Hurwitz. Acta math. XIV, 211.
228. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XXXVIII, 452.
229. Ueber einen Specialfall der hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung. L. Saalschütz. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 278, 321. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 201.]
230. Sur le terme complémentaire de la série de Taylor. M. d'Ocagne. Mathesis Ser. 2, I, 19.

Vergl. Bestimmte Integrale 23. Binomialcoefficienten. Differentialgleichungen 52, 53. Kugelfunctionen 182.

S.

Schwerpunkt.

231. Quelques théorèmes sur le centre des moyennes distances d'un système de points. H. Van Aubel. Mathesis Ser. 2, I, 255.
232. Zur Lage des Schwerpunktes eines Rotationskörpers. F. Kosch. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 188.

Singularitäten.

233. Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für die Singularitäten der ebenen algebraischen Curven. Fr. Meyer. Math. Annal. XXXVIII, 369.
234. Zur Eintheilung der Strahlencongruenzen zweiter Ordnung mit Brenn- oder singulären Linien; Ebenenbüschel zweiter Ordnung in perspectiver Lage zu rationalen Curven. Rob. Schumacher. Mathem. Annal. XXXVIII, 298. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 204.]

Sphärik.

235. Sur les formules de la trigonométrie sphérique. Ed. Lucas. Mathesis Ser. 2, I, 187.
236. Des triangles sphèriques, ins crits à un même petit cercle, ayant un sommet fixe A et dans lesquels la somme $\cos AB + \cos AC$ a une valeur constante. B. Sollertinsky. Mathesis Ser. 2, I. 149.

Substitutionen.

237. Ueber eine besondere Classe disontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen. R. Fricke. Mathem. Annal. XXXVIII, 50, 461.
238. Geometrische Darstellung der Gruppen linearer Substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie. L. Bianchi. Mathem. Annal. XXXVIII, 313.

Symmetrische Functionen.

239. Die Relationen, welche zwischen den elementaren symmetrischen Functionen bestehen. F. Junker. Mathem. Annal. XXXVIII, 91.

T.

Tetraeder.

240. Sur deux tétraèdres symetriquement égaux. Déprez. Mathesis Ser. 2, I, 126.

Thetafunctionen.

241. Zur Definition des Systems der 4^{ϱ} geraden und ungeraden Thetafunctionen. F. Schottky. Crelle CVII, 117.
242. Theorie der elliptisch-hyperelliptischen Functionen von vier Argumenten. F. Schottky. Crelle CVIII, 147, 193.
243. Ueber Thetafunctionen, deren Argumente einem System von Drittelperioden gleich sind. J. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 41.
244. Ueber Gruppen von p-reihigen Charakteristiken, die aus n-teln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Relationen zugehöriger Thetafunctionen n^{ter} Ordnung. A. v. Braunmühl. Mathem. Annal. XXXVII, 61.

Vergl. Abel'sche Transcendenten 7. Geschichte der Mathematik 126.

Topologie.

245. Ueber die reellen Züge algebraischer Curven. D. Hilbert. Mathem. Annal. XXXVIII, 115.
246. Ueber das Problem der Nachbargebiete. L. Heffter. Mathem. Annal. XXXVIII, 477.

Transformationsgruppen.

247. Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen. Fr. Schur. Mathem. Annal. XXXVIII, 263. [Vergl. Bd. XXXV, Nr. 705.]
248. Bestimmung einer Classe von Berührungstransformationsgruppen des dreifach ausgedehnten Raumes. G. Scheffers. Acta math. XIV, 111.

Trigonometrie.

249. Relations entre les côtés d'un triangle et les rayons des cercles inscrits et exinscrits. Delahaye. Mathesis Ser. 2, I, 146. — François, Decamps, Russo ibid. 147. — Mandart, Sollertinski, Lemoine ibid. 148.
250. Relation entre les fonctions trigonométriques des angles d'un triangle. Lemoine. Déprez. Mathesis Ser. 2, I, 211.
251. Système de deux équations entre des fonctions trigonométriques. Joachimescu etc. Mathesis Ser. 2, I, 25. — Denys, Laisant ibid. 26.
252. Sur un système de 3 équations de fonctions trigonometriques de deux angles. Delahaye etc. Mathesis Ser. 2, I, 213.

Vergl. Determinanten 35. Sphärik.

W.

Wärmelehre.

253. On the variation of surface-tension with temperature. A. L. Selby. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 430.
254. On the heating of conductors by electric currents and on the electric distribution in conductors soheated. J. M'Çowan. Phil. Mag. Ser. 5, XXXI, 259.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

255. La nombre $2a$ étant décomposé en deux parties positives x et y, quelle est la probabilité que $m^2x^2+n^2y^2$ soit compris entre p^2a^2 et q^2a^2? Kluyver. Mathesis Ser. 2, I, 117.
256. Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités. P. Tchebycheff. Acta math. XIV, 305.
257. On a funicular solution of Buffon's problem of the needle in its most general form. J. J. Sylvester. Acta math. XIV, 185.

Vergl. Interpolation.

Z.

Zahlentheorie.

258. Kriterien der Theilbarkeit dekadischer Zahlen. Dietrichkeit. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 64, 254, 316.
259. Divisibilité de $x^{4n}-x^{3n}+x^{2n}-x^n+1$ par $x^4-x^3+x^2-x+1$ toutefois que n est impair et premier avec 5. Emmerich, Greenstreet, Soons. Mathesis Ser. 2, I, 208. — Joachimescu ibid. 209. — Catalan ibid. 245.
260. Critérium de divisibilité par 131 et par 107 de certains nombres. E. Gelin. Mathesis Ser. 2, I, 124. — Emmerich ibid. 126. — ibid. 138.
261. Divisibilité de $n^{13}-n$ par 2730. E. Lemoine, Denys etc. Mathesis Ser. 2, I, 175.
262. Arithmetischer Satz. Bachmann. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 381.
263. Décomposition en deux facteurs entiers de $xyz(x^3+y^3+z^3+3xyz)+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3$. Kluyver etc. Mathesis Ser. 2, I, 49.
264. Sur les conditions nécessaires et suffisantes afin que $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{\Gamma}{x-c}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\frac{\Gamma_1}{(x-c)^2}$ soit le carré d'une fonction rationelle en x; les constantes a, b, c sont supposées différentes. Ch. Lavallée-Poussin et Vladimirescu. Mathesis Ser. 2, I, 23.
265. Nombres triangulaires premiers avec n et inférieurs à $2n(n+1)$. Emmerich. Mathesis Ser. 2, I, 94.
266. Propriété de 3 nombres de somme positive combinés avec les 3 côtés d'un triangle C. J. François. Mathesis Ser. 2, I, 262.
267. Sur les théorèmes énoncés par Fermat, Euler, Wilson, Staudt et Clausen. Ed. Lucas. Mathesis Ser. 2, I, 9.
268. Einige Anwendungen der Function $[x]$. J. Hacks. Acta math. XIV, 329.
269. Versuch über die Gleichung $x^p+y^p=z^p$. A. Rieke. Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 249. [Vergl. Bd. XXXV, Nr. 340.]
270. Ueber die Classenzahl der zu einer negativen Determinante $D=-q$ gehörigen eigentlich primitiven quadratischen Formen, wo q eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist. J. Hacks. Acta math. XIV, 321.
271. Ueber eine Verallgemeinerung der Kreistheilung. L. Stickelberger. Math. Annal. XXXVII, 321.

Vergl. Substitutionen 238.

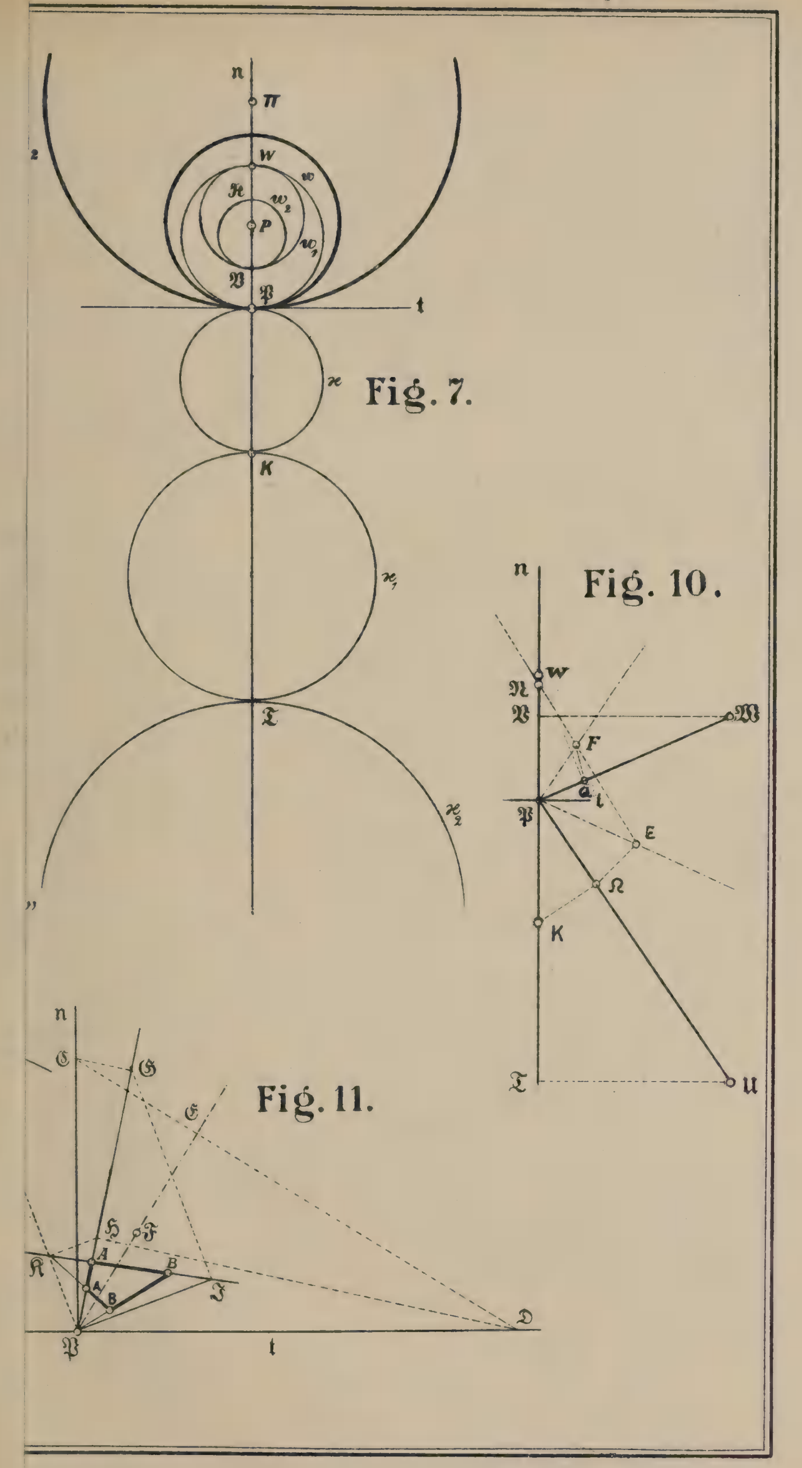
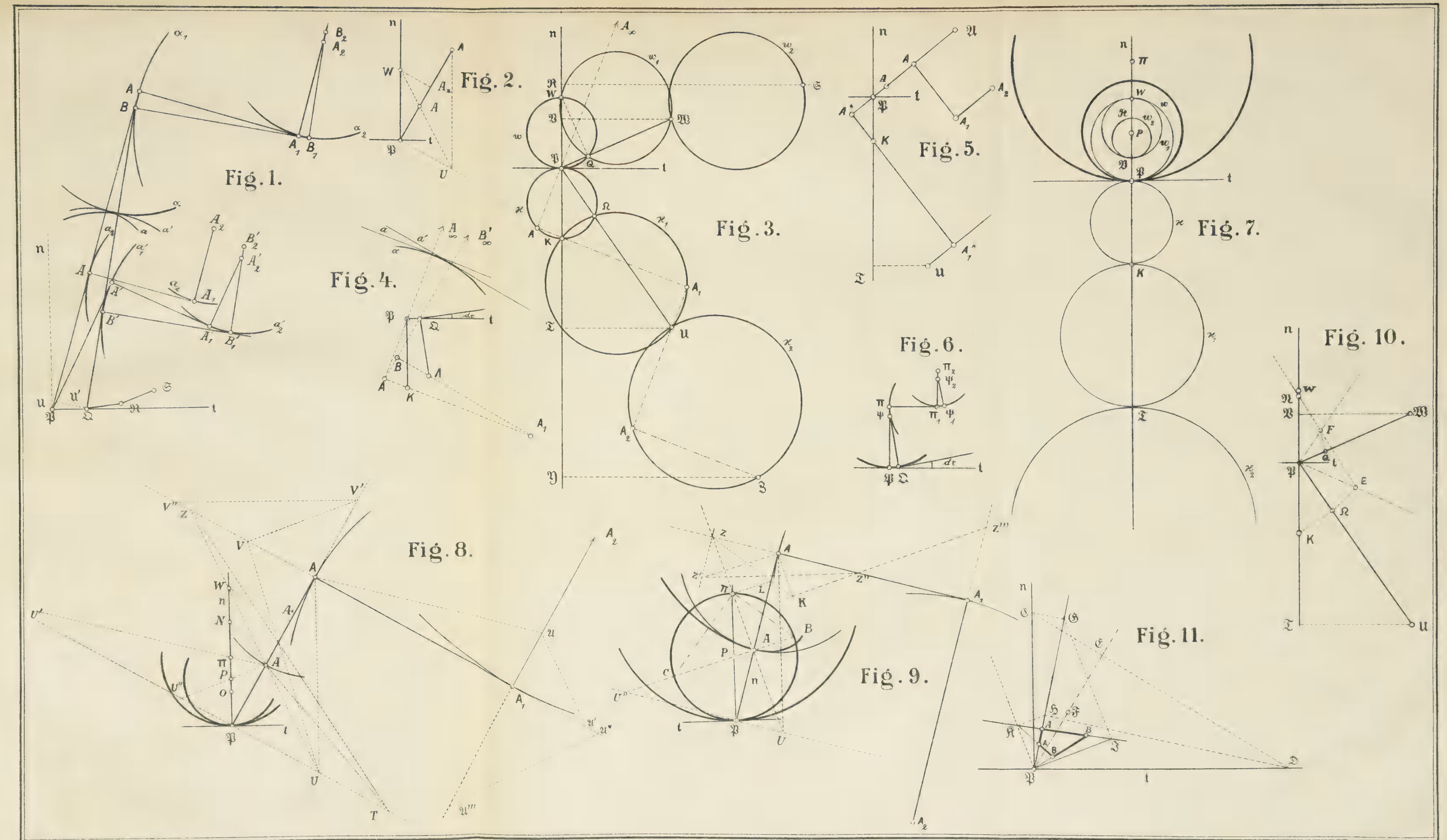


Fig. 7.

Fig. 10.

Fig. 11.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

Historisch-literarische Abtheilung.

Anmerkungen zu Diophant.

Von

G. H. F. Nesselmann,
weiland Professor in Königsberg i. Pr.

In einem Exemplare der deutschen Uebersetzung des Diophantus von Otto Schulz, das sich im Besitze G. H. F. Nesselmann's befunden hat, und jetzt mein Eigenthum ist, hat der berühmte Verfasser der Geschichte der Algebra auf eigens eingeklebten Blättern und den Rändern des Buches eine Fülle von Bemerkungen geschrieben, die es wohl werth sind, der Vergessenheit entrissen zu werden. Ich erlaube mir daher im Nachfolgenden diese Anmerkungen zu veröffentlichen. Wie aus denselben hervorgeht, stammen sie zum Theil aus der Zeit nach der Herausgabe der Geschichte der Algebra.

Thorn, 13. März 1892. M. Curtze.

I. Buch.

Aufgabe 25. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass, wenn jede an die nächstfolgende einen vorgeschriebenen Theil ihres Werthes abgiebt, die Zahlen zuletzt unter einander gleich werden. Vgl. II, 18.

Sei	$A=3x$,	$B=4y$,	$C=5z$,
giebt ab	x,	y,	z,
empfängt	z,	x,	y,

$$2x+z=3y+x=4z+y,$$
$$x=3y-z=4z-2y,$$
$$5z=5y,$$
$$z=y,$$
$$x=2z=2y,$$
$$A=6z,\quad B=4z,\quad C=5z,$$

Sei	$A=mx$,	$B=ny$,	$C=pz$,
Verlust	$-x$,	$-y$,	$-z$,
Gewinn	$+z$,	$+x$,	$+y$,

$$(m-1)x+z=(n-1)y+x=(p-1)z+y,$$
$$x=\frac{(n-1)y-z}{m-2}=(p-1)z-(n-2)y,$$
$$y=\frac{[(p-1)(m-2)+1]}{(m-2)(n-2)+n-1}z$$
$$=\frac{mp-m-2p+3}{mn-2m-n+3}z,$$
$$x=\frac{np-p-2n+3}{mn-2m-n+3}z.$$

In ganzen Zahlen
$$x=np-2n-p+3,$$
$$y=mp-m-2p+3,$$
$$z=mn-2m-n+3.$$

Bei Diophant ist $m=3, \quad n=4, \quad p=5$;

$$\left.\begin{array}{l} 3x=30, \\ 4y=20, \\ 5z=25, \end{array}\right\} \text{ oder durch 5 gehoben } \left\{\begin{array}{l} 3x=6, \\ 4y=4, \\ 5z=5. \end{array}\right.$$

Aufgabe 26. Man soll vier Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass, wenn jede an die nächstfolgende einen vorgeschriebenen Theil ihres Werthes abgiebt, die Zahlen zuletzt unter einander gleich werden.

Setzt man $\quad A=3w, \quad B=4x, \quad C=5y, \quad D=6z,$
so wird $\quad 2w+z=3x+w=4y+x=5z+y,$
in ganzen Zahlen $\quad w=50, \quad x=23, \quad y=24, \quad z=19,$

$$A=150, \quad B=92, \quad C=120, \quad D=114.$$

Aufgabe 27. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass, wenn jede einen vorgeschriebenen Theil von der Summe der beiden übrigen erhält, die Zahlen unter einander gleich werden.

Die Zahlen seien x, y, z,
so soll sein

$$x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=y+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}z=z+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}y,$$

oder

$$60x+20y+20z=60y+15x+15z=60z+12x+12y$$

sein, woraus folgt

$$y=\frac{17}{19}z, \quad x=\frac{13}{19}z, \text{ oder } x=13, \quad y=17, \quad z=19.$$

Allgemein.

Die Zahlen seien x, y, z,
so ist

$$x+\frac{1}{m}(y+z)=y+\frac{1}{n}(x+z)=z+\frac{1}{p}(x+y).$$

$$\text{I)} \qquad\qquad \text{II)} \qquad\qquad \text{III)}$$

$$mnpx+np(y+z)=mnpy+mp(x+z)=mnpz+mn(x+y).$$

Aus I) und II) $\quad (mn-m)x=(mn-p)y+(m-n)z,$
aus I) und III) $\quad (mp-m)x=(mp-p)z+(m-p)y,$

$$\frac{n(m-1)y+(m-n)z}{m(n-1)}=\frac{p(m-1)z+(m-p)y}{m(p-1)}$$

$$[n(m-1)(p-1)-(n-1)(m-p)]y=[p(m-1)(n-1)-(m-n)(p-1)]z,$$

$$y=\frac{p(m-1)(n-1)-(m-n)(p-1)}{n(m-1)(p-1)-(n-1)(m-p)}\cdot z.$$

Aus I) und II) $\quad (mn-n)y=(mn-m)x-(m-n)z,$
aus II) und III) $\quad (np-n)y=(np-p)z+(n-p)x,$

$$\frac{m(n-1)x-(m-n)z}{n(m-1)}=\frac{p(n-1)z+(n-p)x}{n(p-1)}$$

$$[m(n-1)(p-1)-(m-1)(n-p)\}x=[p(m-1)(n-1)+(m-n)(p-1)]z,$$

$$x=\frac{p(m-1)(n-1)+(m-n)(p-1)}{m(n-1)(p-1)-(m-1)(n-p)}\cdot z.$$

Wenn man z willkürlich annimmt, findet man y und x.

Aufgabe 34. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass die Zahlen unter sich in einem gegebenen Verhältniss stehen, und ausserdem die Summe ihrer Quadrate zu der Summe der Zahlen selbst ein gegebenes Verhältniss habe. $A = mx, \quad B = nx,$

$$(A^2 + B^2) : (A + B) = p : q,$$

das ist
$$(m^2 + n^2) x^2 : (m + n) x = p : q,$$

$$x = \frac{(m + n) p}{(m^2 + n^2) q}.$$

Aufgabe 35. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass die Zahlen unter sich in einem gegebenen Verhältniss stehen, und ausserdem die Summe ihrer Quadrate zu der Differenz dieser Zahlen ein gegebenes Verhältniss habe. $A = mx, \quad B = nx,$

$$(A^2 + B^2) : (A - B) = p : q, \quad x = \frac{(m - n) p}{(m^2 + n^2) q}.$$

II. Buch.

Aufgabe 8. Man soll eine gegebene Quadratzahl in zwei andere Quadratzahlen theilen. Eucl. X, 29. Lemma.

Hierzu folgende Bemerkung:

Soll man eine gegebene Cubikzahl in drei andere Cubikzahlen zerlegen, so ist im Allgemeinen

$$a^3 = b^3 + \left(\frac{a^4 - 2ab^3}{a^3 + b^3}\right)^3 + \left(\frac{2a^3 b - b^4}{a^3 + b^3}\right)^3, \text{ wo } 2b^3 < a^3,$$

und in ganzen Zahlen

$$a^3 (a^3 + b^3)^3 = b^3 (a^3 + b^3)^3 + a^3 (a^3 - 2b^3)^3 + b^3 (2a^3 - b^3)^3$$

und jedes Vielfache davon. Das kleinste Beispiel ist:

$$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3,$$

demnächst
$$84^3 = 28^3 + 53^3 + 75^3;$$

oder auch
$$a^3 (a^3 + 2b^3)^3 = a^3 (a^3 - b^3)^3 + b^3 (a^3 - b^3)^3 + b^3 (2a^3 + b^3)^3,$$

daraus folgt
$$20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3 \text{ u. s. w.}$$

Bei Cubis hat man folgende drei Formeln (s. Vieta, Zet. IV, 18—20):

$$a^3 - b^3 = \frac{a^3 (a^3 - 2b^3)^3}{(a^3 + b^3)^3} + \frac{b^3 (2a^3 - b^3)^3}{(a^3 + b^3)^3},$$

$$a^3 + b^3 = \frac{a^3 (a^3 + 2b^3)^3}{(a^3 - b^3)^3} + \frac{b^3 (2a^3 + b^3)^3}{(a^3 - b^3)^3},$$

$$a^3 - b^3 = \frac{b^3 (2a^3 - b^3)^3}{(a^3 + b^3)^3} - \frac{a^3 (2b^3 - a^3)^3}{(a^3 + b^3)^3},$$

daraus lassen sich zwei Cubi finden, die der Summe zweier gegebenen gleich sind. V. Fermat, invent. nova. In ganzen Zahlen ist

$$a^3 (a^3 + b^3)^3 + a^3 (2b^3 - a^3)^3 = b^3 (a^3 + b^3)^3 + b^3 (2a^3 - b^3)^3$$

Determination:
$$b < a\sqrt[3]{2}; \quad b > \frac{1}{2} a \sqrt[3]{4}.$$

Z. B. $a = 5$, $b = 4$ giebt $945^3 + 15^3 = 756^3 + 744^3$, und als kleinstes Beispiel in ganzen Zahlen ist: $315^3 + 5^3 = 252^3 + 248^3$, indem man die vorhergefundenen Zahlen durch 3 dividirt.

Aufgabe 9. Eine andere Auflösung der vorigen Aufgabe:

8) und 9) $$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2, \\ x = \dfrac{2mn}{m^2+n^2}\, a, \\ y = \dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\, a. \end{cases}$$

Aufgabe 10. Man soll eine Zahl, welche schon an sich die Summe von zwei Quadraten ist, noch in zwei andere Quadrate theilen.

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2, \ (a > b),$$
$$x = \frac{2mna - (m^2-n^2)b}{m^2+n^2},$$
$$y = \frac{2mnb + (m^2-n^2)a}{m^2+n^2}.$$

Aufgabe 11. Man soll zwei Quadrate suchen, deren Unterschied einer vorgeschriebenen Zahl gleich ist.

$$x^2 - y^2 = a,$$
$$x = \frac{m^2 a + n^2}{2mn},$$
$$y = \frac{m^2 a - n^2}{2mn}.$$

Aufgabe 12—14. 12. Man soll zu zwei Zahlen eine dritte von der Beschaffenheit addiren, dass beide Summen Quadrate werden.

13. Man soll von zwei gegebenen Zahlen ein und dieselbe Zahl abziehen, und beide Reste sollen Quadrate werden.

14. Man soll zwei gegebene Zahlen von einer und derselben Zahl abziehen, und beide Reste sollen Quadrate werden.

$$x + a = m^2,$$
$$x + b = n^2,$$
$$m^2 - n^2 = a - b,$$
$$m + n = \frac{p}{q}(a-b); \quad m - n = \frac{q}{p},$$
$$m = \frac{p^2(a-b)+q^2}{2pq}, \quad n = \frac{p^2(a-b)-q^2}{2pq},$$
$$x = \frac{p^4(a-b) - 2p^2q^2(a+b) + q^4}{4p^2q^2},$$

es muss aber, wenn x positiv werden soll, $m^2 > a$, $n^2 > b$ werden, also

$$m > \sqrt{a}, \ n > \sqrt{b}.$$

Beide Forderungen geben das Resultat:

$$\frac{p}{q} > \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$$

Soll x negativ werden, das heisst soll

13) $$\begin{cases} a - x = m^2, \\ b - x = n^2 \end{cases}$$

sein, so folgt die umgekehrte Bedingung

$$\frac{p}{q} < \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}.$$

In 14) $$\begin{cases} x - a = m^2, \\ x - b = n^2 \end{cases}$$

vertauschen m und n ihre Werthe.

Aufgabe 15. Man soll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und dazu ein Quadrat von der Beschaffenheit suchen, dass die Summe dieses Quadrates und jedwedes Stückes wieder ein Quadrat wird. S. Buch III, Nr. 23 andere Auflösung.

$$A + B = a,$$
$$A + x^2 = m^2,$$
$$B + x^2 = n^2.$$

Sei $$m^2 = (x + p)^2, \quad n^2 = (x + q)^2,$$

so ist $$A = 2px + p^2,$$
$$B = 2qx + q^2,$$
$$a = 2(p + q)x + p^2 + q^2,$$
$$x = \frac{a - (p^2 + q^2)}{2(p + q)},$$
$$A = \frac{ap - p(p^2 + q^2)}{p + q} + p^2 = \frac{a + q(p - q)}{p + q} \cdot p,$$
$$B = \frac{aq - q(p^2 + q^2)}{p + q} + q^2 = \frac{a - p(p - q)}{p + q} \cdot q,$$
$$A + x^2 = \frac{(a + p^2 - q^2 + 2pq)^2}{4(p + q)^2},$$
$$B + x^2 = \frac{(a - p^2 + q^2 + 2pq)^2}{4(p + q)^2}.$$

Aufgabe 16. Man soll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und ein Quadrat von der Beschaffenheit suchen, dass der Unterschied dieses Quadrates und jedweden Stückes wieder ein Quadrat wird. = III, 23.

$$A + B = a, \quad x^2 - A = m^2, \quad x^2 - B = n^2.$$

Sei

$m^2 = (x - p)^2$

$n^2 = (x - q)^2$ so ist $A = 2px - p^2,$

$$B = 2qx - q^2,$$
$$a = 2(p + q)x - (p^2 + q^2),$$
$$x = \frac{a + (p^2 + q^2)}{2(p + q)},$$

$$A = \frac{ap + p^3 + pq^2}{p+q} - p^2 = \frac{a - q(p-q)}{p+q} \cdot p,$$
$$B = \frac{aq + p^2 q + q^3}{p+q} - q^2 = \frac{a + p(p-q)}{p+q} \cdot q,$$
$$x^2 - A = \frac{(a - p^2 + q^2 + 2pq)^2}{4(p+q)^2}; \quad x^2 - B = \frac{(a + p^2 - q^2 + 2pq)^2}{4(p+q)^2}.$$

Diophant setzt
$$\left.\begin{aligned} x^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ A &= 2py + p^2 \\ B &= 2(p-q)y + p^2 - q^2 \end{aligned}\right\} \text{also } A + B = a = 2(2p-q)y + 2p^2 - q^2,$$

so ist:
$$y = \frac{a - 2p^2 + q^2}{2(2p-q)}, \quad A = \frac{a - q(p-q)}{2p-q} \cdot p, \quad B = \frac{a + pq}{2p-q}(p-q).$$

Aufgabe 17. Man soll zwei Zahlen suchen, welche ein vorgeschriebenes Verhältniss haben, und zu einem gegebenen Quadrat addirt, wieder ein Quadrat zur Summe geben.

Setzen wir die beiden gesuchten Zahlen x und mx, und

$$x + a^2 = p^2,$$
$$mx + a^2 = q^2,$$

sei
$$p^2 = y^2 + 2ay + a^2,$$

so ist
$$x = y^2 + 2ay,$$
$$mx = my^2 + 2amy,$$
$$q^2 = my^2 + 2amy + a^2 = (ny - a)^2,$$
$$= n^2y^2 - 2any + a^2,$$

und es wird
$$y = \frac{2a(m+n)}{n^2 - m},$$
$$x = \frac{4a^2 n(m+n)(n+1)}{(n^2-m)^2},$$
$$mx = \frac{4a^2 mn(m+n)(n+1)}{(n^2-m)^2},$$
$$x + a^2 = \frac{a^2(n^2 + 2n + m)^2}{(n^2-m)^2},$$
$$mx + a^2 = \frac{a^2(n^2 + 2mn + m)^2}{(n^2-m)^2}.$$

Will man nicht, wie Diophant, das gegebene Verhältniss als ein Vielfaches annehmen, so braucht man nur für m einen Bruch, etwa $\frac{r}{t}$ zu setzen.

Aufgabe 18. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass sie unter einander gleich werden, wenn jede an die folgende einen aliquoten Theil und ausserdem eine vorgeschriebene Zahl abgiebt. Vergl. I, 25.

Sei $\quad A = 5x, \quad B = 6y, \quad C = 7z,$

geben ab $\quad -x-6, \quad -y-7, \quad -z-8,$

empfangen $\quad z+8, \quad x+6, \quad y+7.$

Demnach bleibt: $4x + z + 2 = 5y + x - 1 = 6z + y - 1$,

$$x = \frac{5y - z - 3}{3} = 6z - 4y,$$

$$5y - z - 3 = 18z - 12y,$$

$$y = \frac{19z + 3}{17}, \quad x = \frac{26z - 12}{17}.$$

Sei $z = 7$, so werden alle Werthe ganze Zahlen, nämlich:

$$x = 10, \quad y = 8, \quad z = 7,$$

$$A = 50, \quad B = 48, \quad C = 49.$$

$50 - (10 + 6) + (7 + 8) = 49$,
$48 - (8 + 7) + (10 + 6) = 49$,
$49 - (7 + 8) + (8 + 7) = 49$,

bei Diophant ist $n = -\frac{2}{7}$, $n_1 = \frac{5}{7}$,
$z = \frac{15}{7}$, $x = \frac{18}{7}$, $y = \frac{18}{7}$.

Wenn man nämlich aus den obigen Formeln den Werth für z sucht, der beide Ausdrücke zu ganzen Zahlen macht, so findet man:

$$z = 17n + 7 = 17n_1 - 10,$$

$$y = 19n + 8 = 19n_1 - 11,$$

$$x = 26n + 10 = 26n_1 - 16,$$

also für $n = 0$, $z = 7$, für $n = 1$, $z = 24$, für $n = 2$, $z = 41$,
$y = 8$, $y = 27$, $y = 46$,
$x = 10$, $x = 36$, $x = 62$.

Allgemein.

A giebt $\frac{1}{m}$ seiner selbst und a an B; B $\frac{1}{n}$ seiner selbst und b an C; C $\frac{1}{p}$ seiner selbst und c an A ab.

Sei $A = mx$, $B = ny$, $C = pz$,
sie erhalten $z + c$, $x + a$, $y + b$,
geben ab $-x - a$, $-y - b$, $-z - c$,
es ist also

$$(m - 1)x + z - a + c = (n - 1)y + x + a - b = (p - 1)z + y + b - c,$$

$$x = \frac{(n - 1)y - z + 2a - b - c}{m - 2} = (p - 1)z - (n - 2)y - a + 2b - c,$$

also

$$y = \frac{(mp - m - 2p + 3)z - ma + (2m - 3)b - (m - 3)c}{mn - 2m - n + 3},$$

$$x = \frac{(np - 2n - p + 3)z + (n - 3)a + nb - (2n - 3)c}{mn - 2m - n + 3};$$

weiter lassen sich die Formeln in allgemeinen Ausdrücken nicht entwickeln.

Aufgabe 19. Man soll eine gegebene Zahl in drei Zahlen von der Beschaffenheit theilen, dass sie unter einander gleich werden, wenn jede

an die nächstfolgende einen vorgeschriebenen Theil ihres Werthes und ausserdem eine vorgeschriebene Zahl abgiebt.

Die nicht gelöste Aufgabe ist eine bestimmte. Nach 18 hatten wir gefunden

$$x=\frac{26z-12}{17},\quad y=\frac{19z+3}{17},$$

demnach

$$A=\frac{130z-60}{17},$$

$$B=\frac{114z+18}{17},$$

$$C=\frac{119z}{17},$$

$$A+B+C=80=\frac{363z-42}{17},\quad z=\frac{1402}{363},$$

daraus folgt $y=\frac{1631}{363},\quad x=\frac{1888}{363},\quad C=\frac{9814}{363},\quad B=\frac{9786}{363},\quad A=\frac{9440}{363}.$

Aufgabe 20. Man soll drei Quadrate von der Beschaffenheit suchen, dass der Unterschied des grössten und mittelsten zu dem Unterschiede des mittelsten und kleinsten ein vorgeschriebenes Verhältniss habe.

Sei der Unterschied des grössten und mittelsten Quadrates das n-fache des Unterschiedes des mittelsten und kleinsten Quadrates.

Das kleinste sei $=x^2$,
das mittelste $=x^2+2mx+m^2$,
Unterschied $=2mx+m^2$,
n-facher Unterschied $=2mnx+m^2n$,
also grösstes Quadrat $=x^2+2m(n+1)x+m^2(n+1)=(x+p)^2$
$=x^2+2px+p^2$,
also

$$x=\frac{p^2-m^2(n+1)}{2m(n+1)-2p}.$$

Damit x positiv werde, muss sein

$$p<m(n+1),$$

$$p^2>m^2(n+1),$$

$$p>m\sqrt{n+1}.$$

Aufgabe 21. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat einer jeden, wenn man die andere Zahl dazu addirt, wieder ein Quadrat zur Summe giebt.

$$A^2+B=m^2,\quad A+B^2=n^2,$$

sei $A=x,\quad B=2px+p^2$, also $A^2+B=x^2+2px+p^2$, ein Quadrat.

$$B^2+A=4p^2x^2+(4p^3+1)x+p^4=\left(2px-\frac{q}{r}\right)^2=4p^2x^2-\frac{2pq}{r}x+\frac{q^2}{r^2},$$

$$A=x=\frac{q^2-p^4r^2}{(4p^3+1)r^2+4pqr},$$

$$B=2px+p^2=\frac{p[2q^2+4p^2qr+p(2p^3+1)r^2]}{(4p^3+1)r^2+4pqr}.$$

Bei Diophant ist $p=1$, $q=2$, $r=1$, $A=\frac{3}{13}$, $B=\frac{19}{13}$.

Sei $p=2$, $q=5$, $r=1$, so ist $A=\frac{9}{73}$, $B=\frac{328}{73}$,

$$A^2+B=\left(\frac{155}{73}\right)^2,\quad A+B^2=\left(\frac{329}{73}\right)^2.$$

Oder auch so: $A^2+B=m^2$, $A+B^2=n^2$,

$$B=m^2-A^2,\quad m+A=\frac{p}{q}B,\quad m-A=\frac{q}{p},$$

$$m=\frac{p^2B+q^2}{2pq},\quad A=\frac{p^2B-q^2}{2pq},$$

$$A+B^2=B^2+\frac{p}{2q}B-\frac{q}{2p}=(B-r)^2=B^2-2rB+r^2,$$

also

$$B=\frac{r^2+\frac{q}{2p}}{2r+\frac{p}{2q}}=\frac{2pqr^2+q^2}{4pqr+p^2},$$

$$A=\frac{p^2r^2-2q^2r}{4pqr+p^2},$$

r kann natürlich auch ein Bruch sein. Damit aber A positiv werde, muss

$$p^2r^2>2q^2r,$$

$$r>\frac{2q^2}{p^2}.$$

Bei Diophant ist $p=1$, $q=1$, $r=3$.

Aufgabe 22. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat einer jeden, wenn man die andere Zahl davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reste lässt.

$$A^2-B=m^2,\quad B^2-A=n^2,$$

sei $B=x+p$, $A=2px+p^2$, so ist $B^2-A=x^2$,

also Quadrat, $A^2-B=4p^2x^2+(4p^3-1)x+p^4-p=\left(2px-\frac{q}{r}\right)^2$,

also ist

$$x=\frac{q^2-(p^4-p)r}{(4p^3-1)r^2+4pqr}.$$

Diophant's Verfahren ist nur anwendbar, wenn $p=1$ ist; denn nur dann wird $p^4-p=0$, so dass man

$$4p^2x^2+(4p^3-1)x=\frac{q^2}{r^2}x^2$$

setzen kann. Setzt man $p=2$, $q=5$, $r=1$, so wird

$$x=\frac{11}{71},\quad A=\frac{328}{71},\quad B=\frac{153}{71},$$

$$B^2-A=\frac{23409}{5041}-\frac{328}{71}=\left(\frac{11}{71}\right)^2,$$

$$A^2-B=\frac{107584}{5041}-\frac{153}{71}=\left(\frac{311}{71}\right)^2.$$

Aufgabe 23. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat einer jeden, wenn man die Summe beider Zahlen dazu addirt, wieder ein Quadrat zur Summe giebt.

$$A^2 + A + B = m^2, \quad B^2 + A + B = m_1^2$$

sei $$B = x, \quad A = (2n-1)x + n^2,$$

so ist $$B^2 + A + B = x^2 + 2nx + n^2 = m_1^2,$$

$$A^2 + A + B = (2n-1)^2x^2 + 2n(2n^2 - n + 1)x + n^4 + n^2 = m^2 = \left[(2n-1)x - \frac{p}{q}\right]^2,$$

$$x = \frac{p^2 - (n^4 + n^2)q^2}{2n(2n^2 - n + 1)q^2 + 2(2n-1)pq}.$$

Aufgabe 24. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat einer jeden, wenn man die Summe beider Zahlen davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reste lässt.

$$A^2 - (A + B) = m^2, \quad B^2 - (A + B) = m_1^2.$$

Sei $$B = x, \quad A = (2n-1)x - n^2, \quad A + B = 2nx - n^2,$$

so ist $$B^2 - (A + B) = x^2 - 2nx + n^2,$$

$$A^2 - (A + B) = (2n-1)^2x^2 - 2n(2n^2 - n + 1)x + n^4 + n^2 = \left\{(2n-1)x - \frac{p}{q}\right\}^2,$$

also $$x = \frac{(n^4 + n^2)q^2 - p^2}{2n(2n^2 - n + 1)q^2 - 2(2n-1)pq}.$$

Diophant's Verfahren passt nur für die Annahme $B = x$, $A = x + 1$.

Aufgabe 25. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die eine oder die andere Zahl hinzu addirt.

$$(A + B)^2 + A = p^2; \quad (A + B)^2 + B = q^2.$$

Sei $$A + B = x, \quad A = (m^2 - 1)x^2, \quad B = (n^2 - 1)x^2,$$

so ist $$A + B = (m^2 + n^2 - 2)x^2 = x,$$

also $$x = \frac{1}{m^2 + n^2 - 2}.$$

Aufgabe 26. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die eine oder die andere Zahl davon abzieht.

Es sollen $(A + B)^2 - A$ und $(A + B)^2 - B$ Quadrate sein. Sei

$$A + B = px,$$

$$A = (p^2 - m^2)x^2,$$

$$B = (p^2 - n^2)x^2,$$

so ist: $$A + B = (2p^2 - m^2 - n^2)x^2 = px,$$

$$x = \frac{p}{2p^2 - m^2 - n^2}.$$

Aufgabe 27. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product derselben, wenn man die eine oder die andere von beiden

Zahlen dazu addirt, in beiden Fällen ein Quadrat zur Summe giebt, die Summe der Wurzeln aber einer vorgeschriebenen Zahl gleich ist.

$$AB + A = m^2, \quad AB + B = n^2,$$
$$m + n = a,$$

sei $A = x, \quad B = p^2x - 1$, so ist $AB + A$ Quadrat $= p^2x^2$,

$$AB + B = p^2x^2 - x + p^2x - 1,$$
$$= p^2x^2 + (p^2 - 1)x - 1 = (a - px)^2,$$
$$= a^2 - 2pax + p^2x^2,$$

also

$$x = \frac{a^2 + 1}{p^2 + 2ap - 1} = A,$$
$$p^2x - 1 = \frac{a^2p^2 - 2ap + 1}{p^2 + 2ap - 1} = B.$$

Aufgabe 28. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product, wenn man die eine oder die andere Zahl davon abzieht, in beiden Fällen ein Quadrat zum Reste lässt, die Summe der Wurzeln aber einer gegebenen Zahl gleich wird.

$$AB - A = m^2, \quad AB - B = n^2,$$
$$m + n = a,$$

sei $A = x, \quad B = p^2x + 1$, so ist $AB - A = p^2x^2$,

$$AB - B = p^2x^2 + x - p^2x - 1 = (a - px)^2,$$
$$p^2x^2 - (p^2 - 1)x - 1 = a^2 - 2apx + p^2x^2,$$
$$x = \frac{a^2 + 1}{1 + 2ap - p^2} = A,$$
$$p^2x + 1 = \frac{a^2p^2 + 2ap + 1}{1 + 2ap - p^2} = B.$$

Aufgabe 29. Man soll zwei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product ein Quadrat wird, wenn man die eine oder die andere der beiden Zahlen hinzu addirt.

Wenn $x^2y^2 + x^2$ und $x^2y^2 + y^2$ Quadrate sind, so müssen auch $x^2 + 1$ und $y^2 + 1$ Quadrate sein. Man hat also nur nöthig zwei Quadrate x^2 und y^2 zu suchen, die Quadrate werden, wenn man 1 dazu addirt. Wenn man dann $x^2 + 1$ und $y^2 + 1$ respective mit y^2 und x^2 multiplicirt, so sind auch diese Producte Quadrate.

Aufgabe 30. Man soll zwei Quadrate von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man das eine oder das andere der beiden Quadrate davon abzieht.

Die Zahlen sind hier $\frac{m^2 + n^2}{2mn}$ und $\frac{p^2 + q^2}{2pq}$,

oder

$$\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} \text{ und } \frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2}.$$

Aufgabe 31. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product ein Quadrat wird, mag man die Summe der Zahlen dazu addiren oder davon abziehen.

$$AB + (A + B) \text{ und } AB - (A + B) \text{ Quadrate.}$$

Sei
$$AB = (m^2 + n^2)x^2,$$
und zwar
$$A = x, \quad B = (m^2 + n^2)x,$$
$$A + B = (m^2 + n^2 + 1)x,$$
aber $m^2 + n^2$ wird Quadrat, sowohl wenn man $2mn$ dazu addirt, als wenn man $2mn$ davon abzieht, daher sei $A + B = 2mnx^2$. Es war aber
$$A + B = (m^2 + n^2 + 1)x,$$
daher
$$2mnx^2 = (m^2 + n^2 + 1)x, \quad x = \frac{m^2 + n^2 + 1}{2mn}.$$

Aufgabe 32. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass nicht nur ihre Summe ein Quadrat ist, sondern dass auch ihr Product ein Quadrat wird, wenn man die Summe derselben dazu addirt, oder davon abzieht.

Es sollen die Ausdrücke $A + B$, $AB + A + B$ und $AB - (A + B)$ Quadrate werden. Nun sind $m^2 + n^2 \pm 2mn$ immer Quadrate, also würde den beiden letzten Bedingungen genügt, wenn man
$$AB = (m^2 + n^2)x^2, \quad A + B = 2mnx^2$$
setzte. Aber $A + B$, das ist $2mnx^2$, soll Quadrat sein, sei also $m = 2p^2$, $n = q^2$ so erhalten wir
$$AB = (4p^4 + q^4)x^2,$$
$$A + B = 4p^2q^2x^2,$$
so sind die Ausdrücke Quadrate. Man zerlege $4p^4 + q^4$ in irgend zwei Factoren r und t und setze $A = rx$, $B = tx$, so ist $(r + t)x = A + B$. Aber $A + B$ war $= 4p^2q^2x^2$,
daher ist
$$x = \frac{r + t}{4p^2q^2}.$$

Bei Diophant ist $p = 1$, $q = 2$, $r = 2$, $t = 10$; $x = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, also $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{15}{2}$, $A + B = 9$, $AB = \frac{45}{4}$.

Aufgabe 33. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die nächstfolgende Zahl dazu addirt.

$$A^2 + B, \quad B^2 + C, \quad C^2 + A$$
sollen Quadrate werden. Sei
$$A = x,$$
$$B = 2mx + m^2, \text{ so ist } A^2 + B \text{ Quadrat,}$$
subtrahire
$$B^2 = 4m^2x^2 + 4m^3x + m^4,$$
von
$$4m^2x^2 + 4mnx + n^2, \text{ und setze}$$

$C = 4m(n - m^2)x + n^2 - m^4$, so ist auch $B^2 + C$ Quadrat. Nun ist

$$C^2 + A = 16m^2(n - m^2)^2x^2 + [8m(n - m^2)(n^2 - m^4) + 1]x + (n^2 - m^4)^2,$$
$$= [4m(n - m^2)x - p]^2,$$
$$= 16m^2(n - m^2)^2x^2 - 8mp(n - m^2)x + p^2,$$

woraus folgt:
$$x = \frac{p^2 - (n^2 - m^4)^2}{8m(n - m^2)(n^2 - m^4 + p) + 1}.$$

Bei Diophant ist $m = 1$, $n = 2$, $p = 4$.

Aufgabe 34. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die nächstfolgende Zahl davon abzieht.

$$A^2 - B, \quad B^2 - C, \quad C^2 - A \text{ Quadrate.}$$

Sei
$$A = x + m,$$
$$B = 2mx + m^2,$$
$$C = 4m(m^2 - n)x + (m^4 - n^2),$$

so sind $A^2 - B$ und $B^2 - C$ Quadrate,

$$C^2 - A = 16m^2(m^2 - n)^2x^2 + [8m(m^2 - n)(m^4 - n^2) - 1]x + (m^4 - n^2)^2 - m,$$
$$= [4m(m^2 - n)x - p]^2,$$
$$= 16m^2(m^2 - n)^2x^2 - 8m(m^2 - n)px + p^2,$$

also
$$x = \frac{p^2 - (m^4 - n^2)^2 + m}{8m(m^2 - n)(m^4 - n^2 + p) + 1}.$$

Diophant setzt $m = 1$, $n = 0$, wodurch $C^2 + A = 16x^2 + 7x$ wird und eine particuläre Auflösung zulässt, die bei anderen Werthen für m und n nicht anwendbar ist.

Aufgabe 35—36. 35. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die Summe der drei Zahlen hinzu addirt.

36. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die Summe der Zahlen davon abzieht.

$$\left(\frac{a - b}{2}\right)^2 + ab \text{ und } \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - ab$$

sind allemal Quadrate. Es wird nun verlangt

nach 35: $A^2 + A + B + C$, $B^2 + A + B + C$, $C^2 + A + B + C$,

nach 36: $A^2 - (A + B + C)$, $B^2 - (A + B + C)$, $C^2 - (A + B + C)$

zu Quadraten zu machen. Nimm eine Zahl, die sich auf dreifache Weise in zwei Factoren zerlegen lässt, z. B. mnp, und bilde die drei Zahlen:

In 35: $A = \frac{mn - p}{2} x$, in 36: $A = \frac{mn + p}{2} x$,

$B = \frac{mp - n}{2} x$, $B = \frac{mp + n}{2} x$,

$C = \frac{np - m}{2} x$, $C = \frac{np + m}{2} x$,

und in beiden Aufgaben setze:

$$A + B + C = mnpx^2,$$

so werden die Summen resp. Differenzen allemal Quadrate sein. Es ist nur noch nöthig, dass die Summe der drei Zahlen $= mnpx^2$ sei. Es ist also

in 35: $$\frac{(mn - p + mp - n + np - m)x}{2} = mnpx^2,$$

$$x = \frac{mn + mp + np - (n + m + p)}{2mnp},$$

in 36: $$\frac{(mn + p + mp + n + np + m)x}{2} = mnpx^2,$$

$$x = \frac{mn + mp + np + m + n + p}{2mnp}.$$

III. Buch.

Aufgabe 1. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass die Summe derselben ein Quadrat wird, wenn man das Quadrat jedweder Zahl davon abzieht.

Da die Summe der drei Zahlen, wenn man je eines der Quadrate davon abzieht, ein Quadrat zum Reste geben soll, so muss die Summe der Zahlen die Summe von zwei Quadraten sein; sei daher

$$A + B + C = (a^2 + b^2) x^2.$$

Setzt man nun $A = ax$, $B = bx$,

so werden A^2 und B^2 von $A + B + C$ subtrahirt Quadrate zum Reste geben.

Aber nach II, 10 ist

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{2mna - (m^2 - n^2) b}{m^2 + n^2}\right)^2 + \left(\frac{2mnb + (m^2 - n^2) a}{m^2 + n^2}\right)^2.$$

Setzen wir also $$C = \frac{2mna - (m^2 + n^2) b}{m^2 + n^2} x,$$

so wird auch $A + B + C - C^2$ ein Quadrat geben. Es kommt nun nur noch darauf an, dass die Summen der Werthe für A, B, C wirklich gleich $(a^2 + b^2) x^2$ sei; es ist also

$$\left(a + b + \frac{2mna - (m^2 - n^2) b}{m^2 + n^2}\right) x = (a^2 + b^2) x^2,$$

also $$x = \frac{(a + b)(m^2 + n^2) + 2mna - (m^2 - n^2) b}{(m^2 + n^2)(a^2 + b^2)} = \frac{(m + n)^2 a + 2n^2 b}{(m^2 + n^2)(a^2 + b^2)},$$

oder, wenn wir $C = \frac{2mnb + (m^2 - n^2)a}{m^2 + n^2} x$

gesetzt hätten, $x = \frac{2m^2 a + (m+n)^2 b}{(m^2 + n^2)(a^2 + b^2)}$.

Aufgabe 2—4. 2. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwede Zahl dazu addirt.

3. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwede der drei Zahlen davon abzieht.

4. Man soll die Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Quadrat ihrer Summe von jedweder Zahl abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reste lässt.

Sei $A + B + C = mx$, also $(A + B + C)^2 = m^2 x^2$. Sei nun

in 2) $A = (n^2 - m^2)x^2, \quad B = (p^2 - m^2)x^2, \quad C = (q^2 - m^2)x^2,$

in 3) $A = (m^2 - n^2)x^2, \quad B = (m^2 - p^2)x^2, \quad C = (m^2 - q^2)x^2,$

in 4) $A = (m^2 + n^2)x^2, \quad B = (m^2 + p^2)x^2, \quad C = (m^2 + q^2)x^2,$

so sind die Bedingungen erfüllt, wenn nur noch in jeder der drei Aufgaben die Summe der drei Zahlen $= mx$ gesetzt wird; dann findet sich

in 2) $$x = \frac{m}{n^2 + p^2 + q^2 - 3m^2},$$

in 3) $$x = \frac{m}{3m^2 - n^2 - p^2 - q^2},$$

in 4) $$x = \frac{m}{3m^2 + n^2 + p^2 + q^2}.$$

Aufgabe 5. Man soll drei Zahlen suchen, deren Summe ein Quadrat ist, und welche die Eigenschaft haben, dass die Summe von je zweien um eine Quadratzahl grösser ist als die dritte.

Sei $A + B + C = x^2 + 2nx + n^2$, sei ferner $A + B - C = n^2$, so bleibt $C = \frac{1}{2}x^2 + nx$. Sei $B + C - A = x^2$, also $A = nx + \frac{1}{2}n^2$, dann ist

$$A + C = \frac{1}{2}x^2 + 2nx + \frac{1}{2}n^2,$$

also

$$B = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}n^2,$$

folglich $A + C - B = 2nx,$

und das soll Quadrat sein; sei $2nx = p^2$, so ist $x = \frac{p^2}{2n}$, also

$$A = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}n^2, \quad B = \frac{p^4}{8n^2} + \frac{1}{2}n^2, \quad C = \frac{p^4}{8n^2} + \frac{1}{2}p^2.$$

Bei Diophant ist $n=1$, $p=4$. Setzt man $n=2$, $p=8$, so wird

$$\begin{aligned} A &= 34, & A+B+C &= 324, \\ B &= 130, & A+B+C &= 4, \\ C &= 160, & A+B+C &= 64, \\ & & -A+B+C &= 256. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass sowohl die Summe von allen dreien als die Summe von je zweien ein Quadrat sei.

$$A+B+C=x^2+2nx+n^2.$$

Sei $A+B=x^2$, $C=2nx+n^2$, $B+C=x^2-2nx+n^2$,

also $$A=4nx,\ B=x^2-4nx.$$

Nun soll noch $A+C=6nx+n^2$ Quadrat sein.

Sei $$6nx+n^2=p^2, \text{ so ist } x=\frac{p^2-n^2}{6n}.$$

Aufgabe 9. Man soll drei Zahlen suchen, deren Unterschiede der Reihe nach gleich sind, und welche zugleich die Beschaffenheit haben, dass die Summe von je zweien ein Quadrat ist.

Es soll sein $$A-B=B-C,$$

$$A+B=p^2, \quad A+C=q^2, \quad B+C=r^2.$$

Aus den drei letzten Bedingungen folgt

$$q^2-r^2=p^2-q^2,$$

daher sind zunächst drei Quadrate mit gleichen Unterschieden zu suchen. Setzen wir nun

$$p^2=x^2+2mx+m^2,$$

$$q^2=x^2,$$

so muss sein $$r^2=x^2-2mx-m^2=(x-n)^2,$$

also $$x=\frac{m^2+n^2}{2(n-m)}.$$

Dann wird $$p=x+m=\frac{-m^2+2mn+n^2}{2(n-m)},$$

$$q=x=\frac{m^2+n^2}{2(m-n)},$$

$$r=x-n=\frac{m^2+2mn-n^2}{2(n-m)}.$$

In diesen Werthen für p, q, r können wir die gleichen Nenner weglassen, weil auch dann noch die Unterschiede der Quadrate gleich bleiben. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} p^2 &= A+B=(-m^2+2mn+n^2)^2=(m^2+n^2)^2+4mn(n^2-m^2), \\ q^2 &= A+C=(m^2+n^2)^2 \qquad\qquad =(m^2+n^2)^2, \\ r^2 &= B+C=(m^2+2mn-n^2)^2 \qquad =(m^2+n^2)^2-4nm(n^2-m^2). \end{aligned}$$

Sei nun $A + B + C = y$, so ist

$$A = y - r^2 = y - [(m^2 + n^2)^2 + 4mn(n^2 - m^2)],$$
$$B = y - q^2 = y - (m^2 + n^2)^2,$$
$$C = y - p^2 = y - [(m^2 + n^2)^2 - 4mn(n^2 - m^2)],$$

also

$$y = 3y - 3(m^2 + n^2)^2,$$
$$y = \frac{3}{2}(m^2 + n^2)^2,$$
$$A = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)^2 + 4mn(n^2 - m^2),$$
$$B = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)^2,$$
$$C = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)^2 - 4mn(n^2 - m^2).$$

Setzt man $m = 4$, $n = 5$, so erhält man die Diophant'schen Resultate. Diophant setzt:

$$r^2 = x^2, \quad q^2 = x^2 + 2mx + m^2, \quad p^2 = x^2 + 4mx + 2m^2 = (x - n)^2$$

u. s. w.

Die drei Diophant'schen Zahlen, welche er nicht angiebt, sind

$$A = 1560\frac{1}{2}, \quad B = 840\frac{1}{2}, \quad C = 120\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 10. Man soll zu einer gegebenen Zahl drei andere von der Beschaffenheit suchen, dass sowohl die Summe von je zweien, als auch die Summe von allen dreien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl hinzu addirt.

Sei

$$A + B + C = x^2 + 2px + p^2 - a,$$
$$A + B = x^2 + 2mx + m^2 - a,$$
$$B + C = x^2 + 2nx + n^2 - a,$$

so ist

$$C = 2(p - m)x + p^2 - m^2,$$
$$A = 2(p - n)x + p^2 - n^2,$$
$$B = x^2 + 2(m + n - p)x + m^2 + n^2 - p^2 - a.$$

Es bleibt noch übrig, dass $A + C + a$ Quadrat sei.

Da $A + C + a = 2(2p - m - n)x + 2p^2 - m^2 - n^2 + a = q^2$,

so ist

$$x = \frac{q^2 - (2p^2 - m^2 - n^2 + a)}{2(2p - m - n)}.$$

Aufgabe 11. Man soll zu einer gegebenen Zahl drei andere von der Beschaffenheit suchen, dass sowohl die Summe von je zweien als die Summe von allen dreien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl davon abzieht.

Sei

$$A + B + C = x^2 + 2px + p^2 + a,$$
$$A + B = x^2 + 2mx + m^2 + a,$$
$$B + C = x^2 + 2nx + n^2 + a,$$

so ist

$$C = 2(p - m)x + p^2 - m^2,$$
$$A = 2(p - n)x + p^2 - n^2,$$
$$B = x^2 + 2(m + n - p)x + m^2 + n^2 - p^2 + a.$$

Nun soll noch $A + C - a$ Quadrat sein, also

$$A + C - a = 2(2p - m - n)x + 2p^2 - m^2 - n^2 - a = q^2,$$

$$x = \frac{q^2 - (2p^2 - m^2 - n^2 - a)}{2(2p - m - n)}.$$

Diophant setzt $m = 0$.

Aufgabe 12. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man eine gegebene Zahl dazu addirt.

Es soll sein

$$AB + a = m^2,$$
$$AC + a = n^2,$$
$$BC + a = p^2,$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = m^2 - a \\ AC = n^2 - a \end{array}\right\}; \text{ sei } A = x, \text{ so ist } \left\{\begin{array}{l} B = \dfrac{m^2 - a}{x}, \\ C = \dfrac{n^2 - a}{x}, \end{array}\right.$$

also

$$BC + a = \frac{(m^2 - a)(n^2 - a)}{x^2} + a$$

und dieser Ausdruck soll Quadrat sein. Es ist aber:

$$\frac{(m^2 - a)(n^2 - a)}{x^2} + a = \frac{m^2 n^2 - (m^2 + n^2 - x^2)a + a^2}{x^2}.$$

Dieser Ausdruck wird aber Quadrat sein, wenn $m^2 + n^2 - x^2 = 2mn$, oder $(m - n)^2 = x^2$, also $m - n = \pm x$ ist.

Danach haben wir die drei Zahlen:

$$A = x,$$

$$B = \frac{m^2 - a}{x},$$

$$C = \frac{(m \mp x)^2 - a}{x},$$

und es ist dann

$$AB + a = m^2,$$
$$AC + a = (m \mp x)^2,$$
$$BC + a = \frac{(m^2 \mp mx - a)^2}{x^2}.$$

Ebenso ist die Auflösung von Nr. 13. Es werden die drei Zahlen

$$A = x, \quad B = \frac{m^2 + a}{x}, \quad C = \frac{(m \mp x)^2 + a}{x}.$$

Aufgabe 14. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product von je zweien wieder ein Quadrat wird, wenn man die dritte dazu addirt.

$AB + C$, $AC + B$, $BC + A$ sollen Quadrate werden.

Sei $$AB + C = m^2,$$
$$AC + B = n^2,$$
so ist $$(A-1)(B-C) = m^2 - n^2.$$

Sei nun $$A - 1 = m + n, \quad A = m + n + 1,$$
so ist $$B - C = m - n,$$
$$AC + B = B + (m + n + 1)\,C = n^2,$$
$$(m + n + 2)\,C = n^2 - m + n,$$
also $$C = \frac{n^2 - m + n}{m + n + 2},$$
$$B = C + m - n = \frac{m^2 + m - n}{m + n + 2},$$
$$BC + A = \frac{m^2(n+2)^2 + 4m(n^2 + 3n + 2) + 4(n+1)^2}{(m+n+2)^2},$$
$$= \frac{[m(n+2) + 2(n+1)]^2}{(m+n+2)^2}.$$

Daher ist durch die blosse Annahme auch die dritte Bedingung erfüllt. Die drei Zahlen sind also

$$A = m + n + 1,$$
$$B = \frac{m^2 + m - n}{m + n + 2},$$
$$C = \frac{m^2 - m + n}{m + n + 2}.$$

Man konnte auch setzen:

$$A - 1 = m - n, \quad A = m - n + 1,$$
so wäre $$B - C = m + n,$$
$$B + (m - n + 1)\,C = n^2,$$
$$C = \frac{n^2 - m - n}{m - n + 2},$$
$$B = \frac{m^2 + m + n}{m - n + 2},$$
$$BC + A = \frac{m^2(n-2)^2 + 4m(n-1)(n-2) + 4(n-1)^2}{(m-n+2)^2},$$
$$= \frac{\{m(n-2) + 2(n-1)\}^2}{(m-n+2)^2}.$$

Die drei Zahlen sind also:

$$A = m - n + 1, \quad B = \frac{m^2 + m + n}{m - n + 2}, \quad C = \frac{n^2 - m - n}{m - n + 2}.$$

Lösung nach Diophant.

$$AB + C, \quad AC + B, \quad BC + A$$

sollen Quadrate sein. Diophant setzt:

$$AB + C = x^2 + 2mx + m^2,$$
$$C = m^2,$$
$$AB = x^2 + 2mx,$$
$$A = x, \quad B = x + 2m,$$
$$AC + B = (m^2 + 1)x + 2m = q^2,$$
$$BC + A = (m^2 + 1)x + 2m^3 = p^2,$$
$$p^2 - q^2 = 2m^3 - 2m = 2m(m^2 - 1),$$
$$p + q = \frac{r}{t}(m^2 - 1),$$
$$p - q = \frac{2t}{r} m$$
$$p = \frac{r^2m^2 + 2t^2m - r^2}{2rt}, \quad q = \frac{r^2m^2 - 2t^2m - r^2}{2rt},$$
$$x = \frac{r^4m^4 - 4r^2t^2m^3 - 2r^4m^2 + 4t^4m^2 - 4r^2t^2m + r^4}{4(m^2+1)r^2t^2},$$
$$= \frac{(m^2-1)^2t^2 - 4t^2m(m^2+1)r^2 + 4t^4m^2}{4(m^2+1)r^2t^2}.$$

Die Annahme $C = m^2$ macht, gegen die Forderung der Aufgabe, C zu einem Quadrate.

Aufgabe 15. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die dritte Zahl davon abzieht.

Sei
$$AB - C = m^2, \quad AC - B = n^2,$$
so ist
$$(A+1)(B-C) = m^2 - n^2,$$
$$A + 1 = m + n, \quad A = m + n - 1,$$
$$B - C = m - n,$$
also
$$-B + (m + n - 1)C = n^2,$$
$$C = \frac{n^2 + m - n}{m + n - 2},$$
$$B = \frac{m^2 - m + n}{m + n - 2},$$
$$BC + A = \frac{[m(n-2) + 2(n-1)]^2}{(m+n-2)^2}.$$

Man konnte auch setzen:
$$A + 1 = m - n, \quad B - C = m + n,$$
$$(m - n - 1)C - B = n^2,$$
$$C = \frac{n^2 + m + n}{m - n - 2}, \quad B = \frac{m^2 - m - n}{m - n - 2},$$
dann wird
$$BC - A = \frac{[m(n+2) + 2(n+1)]^2}{(m-n-2)^2}.$$

Aufgabe 16. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product aus je zweien ein Quadrat wird, wenn man das Quadrat der dritten dazu addirt.

1. Es soll sein $x^2 + yz = a^2$, $y^2 + xz = b^2$, $z^2 + xy = c^2$. Setzt man $z = x - \frac{1}{4}y = m^2 y - 2mx$, so wird zweien Forderungen genügt, und es findet sich $m = \frac{11}{16}$ oder $= \frac{1216}{781}$. Der erste Werth giebt die Auflösung $x = 185$, $y = 608$, $z = 33$; der zweite giebt sehr grosse Zahlen.

2. $AB + C^2$, $AC + B^2$, $BC + A^2$ Quadrate.

Sei
$$C = \frac{m^2 A - B}{2m},$$
so ist
$$AB + C^2 = \frac{(m^2 A + B)^2}{4m^2}.$$

Sei ferner $C = p^2 B - 2pA$, so ist $BC + A^2 = (pB - A)^2$. Die beiden Werthe von C einander gleich gesetzt, giebt
$$m^2 A - B = 2mp^2 B - 4mpA,$$
also
$$\frac{B}{A} = \frac{m^2 + 4mp}{2mp^2 + 1},$$
daher ist $A = 2mp^2 + 1$, $B = m^2 + 4mp$, $C = m^2p^2 - 2p$,
$$AC + B^2 = (2mp^2 + 1)(m^2p^2 - 2p) + (m^2 + 4mp^2)^2,$$
$$= m^4 + 2p(p^3 + 4)m^3 + 17p^2m^2 - 4p^3m - 2p.$$

Dieser Ausdruck soll Quadrat werden; er sei
$$= [m^2 + p(p^3 + 4)m - \frac{1}{2}p(p^6 + 8p^3 - 1)]^2,$$
so heben sich die drei ersten Glieder gegenseitig, und es bleibt übrig
$$-4p^3m - 2p = -p^3(p^3 + 4)(p^6 + 8p^3 - 1)m + \frac{1}{4}p^4(p^6 + 8p^3 - 1)^2,$$
also
$$m = \frac{p^3(p^6 + 8p^3 - 1)^2 + 8}{4p^2(p^3 + 4)(p^6 + 8p^3 - 1) - 16p^2}.$$

Wenn man die Klammern auflöst, lässt sich der Bruch durch $p^3 + 8$ heben, und es bleibt:
$$m = \frac{p^{12} + 8p^9 - 2p^6 + 1}{4p^2(p^6 + 4p^3 - 1)} = \frac{(p^6 + 4p^3 - 1)^2 - (4p^3 - 1)^2 + 1}{4p^2(p^6 + 4p^3 - 1)}.$$

3. In der Diophant'schen Lösung setzt dieser $16x^2 + 33x + 16 = (4x - 5)^2$. Dazu macht Nesselmann folgende Bemerkung:

Setzt man die Wurzel $= 4x \pm \frac{m}{n}$, so wird $x = \frac{m^2 - 16n^2}{33n^2 \pm 8mn}$, also sind die Zahlen $m^2 - 16n^2$, $4m^2 \pm 32mn + 68n^2$, $33n^2 \pm 8mn$, wo dann in Diophant's Beispiel $m = 5$, $n = 1$ ist. Die Summe aller drei Zahlen ist immer die Summe zweier Quadrate, nämlich $4m^2 + 81n^2 \pm 36mn$, $m^2 + 4n^2 \pm 4mn$.

Aufgabe 17 und 18. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die Summe beider Zahlen dazu addirt.

$$AB + A + B, \quad AC + A + C, \quad BC + B + C \text{ Quadrate.}$$

Sei
$$AB + A + B = m^2, \quad AC + A + C = n^2,$$
daher
$$B = \frac{m^2 - A}{A+1}, \quad C = \frac{n^2 - A}{A+1},$$
so ist:
$$BC + B + C = \frac{(m^2 - A)(n^2 - A)}{(A+1)^2} + \frac{m^2 - A}{A+1} + \frac{n^2 - A}{A+1},$$
$$= \frac{m^2 n^2 + m^2 + n^2 - 2A - A^2}{(A+1)^2},$$
damit $m^2 n^2 + m^2 + n^2$ Quadrat sei, muss $n = m - 1$ sein, dann ist
$$m^2 n^2 + m^2 + n^2 = (m^2 - m + 1)^2,$$
also
$$BC + B + C = \frac{(m^2 - m + 1)^2 - 2A - A^2}{(A+1)^2}.$$

Sei also
$$(m^2 - m + 1)^2 - 2A - A^2 = \left[(m^2 - m + 1) - \frac{p}{q} A\right]^2,$$
$$= (m^2 - m + 1)^2 - \frac{2p}{q}(m^2 - m + 1) A + \frac{p^2}{q^2} A^2,$$
dann ist
$$A = \frac{2pq(m^2 - m + 1) - 2q^2}{p^2 + q^2},$$
$$A + 1 = \frac{p^2 + 2pq(m^2 - m + 1) - q^2}{p^2 + q^2}$$
$$m^2 - A = \frac{m^2 p^2 - 2pq(m^2 - m + 1) + (m^2 + 2) q^2}{p^2 + q^2},$$
$$n^2 - A = \frac{(m-1)^2 p^2 - 2pq(m^2 - m + 1) + [(m-1)^2 + 2] q^2}{p^2 + q^2}.$$

Demnach sind die drei Zahlen:
$$A = \frac{2pq(m^2 - m + 1) - 2q^2}{p^2 + q^2},$$
$$B = \frac{m^2 p^2 - 2pq(m^2 - m + 1) + (m^2 + 2) q^2}{p^2 + 2pq(m^2 - m + 1) - q^2},$$
$$C = \frac{(m-1)^2 p^2 - 2pq(m^2 - m + 1) + [(m-1)^2 + 2] q^2}{p^2 + 2pq(m^2 - m + 1) - q^2}.$$

Diophant's Auflösung nimmt folgenden Gang:

I. Sucht er zwei Zahlen A und B, so dass $AB + A + B$ ein Quadrat wird. Sei
$$A = a, \quad B = x,$$
so ist
$$AB + A + B = (a+1)x + a = b^2,$$
$$x = \frac{b^2 - a}{a+1}.$$

Ist also $A = a$, so muss $B = \frac{b^2 - a}{a + 1}$ sein, dann ist $AB + A + B$ ein Quadrat. Es sollen aber auch $AC + A + C$ und $BC + B + C$ Quadrate sein. Sei nun $C = x$, so sollen auch

$$AC + A + C, \text{ das ist } (a + 1)x + a$$

und

$$\left(\frac{b^2 - a}{a + 1} + 1\right) x + \frac{b^2 - a}{a + 1}$$

Quadrate sein.

Aber in dieser Doppelgleichung sind weder die entsprechenden Coefficienten gleich, noch verhalten sie sich zu einander wie Quadrate. Darum müssen für a und $\frac{b^2 - a}{a + 1}$ andere Zahlen gefunden werden.

II. Suchen wir zunächst zwei Zahlen y und z, so dass $y + 1$ und $z + 1$ sich wie zwei Quadratzahlen verhalten, also

$$(y + 1) : (z + 1) = m^2 : n^2,$$
$$n^2 y + n^2 = m^2 z + m^2,$$
$$z = \frac{n^2 y + n^2 - m^2}{m^2},$$

so haben wir in y und $\frac{n^2 y + n^2 - m^2}{m^2}$ zunächst zwei Zahlen, deren um 1 Vermehrte sich wie Quadratzahlen verhalten. Nun sollen sie auch noch die Bedingung erfüllen, dass sie für A und B gesetzt $AB + A + B$ zu einem Quadrate machen, also

$$y \cdot \frac{n^2 y + n^2 - m^2}{m^2} + y + \frac{n^2 y + n^2 - m^2}{m^2} = p_1^2$$

geordnet:

$$n^2 y^2 + 2ny + n^2 - m^2 = p_1^2 = (ny - p)^2,$$

so wird

$$y = \frac{p^2 + m^2 - n^2}{2np + 2n^2} = \frac{p^2 + m^2 - n^2}{2n(p + n)}.$$

Setzen wir diesen Werth für y in den Ausdruck $\frac{n^2 y + n^2 - m^2}{m^2}$, so wird die andere Zahl

$$\frac{n(n + p)^2 - m^2(n + 2p)}{2m^2(n + p)}.$$

III. Nun setzen wir die drei gesuchten Zahlen

$$A = \frac{p^2 + m^2 - n^2}{2n(n + p)}, \quad B = \frac{n(n + p)^2 - m^2(n + 2p)}{2m^2(n + p)}, \quad C = x,$$

so werden die beiden übrigen Gleichungen für $AC + A + C$ und $BC + B + C$,

$$\frac{(n + p)^2 + m^2}{2n(n + p)} x + \frac{p^2 + m^2 - n^2}{2n(n + p)} = h^2,$$

$$\frac{n(n + p)^2 + m^2 n}{2m^2(n + p)} x + \frac{n(n + p)^2 - m^2(n + 2p)}{2m^2(n + p)} = k^2$$

oder, wenn wir h^2 mit $\frac{n^2}{m^2}$ grössern

$$\frac{n(n + p)^2 + m^2 n}{2m^2(n + p)} x + \frac{n(p^2 + m^2 - n^2)}{2m^2(n + p)} = h_1^2.$$

Nun sind in beiden Gleichungen die Coefficienten von x einander gleich, und die Doppelgleichung lässt sich auflösen; es wird nämlich

$$h_1^2 - k^2 = \frac{m^2 - n^2}{n^2},$$

das sich auf verschiedene Art in zwei Factoren zerlegen lässt.

Aufgabe 19. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die Summe beider Zahlen davon abzieht.

$$AB - (A + B), \quad AC - (A + C), \quad BC - (B + C) \text{ Quadrate.}$$

$$AB - (A + B) = m^2,$$

$$AC - (A + C) = n^2,$$

also

$$B = \frac{m^2 + A}{A - 1}, \quad C = \frac{n^2 + A}{A - 1},$$

$$BC - (B + C) = \frac{(m^2 + A)(n^2 + A)}{(A - 1)^2} - \frac{m^2 + n^2 + 2A}{A - 1}$$

$$= \frac{m^2 n^2 + m^2 + n^2 + 2A - A^2}{(A - 1)^2}.$$

Damit nun $m^2 n^2 + m^2 + n^2$ Quadrat werde, sei $n = m - 1$, so wird

$$BC - (B + C) = \frac{(m^2 - m + 1)^2 + 2A - A^2}{(A - 1)^2},$$

$$(n^2 - m + 1)^2 + 2A - A^2 = (m^2 - m + 1 - \frac{p}{q} A)^2,$$

woraus folgt:

$$A = \frac{2pq(m^2 - m + 1) + 2q^2}{p^2 + q^2},$$

$$A - 1 = \frac{q^2 + 2pq(m^2 - n + 1) - p^2}{p^2 + q^2},$$

$$B = \frac{m^2 p^2 + 2pq(m^2 - m + 1) + (m^2 + 2)q^2}{q^2 + 2pq(m^2 - m + 1) - p^2},$$

$$C = \frac{(m - 1)^2 p^2 + 2pq(m^2 - m + 1) + \{(m - 1)^2 + 2\} q^2}{q^2 + 2pq(m^2 - m + 1) - p^2}.$$

Aufgabe 20. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product ein Quadrat wird, mag man eine jede der beiden Zahlen einzeln, oder die Summe von beiden dazu addiren.

1) $\quad AB + A, \quad AB + B, \quad AB + A + B$ Quadrate.

Sei $A = x$, $B = mx^2 - 1$, so ist $AB = m^2 x^2 - x$, also $AB + A = m^2 x^2$, also eine Bedingung erfüllt; es bleibt übrig

$$AB + B = m^2 x^2 + (m^2 - 1)x - 1 = q^2,$$

$$AB + A + B = m^2 x^2 + m^2 x^2 - 1 = p^2,$$

folglich:

$$p^2 - q^2 = x = 2mx \cdot \frac{1}{2m},$$

$$p = mx + \frac{1}{4m}, \quad q = mx - \frac{1}{4m},$$

also

$$x = A = \frac{16m^2 + 1}{8m^2(2m^2 - 1)}, \quad B = \frac{9}{8(2m^2 - 1)}.$$

2) Man konnte auch setzen

$$A = x - 1, \quad B = m^2 x, \text{ also } AB = m^2x^2 - m^2x,$$

dann ist

$$AB = m^2x^2 - m^2x, \quad AB + B = m^2x^2,$$

$$AB + A = m^2x^2 - (m^2 - 1)x - 1 = q^2,$$

$$AB + A + B = m^2x^2 + x - 1 = p^2,$$

$$p^2 - q^2 = m^2x = 2mx \cdot \frac{1}{2}m,$$

$$p = mx + \frac{1}{4}m, \quad q = mx - \frac{1}{4}m,$$

$$x = \frac{m^2 + 16}{8(2 - m^2)},$$

$$A = \frac{9m^2}{8(2 - m^2)}, \quad B = \frac{m^2(m^2 + 16)}{8(2 - m^2)}.$$

Aufgabe 21. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product ein Quadrat wird, man mag nun jede der beiden Zahlen einzeln oder die Summe beider davon abziehen.

$$AB - A, \quad AB - B, \quad AB - (A + B) \text{ Quadrate.}$$

1) Sei $A = x$, $B = m^2x + 1$, also $AB = m^2x + x$, so ist $AB - A = m^2x^2$, also eine Bedingung erfüllt. Es bleibt übrig:

$$AB - B = m^2x^2 - (m^2 - 1)x - 1 = p^2,$$

$$AB - (A + B) = m^2x^2 - m^2x - 1 = q^2,$$

$$p^2 - q^2 = x = 2mx \cdot \frac{1}{2m},$$

$$p = mx + \frac{1}{4m}, \quad q = mx - \frac{1}{4m},$$

$$x = A = \frac{16m^2 + 1}{8m^2(1 - 2m^2)}, \quad B = \frac{9}{8(1 - 2m^2)}.$$

2) Sei $A = x + 1$, $B = m^2x$, so ist $AB = m^2x^2 + m^2x$, also

$$AB - B = m^2x^2,$$

$$\left.\begin{aligned} AB - A &= m^2x^2 + (m^2 - 1)x - 1 = p^2 \\ AB - (A + B) &= m^2x^2 - x - 1 = q^2, \end{aligned}\right\} p^2 - q^2 = m^2x = 2mx \cdot \frac{1}{2}m,$$

$$p = mx + \frac{1}{4}m, \quad q = mx - \frac{1}{4m}, \quad \text{also } x = \frac{m^2 + 16}{8(m^2 - 2)},$$

$$A = \frac{9m^2}{8(m^2 - 2)}, \quad B = \frac{m^2(m^2 + 16)}{8(m^2 - 2)}.$$

Aufgabe 23 und 24. Man soll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und ein Quadrat suchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwedes Stück der gegebenen Zahl davon abzieht (23), oder hinzu addirt (24).

Beide Aufgaben sind schon II; 16, 15 dagewesen, dort aber anders gelöst. Es soll

$$A + B = a,$$
$$x^2 \pm A = p^2,$$
$$x^2 \pm B = q^2$$

sein. Setze

$$A = p^2 \pm 2px, \quad B = q^2 \pm 2qx,$$

so sind $x^2 \pm A$ und $x^2 \pm B$ Quadrate; es bleibt nur noch $A + B = a$ zu machen.

$$a = p^2 + q^2 \pm 2(p+q)x.$$

Es wird also im ersten Falle

$$x = \frac{a - (p^2 + q^2)}{2(p+q)},$$

im zweiten Falle

$$x = \frac{p^2 + q^2 - a}{2(p+q)},$$

oder allgemein $x = \pm \frac{a - (p^2 + q^2)}{2(p+q)}$.

(Schluss folgt.)

Recensionen.

Ueber Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen. Von Dr. J. Horn. Berlin, Mayer und Müller. 1891.

Bei der Behandlung des Problems, ob eine Function zweier Veränderlichen durch ihre Unstetigkeiten und ihre Verzweigungsweise in ähnlicher Weise definirt werden könne, wie es Riemann für die Gauss'sche Reihe gethan, gelangte Herr Picard zu einer Function, die sich als das allgemeine Integral eines gewissen Systems linearer partieller Differentialgleichungen darbot. Herr Appell wies darauf hin, dass es möglich sein müsse, unabhängig von jener Definition das Verhalten der Function allein aus den Differentialgleichungen zu erkennen, mit anderen Worten, das System dreier linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=A_0 z+A_1\frac{\partial z}{\partial x}+A_2\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=B_0 z+B_1\frac{\partial z}{\partial x}+B_2\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=C_0 z+C_1\frac{\partial z}{\partial x}+C_2\frac{\partial z}{\partial y}$$

mit drei linear unabhängigen Integralen in ähnlicher Weise zu integriren, wie es Herr Fuchs bei den gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen gethan. Somit bot sich die Aufgabe dar, die Fuchs'sche Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen für Systeme linearer partieller Differentialgleichungen zu verallgemeinern, eine Aufgabe, die zuerst von Herrn Sauvage in Angriff genommen wurde. Statt der Systeme partieller Differentialgleichungen betrachtet Herr Sauvage Systeme totaler linearer Differentialgleichungen, auf welche sich jene zurückführen lassen, und zwar behandelt er zunächst erschöpfend den einfachsten Fall von m totalen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen und m abhängigen Variablen nach einer Methode, die der Verallgemeinerung fähig ist. Die vorliegende Habilitationsschrift hat den weiteren Ausbau derselben Theorie zum Gegenstande und bildet die Fortsetzung und Ergänzung einer in den Acta mathematica erschienenen Abhandlung desselben Verfassers. Es wird der Betrachtung zur Vorbereitung des allgemeinen Falles das obengenannte besondere

System zu Grunde gelegt. Als Hilfsmittel für dessen Integration dient auch hier die Theorie der Systeme totaler linearer Differentialgleichungen, welche hier noch stärker als in der früheren Abhandlung herangezogen wird. Der Gang und die Resultate der Untersuchung sind kurz folgende.

Der Verfasser schickt einige allgemeine Erörterungen über das functionentheoretische Verhalten der Integrale von Systemen linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen voraus, wobei der Begriff des Fundamentalsystems auch hier eingeführt und die Darstellungsformen der Zweige eines solchen angegeben werden. Ebenso wird der Begriff der Regularität für das vorliegende Differentialgleichungssystem fixirt. Es folgt die Aufstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit das in Rede stehende System an einem singulären Gebilde $\varphi(x, y) = 0$ lauter reguläre Integrale besitze. Diese Aufgabe löst der Verfasser schrittweise, indem er jene Bedingungen zunächst für totale Systeme mit einer oder zwei unabhängigen und zwei oder drei abhängigen Variablen nach dem Vorgange von Herrn Sauvage aufsucht und diese Resultate nun auf das oben genannte System linearer partieller Differentialgleichungen überträgt. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem sämmtliche Coefficienten A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 durch φ theilbar sind oder nicht. In beiden Fällen verlangen die gewonnenen Bedingungen (die Integrabilitätsbedingungen als erfüllt vorausgesetzt) das Vorhandensein dreier ganzen Functionen $\varkappa$, λ, μ, die so beschaffen sind, dass gewisse Functionen, die zu $\varkappa$, λ, μ und den Coefficienten des gegebenen Differentialgleichungssystems in einfachen Beziehungen stehen, an den Stellen des singulären Gebildes $\varphi = 0$ in Potenzreihen entwickelbar sind. Diese Potenzreihen sind bei Fall II resp. durch φ, φ^{h-1}, φ^h, bei Fall I resp. durch 1, φ^{h-1} theilbar. Dem Werthe $h = 1$ entspricht im letzteren Falle ein System, welches vor allen anderen dadurch ausgezeichnet ist, dass es regulär ist, ohne dass zwischen seinen Coefficienten andere als die Integrabilitätsbedingungen bestehen, und dass es sich unmittelbar in ein kanonisches totales System überführen lässt. Die im allgemeinen Falle erforderlichen Substitutionen, um das gegebene System in ein kanonisches überzuführen, werden gleichfalls angegeben. Hieran schliesst sich die Aufgabe, bei den gefundenen regulären Systemen die Form der Integrale in der Umgebung der singulären Stellen genauer zu untersuchen, dies geschieht für totale und partielle Systeme, im Falle zweier unabhängigen Veränderlichen nur an solchen singulären Stellen, die nicht mehreren singulären Gebilden gleichzeitig angehören, eine Aufgabe, die der Verfasser einer von Herrn Grünfeld eingeschlagenen Methode folgend und die diesbezügliche Grünfeld'sche Untersuchung ergänzend löst. Auch hier ist wieder zu unterscheiden, ob die regulären partiellen Systeme von der ersten oder zweiten Gattung (Fall II oder I) sind. Jedes System der zweiten Gattung, für welches $h > 1$, besitzt ein Fundamentalsystem der Form

$$z_k = \varphi^p \zeta_k, \quad k = 0, 1, 2,$$

wo ζ_0, ζ_1, ζ_2 Potenzreihen von $x-a$, $y-b$ sind und p einer gewissen Congruenz zu genügen hat. Für $h=1$ können dagegen in den Fundamentalsystemen Logarithmen auftreten. Das oben gekennzeichnete einfachste System der zweiten Gattung nimmt also eine Sonderstellung ein. Bei dem regulären System erster Gattung können sowohl für $h=1$ wie für $h>1$ Fundamentalsysteme mit Logarithmen auftreten. Der letzte Paragraph enthält noch Andeutungen über das Verhalten der Integrale an den Schnittstellen zweier singulären Gebilde. E. Jahnke.

Beiträge zur Theorie der Gleichungen von Dr. H. Scheffler. Leipzig, Foerster. 1891. 133 S.

Der Beweis, den Abel, auf die Substitutionstheorie gestützt, für die Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften und höheren Grades gegeben hat, berührt nicht die speciellen Fälle, wo eine Gleichung solchen Grades lösbar wird, so dass er kein Merkmal feststellt, woran die Unlösbarkeit einer gegebenen Gleichung erkannt werden könnte. Diese Lücke auszufüllen, einen Beweis zu geben, der zugleich das Kennzeichen der Lösbarkeit der lösbaren höheren Gleichungen liefert, ist das Ziel des durch Arbeiten in verschiedenen Gebieten des Wissens bekannten Verfassers. Seinen Beweis bezeichnet der Herr Verfasser als einen ungleich einfacheren, da er nicht „durch Gebiete führt, die durch die Arbeiten von Abel, Cauchy, Bertrand u. A. über die cyklische Permutation und über die Vielwerthigkeit der Functionen in Folge der Vertauschung der Variablen zu förmlichen Hilfstheorien ausgebildet worden sind". Das Merkmal, welches für die Lösbarkeit einer Gleichung aufgestellt wird, hält der Herr Verfasser für „völlig allgemein, nämlich weder an die Unzerlegbarkeit der Gleichung noch an die Primitivität ihres Grades gebunden". Dabei ergiebt sich für den Herrn Verfasser „ein von dem Grade der Gleichung unabhängiges Auflösungsverfahren". Durch dieses „entwickeln sich die Hauptsätze über die Form der Wurzeln einer Gleichung auf sehr einfache Weise, was demselben gegenüber den sehr schönen, aber viel complicirteren Operationen von Lagrange, Galois u. A. um so mehr zur Empfehlung gereichen möchte, als die letzteren Theorien doch den wahren Grund der Vieldeutigkeit oder Vielfachheit der Wurzel einer Gleichung nicht aufdecken, ein Grund, der lediglich in der Vielwerthigkeit der Coefficienten der gegebenen Gleichung liegt". „Demzufolge, betont der Herr Verfasser an anderer Stelle, und da auch deutsche Gelehrte, u. A. Kronecker sich erfolglos um das allgemeine Princip bemüht haben, darf ich hoffen, durch die vorliegenden Arbeiten eine Lücke in der Wissenschaft ausgefüllt zu haben." E. Jahnke.

Elementargeometrie. Von F. Roese. Wismar, Hinstorff. 1890. 98 S.

In der Vorrede vorliegenden Buches bemerkt der Herr Verfasser, dass in der Gegenwart „die Lehrerwelt mehr als je Veranlassung hat, sich mit der Verbesserung der Unterrichtsmethoden zu beschäftigen.“ Nichtsdestoweniger bietet die hier gegebene Darstellung, verglichen mit den ausgezeichneten Lehrbüchern von Mehler, Spieker, Gallenkamp, Martus, keine nennenswerthen methodischen Verbesserungen, obwohl solche in der That noch möglich und nothwendig sind — man müsste denn die jedem Abschnitt angefügte Zusammenstellung der in demselben vorkommenden Lehrsätze als Verbesserung der Unterrichtsmethode auffassen. E. Jahnke.

5000 Aufgaben nebst Resultaten aus der Bruchrechnung. Von F. Roese. Wismar, Hinstorff. 1890. 46 S.

Theilt man — so heisst es in der Vorrede — jedem Schüler eine besondere von den mit Buchstaben überschriebenen Zahlengruppen zu, giebt aber allen gemeinschaftlich eine und dieselbe von den mit Zahlen überschriebenen Gruppen, dann hat jeder Schüler eine andere Aufgabe zu rechnen und doch erhalten sie sämmtlich dasselbe Resultat. E. Jahnke.

Algebra. Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen. Von Prof. W. Winter. München, Ackermann. 1891. 329 S.

Verglichen mit den bekannten Aufgabensammlungen von Bardey, Heis und den neueren von Wrobel, Fenker, die so eingerichtet sind, dass sie ein besonderes Lehrbuch entbehrlich machen, zeigt das vorliegende Buch keine methodischen Eigenheiten. Da indessen zahlreiche Aufgaben gegeben sind, von denen ein grosser Theil neu ist, so wird das Buch aus diesem Grunde manchem der Herren Fachgenossen willkommen sein.

E. Jahnke.

Systematischer Grundriss der Elementarmathematik. Erste Abtheilung: Die Algebra und die Grundbegriffe der Differentialrechnung. Für den Gebrauch an höheren Lehranstalten. Von Prof. Dr. E. Fischer. Berlin, Duncker, 1891. 163 S. M. 2,25.

Der vorliegende, durch Knappheit der Darstellung ausgezeichnete Grundriss bringt eine Reihe von Entwickelungen und Beweisen, von denen sich ein Theil überhaupt nur in wenigen Lehrbüchern findet, während die übrigen vom Verfasser selbst herrühren. Dahin gehören u. A. die Berechnung eines Parabelflächenstückes, der Satz, dass $\Sigma n^3 = (\Sigma n)^2$, die Herleitung der sinus- und cosinus-Reihen, welche als arithmetische Reihen unendlicher Ordnung aufgefasst werden, der Beweis des binomischen Lehrsatzes für eine Potenz mit dem Exponenten $p + qi$, wo p, q positive oder

negative, ganze oder gebrochene Zahlen bezeichnen, und endlich eine einfache Entwicklung der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung. In Bezug auf Uebungsbeispiele wird auf die vorhandenen Aufgabensammlungen, insbesondere auch auf die vom Verfasser bearbeitete und herausgegebene „Sammlung und Auflösung mathematischer Aufgaben von K. H. Schellbach" verwiesen. Soeben ist die zweite Abtheilung erschienen, welche die Geometrie behandelt.

E. Jahnke.

Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Anhang für höhere realistische Lehranstalten. Von Dr. E. Wrobel. Rostock, Werther. 1891. M. 0,80.

Dem Anhange eignen die gleichen didactischen Vorzüge, wie sie die beiden ersten Theile des Wrobel'schen Uebungsbuches auszeichnen, und welche Referent schon Gelegenheit gehabt hat hervorzuheben. Der Verfasser behandelt ausführlich die Auflösungsmethoden specieller Gleichungen dritten und vierten Grades, sowie die allgemeine kubische und biquadratische Gleichung, ferner die Auflösung numerischer Gleichungen durch Näherung, wobei auch einige der bekannteren Sätze über die Anzahlbestimmung der positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung Anwendung finden, und endlich noch die Auflösung der allgemeinen binomischen Gleichung n^{ten} Grades vermittelst des Moivre'schen Lehrsatzes. Die Convergenz unendlicher Reihen, sowie die Entwicklung der Functionen in Reihen finden eingehende Berücksichtigung. Das Schlusscapitel ist der Betrachtung der extremen Werthe einer Function gewidmet, es werden verschiedene Methoden, die in besonderen Fällen anwendbar sind, erörtert, u. a. die von Herrn Schellbach herrührende und im Anschluss noch die allgemeinste Methode, welche die Differentialrechnung liefert.

E. Jahnke.

Synopsis der höheren Mathematik. Von Johann G. Hagen, S. J., Director der Sternwarte des Georgetown College, Washington, D. C., I. Band: Arithmetische und algebraische Analyse. Berlin 1891. Verlag von Felix L. Dames. VIII, 398 S.

Es ist ein ganz grossartig angelegtes Werk, über dessen I. Band wir hier zu berichten haben. H. Hagen bezweckt — das sind seine eigenen Worte in der Vorrede — „eine Rundschau, eine Durchmusterung der höheren Mathematik. Einer Karte vergleichbar, soll das Werk ein Netz übersichtlicher Eintheilung ausspannen und auf demselben den vorhandenen Stoff bis zu einer angenommenen Vollständigkeitsgrenze eintragen, damit der Studirende sich auf dem weiten vor ihm liegenden Felde zurechtfinden könne". In diesem Bilde kommen zwei Ausdrücke vor, welche sehr glücklich gewählt erscheinen. Erstlich ist von einer angenommenen Vollständigkeitsgrenze die Rede. Wer auch nur die Nummernzahl der Abhandlungen

vergleicht, welche alljährlich in dem in dieser Zeitschrift veröffentlichten Abhandlungsregister erscheinen, wird sofort erkennen, dass eine Vollständigkeit im ganzen Sinne des Wortes unerreichbar ist, oder wenn erreichbar unerwünscht. Die Menge der bekannten und der jährlich neu hinzutretenden Sätze ist eine so ungeheuer grosse, dass bei Aufnahme von sämmtlichen, eine Uebersicht, ein Sichzurechtfinden in dem Materiale auch bei sorgfältigster Anordnung zur Unmöglichkeit werden müsste. Und zweitens ist der Vergleich mit einer Karte glücklich gewählt. Wie auf der Karte die angegebenen Punkte nicht besonders gerechtfertigt werden, so sind auch in der Synopsis die Sätze einfach genannt, nicht bewiesen; ja es könnte in weniger durchforschten Gebieten der Fall vorkommen, dass Behauptungen zum Eintrage gelangten, welche später sich als irrig erweisen werden. Unsere Leser haben vielleicht aus diesen kurzen Bemerkungen einen Eindruck davon erhalten, welcher Art das von Herrn Hagen geplante Werk sein mag. Der nunmehr vor uns liegende Band enthält zwölf Abschnitte: I. Theorie der Zahlen, II. Theorie der complexen Grössen, III. Theorie der Combinationen, IV. Theorie der Reihen, V. Theorie der Productreihen und Fakultäten, VI. Theorie der Kettenbrüche, VII. Theorie der Differenzen und Summen, VIII. Theorie der Functionen, IX. Theorie der Determinanten, X. Theorie der Invarianten, XI. Theorie der Substitutionsgruppen, XII. Theorie der Gleichungen. Jeder Abschnitt zerfällt wieder in Capitel, deren es im Ganzen 102 giebt. In ihnen sind die wichtigsten Sätze und Formeln vereinigt, welche den betreffenden Gebieten angehören. Beweise und Ableitungen würde man vergeblich suchen, dagegen sind meistens die Quellenschriften angegeben, wo man in dieser Beziehung sich Rath verschaffen kann. Ein Werk für solche, welche die Mathematik systematisch erlernen wollen, ist Herrn Hagen's Synopsis demnach nicht, und will es nicht sein. Darum ist auch keineswegs vermieden, in irgend einem Capitel Kenntnisse vorauszusetzen, von denen in viel späteren Capiteln erst die Rede ist. Das Werk soll demjenigen, der bei seinen Arbeiten irgend ein Gebiet streift, soweit behilflich sein, dass es ihm das Nachschlagen nach dort geltenden Lehrsätzen theils erleichtert, theils ersetzt. Ob ein solches Werk seinen Zweck zu erfüllen geeignet ist, lässt sich nur nach vielfältiger Benutzung entscheiden. Eine flüchtige Durchsicht, welche allein uns möglich war, wenn wir die Ankündigung nicht weit über Gebühr verzögern wollten, gab uns indessen den Eindruck einer ungemein grossen Belesenheit des Verfassers, jedenfalls der ersten nothwendigen Bedingung zur Erreichung des von ihm angestrebten Zieles.

Cantor.

Repetitorium der Differential- und Integralrechnung. Von Chr. G. Joh. Deter, Dr. phil. 2. Auflage. Berlin 1892. Verlag von Max Rockenstein. 118 S.

Die allereinfachsten Sätze der Differential- und Integralrechnung sind in diesem Büchelchen nach Methoden abgeleitet und bewiesen, welche etwa vor einem halben Jahrhunderte als genügend gegolten haben mögen. Gegenwärtig würden wir keinem Candidaten irgend eines Faches, der des Deter'schen Repetitoriums sich bedient hat, rathen, im Examen die dortigen Beweise zu benutzen. Je sicherer er sich dieselben einprägte, um so zweifelhafter würde das Bestehen. Die Beispiele zur Einübung des Erlernten sind die ganz gewöhnlichen, denen man in jedem, auch dem dürftigsten Leitfaden begegnet. Interessant war dem Referenten nur, dass eine erste Auflage des kleinen Buches verkauft werden konnte, und darin kann ihn auch der Umstand nicht irre machen, den er der Unparteilichkeit zu Liebe mittheilt, dass die Baugewerkszeitung, der Electro-Techniker, der Techniker und das Polytechnische Centralblatt die neue Auflage warm empfehlen. Geschmäcker sind nun einmal verschieden, und ebenso verschieden sind die Ansprüche, welche der Eine und der Andere an eine Druckschrift stellt.

Cantor.

Das Rechnen mit Duodecimalzahlen. Von Dr. Edward Ullrich, Professor. Beilage zum Programm der Realschule zu Heidelberg 1891 (1117). Carl Winter's Universitätsbuchhandlung. Heidelberg 1891. 4°. 30 S.

Das Rechnen mit Zahlen, welche einem anderen Systeme als dem mit der Grundzahl 10 angehören, ist schon oft theils in einzelnen Capiteln von umfassenden Lehrbüchern der Rechenkunst, theils in besonderen kleinen Schriften behandelt worden, und wir hatten in dieser Zeitschrift wiederholt (XXVII, 192; XXIX, 146; XXX, 33 der histor.-literar. Abth.) Gelegenheit, auf solche Schriften aufmerksam zu machen. Ihnen schliesst das Programm des Herrn Ullrich sich an. Der Verfasser hat zuerst in einem geschichtlichen Ueberblick insbesondere mit Johann Friedrich Christian Werneburg (I./IX. 1777 — 21. XI./1851) sich beschäftigt, dem wenig gekannten, aber wirklich verdienstvollen Vorkämpfer des Duodecimalsystems seit 1798. Herr Ullrich hat es verstanden, sich aus den verschiedensten Bibliotheken die sehr seltenen Schriften Werneburgs zu verschaffen, mit einziger Ausnahme der „Kurzen Darstellung eines neuen Zahlen- und darnach gegebenen Maass-, Gewichts- und Münzsystems. Leipzig 1798“, welche für ihn nicht aufzutreiben war. Das Studium von Werneburg's Arbeiten hat Herrn Ullrich gleichfalls von den Vorzügen des Duodecimalsystems vor dem Decimalsystem überzeugt, und wenn er auch viel zu sehr im praktischen Leben steht, um den Wahn zu hegen, eine Verdrängung des minderwerthigen Systems durch das bessere sei durchführbar, so will er doch mit der uns vorliegenden Programmabhandlung „wieder einmal in Erinnerung bringen, wie sehr das Rechnen mit Decimalzahlen abfällt, wenn man es mit der Dodekadik vergleicht“. In dieser Beziehung ist namentlich das siebente (Schluss-)Capitel interessant, in welchem, nach-

dem das Rechnen mit Duodecimalzahlen gelehrt ist, die Vorzüge der Dodekadik vor der Dekadik zusammengestellt erscheinen, Vorzüge, welche nicht blos der Lehre von den Theilbarkeitsregeln angehören, sondern auch als Erleichterung bei Erlernung des Einmaleins „das viel leichter im Gedächtniss zu behalten ist als in der Dekadik“ auftreten.

Cantor.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von J. Henrici, Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe. Erster Theil: Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abbildung ohne Maassänderung. 2. Auflage. Mit 193 Figuren in Holzschnitt. Leipzig bei B. G. Teubner 1891. VIII, 146 S.

Genau zehn Jahre trennen die zweite Auflage von der ersten, welche wir Bd. XXVII, Histor.-literar. Abthlg., S. 139—140, angezeigt haben. Unser damaliges Kriterium für die Brauchbarkeit des Buches, dass der Knabe des Referenten und seine Mitschüler dem Unterrichte nach demselben zu folgen im Stande waren, besteht nicht mehr. Die damaligen Tertianer haben juristische und kameralistische Staatsprüfungen bestanden oder stehen dicht vor denselben. Dagegen kann als neues Kriterium das Erscheinen einer neuen Auflage gelten. Ein pädagogisch unbrauchbares Buch wäre nicht vergriffen worden, so vortrefflich es in dogmatischer Beziehung sein mochte. Wiederholte Auflagen führen für ein Schulbuch eine Gefahr mit sich. Ein wesentliches Erforderniss eines Schulbuches besteht nämlich in seiner Kürze, und wenn nicht alle „vermehrte und verbesserte“ Auflagen das Recht haben die zweite Eigenschaft für sich in Anspruch zu nehmen, die erste besitzen sie fast durchweg. Die Verfasser des uns vorliegenden Lehrbuches haben diese Klippe zu vermeiden gewusst. Die Figuren haben sich zwar um 5 vermehrt, aber der Text um 6 Seiten vermindert, und vermindert hat sich zugleich die Zahl der Lehrsätze, was durch eine Veränderung der Anordnung, insbesondere innerhalb des vollständig neu bearbeiteten zweiten Abschnittes „Strecken und Winkel gradliniger Figuren“ erreicht wurde.

Cantor.

Analytische Geometrie der Ebene. Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben nebst Erläuterungen und Resultaten von J. Schlotke, Lehrer an der allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg. Dresden 1891 bei Gerhard Kühtmann, IV, 217 S.

Die meisten Lehrbücher der analytischen Geometrie der Ebene lassen sich in zwei Gruppen unterbringen, je nachdem sie der Differentialrechnung keinen Eingang gestatten oder derselben von Anfang an sich bedienen. Herr Schlotke ist von dieser Gewohnheit abgewichen. In den fast zwei Drittel das Bändchen füllenden sechs ersten Abschnitten kommt er mit elementaren Hilfsmitteln aus, zu welchen die Lehre von den Determinanten

in ziemlichem Umfange einzurechnen ist, vom VII. Abschnitte an wird Differentialrechnung als bekannt vorausgesetzt. Im Allgemeinen wird indessen die Benutzung des Schlotke'schen Buches sich auf jene sechs ersten Abschnitte beschränken, welche die Geometrie der Geraden, des Kreises und der Kegelschnitte umfassen. Die weiteren Abschnitte beschäftigen sich mit Curven höherer Ordnung, mit Rolllinien, mit Spiralen, mit dem Principe der reciproken Radien, mit Polarfiguren, endlich mit Dreieckscoordinaten. Wer aber diese Lehren kennen lernen will, wird meistens zu einem umfangreicheren Lehrbuche greifen, womit indessen keineswegs gesagt sein soll, dass das uns vorliegende Buch Mangelhaftes bringe; nur der Menge des Stoffes nach können diese letzten Abschnitte nicht als ausreichend gelten. Die ganze Darstellung zeichnet sich in beiden von uns unterschiedenen Abtheilungen durch eine weit eingehendere Benutzung der Liniencoordinaten aus, als man sie sonst in kürzeren Schriften zu finden pflegt. Der Dualismus zwischen Punktcoordinaten und Liniencoordinaten ist von S. 38 an fortwährend festgehalten und gewöhnt den Leser gleichzeitig an jene beiden Hilfsmittel der analytischen Geometrie. Zahlreiche Aufgaben, deren Lösung bald ausführlicher, bald nur durch Angabe des Endergebnisses angedeutet ist, gewähren genügende Uebung zur Aneignung der vorgetragenen Lehren. Die Klarheit der Darstellung ist durchaus rühmend anzuerkennen.

Cantor.

Ueber Singularitäten algebraischer Curven. Von Dr. A. Himstedt, ordentl. Lehrer. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Königl. Progymnasiums zu Löbau, Wpr. 1891 [1891 Programm Nr. 34], 24 S.

Unter diesem etwas volltönenden Titel bespricht der Verfasser Doppelpunkte und dreifache Punkte ebener algebraischer Curven und zeigt mit Zugrundelegung von Figuren, welche die allgemeine Gestaltung solcher Gebilde versinnlichen, wie die Curve in der Nähe jener besonderen Punkte aussehen kann.

Cantor.

Arithmetik für Unterrealschulen. Von Franz Villicus, kais. Rath, emer. Prof. der k. k. Staats-Ober-Realschule in Wien etc. II. Theil für die zweite Classe. Achte verbesserte Auflage. 1889 und III. Theil für die dritte Classe der Realschulen. Sechste verbesserte Auflage. 1890. (Ministeriell approbirt) Wien, Verlag von A. Pichlers Ww. & Sohn. I. Theil 158 S., II. Theil 146 S. 8⁰. Preis jedes Theiles in hübschem Callico-Einbande 1 Mk. 60 Pf.

Die früher erschienene neunte Auflage des ersten Theiles dieser „Arithmetik“ haben wir schon im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift besprochen. Was wir daselbst lobend hervorgehoben kaben, die übersichtliche Anordnung des Stoffes, die klare, leichtverständliche Darstellung, die

passend gewählten Aufgaben, welche ohne grossen Zeitaufwand zum Resultate führen, kennzeichnen auch den vorliegenden II. und III. Theil, die wir in gleicher Weise empfehlen wollen. Aus dem II. Theil wollen wir die dem Capitel „Münzrechnung" vorausgeschickten, geschichtlichen Bemerkungen, aus dem III. die leicht fassliche Einleitung in die Buchstabenrechnung lobend hervorheben.

F. Schütte.

Ausführliches Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. Von Dr. H. Servus, Priv.-Docent an der kgl. techn. Hochschule zu Charlottenburg und ord. Lehrer am Friedrichs-Realgymnasium zu Berlin. Mit zahlreichen Figuren im Texte. In zwei Theilen für Unter- und Obersecunda. I. Theil: Von der Lage der Linien und Ebenen im Raume. Von den körperlichen Ecken. 48 S. Preis kart. 80 Pf. II. Theil: Prisma, Parallelipipedon, Pyramide, Kegel, Cylinder und Kugel. Von den regulären Körpern und Polyedern. Die sphärische Trigonometrie. 144 S. Preis kart. Mk. 2.—. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1891.

Vorliegendes Lehrbuch behandelt die Stereometrie und sphärische Trigonometrie in grösserer Ausführlichkeit, als es die meisten derartigen Lehrbücher zu thun pflegen. Originell ist die Bestimmung des Rauminhaltes der Körper, deren Querschnitte eine Function dritten Grades des Abstandes von der oberen Grundfläche sind, sowie die Benutzung der Simpson'schen Regel für denselben Zweck; ferner die elementare Theorie der Maxima und Minima, insofern sie auf die Lösung von stereometrischen Aufgaben Bezug hat. Die sphärische Trigonometrie ist mit grosser Ausführlichkeit behandelt, ohne dass jedoch eine Anwendung auf die mathematische Geographie gemacht wird; diese behält sich der Verfasser für ein besonderes Werk vor. Dagegen finden wir in den übrigen Abschnitten ausser den Lehrsätzen noch eine Reihe von Aufgaben mit ihren Lösungen. Das Werk zeichnet sich aus sowohl durch die einfache und klare Darstellung, welche überall die Schwierigkeiten leicht beseitigt, als auch durch die treffliche Anordnung des Stoffes. Abgesehen von den Figuren 48 und 49 (Ikosaeder und Dodekaëder), welche so voll von den allergröbsten Fehlern gegen die einfachsten Gesetze der darstellenden Geometrie stecken, dass wir nicht umhin können, dieses besonders hervorzuheben, verdienen die übrigen Figuren wegen ihrer reichen Anzahl und sauberen Ausfürung alles Lob.

F. Schütte.

Raumlehre für höhere Schulen. Von Prof. H. C. E. Martus, Director des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. I. Theil: Ebene Figuren. Bielefeld und Leipzig. Verlag von Velhagen und Klasing. 1890. 159 S. gr. 8°. Preis geh. 2 Mk.

Der Verfasser des so trefflichen und eigenartigen Buches „Astronomische Geographie“ giebt uns in vorliegender „Raumlehre“ ein ebenso treffliches und eigenartiges Werk. Möge es gestattet sein, zunächst auf eine Eigenart näher einzugehen. Es sind nicht nur sämmtliche Fremdwörter, sondern auch die internationalen Ausdrücke der mathematischen Wissenschaft vermieden und durch deutsche Ausdrücke ersetzt. Ausser vielen sich auch anderswo findenden Verdeutschungen braucht der Verfasser z. B. Glied statt Paragraph, Kreishalbmesser — Radius, Winkelmesser — Transporteur, Abweis — indirecter Beweis, gleichlaufend — parallel, gleichliegende Winkel — correspondirende Winkel, ganz übereinstimmend — congruent, Eckenlinien — Diagonalen, kleine Seite — Kathete, grosse Seite — Hypotenuse, Verhältnissgleichheit — Proportion, Mittelglied — dritte Proportionale u. s. w. Man sieht die Verdeutschungen sind recht glücklich gewählt. Statt Centrale sagt Verfasser Achse; wir würden es lieber in Uebereinstimmung mit den meisten Mathematikern „Axe“ schreiben. Deltoid wird durch „gleichschenkliges Viereck“ wiedergegeben; wir würden das kürzere und dem Geschmacke des Schülers gewiss sehr zusagende Wort „Drachen“ dafür vorschlagen. Ueber die Verdeutschung des hässlichen „Parallelogramms“ lässt sich der Verfasser des Näheren in der Vorrede aus. „Spateck“ will er nicht gebrauchen, weil „Spat“ keine bestimmte Gestalt bezeichne, sondern nur auf die Spaltbarkeit sich beziehe; er benutzt daher das Wort „Raute“, obschon dasselbe nur die Bedeutung „Rhombus“ hat. Die Scrupeln des Verfassers scheinen jedoch nicht begründet, wenn man bedenkt, wie viele Mineralien „Spat“ genannt sind, die keineswegs sich durch Spaltbarkeit besonders auszeichnen, wohl aber durch ihre Parallelipipedon-Gestalt. Man hat Kalkspat, Feldspat, Perl-, Eisen-, Zink-, Mangan-Spat, Schwerspat, Flußspat, Braunspat etc. Soviel hierüber. — Eigenartig ist ferner die Einleitung und sehr geeignet, bei dem Anfänger Interesse für die Raumlehre zu erwecken. Reichhaltig ist der Lernstoff bemessen, fast zu reichhaltig — das „Glied“ über „nicht ganz übereinstimmende Dreiecke“ könnte z. B. ganz gut wegfallen — reichhaltig und grösstentheils mit Anleitung zur Lösung versehen ist auch der Uebungsstoff. Sauber und schön sind die Figuren, der Druck (lateinische Antiqua-Schrift) ist deutlich und correct, das Papier gut.

F. Schütte.

Die Elemente der Geometrie in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen. Lehr- und Uebungsbuch für die II., III. und IV. Realklasse. Von Constantin Rossmanith, weiland Professor an der Staatsoberrealschule zu Bielitz. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage, neu bearbeitet von Karl Schober, k. k. Prof. an der Staatsoberrealschule zu Innsbruck. Mit 157 Figuren, einer Tafel und zahlreichen

Constructions- und Rechenaufgaben. Wien, 1891. Verlag von A. Pichlers Ww. & Sohn. 204 S. gr. 8°. Preis 2 Mk. 20 Pf. — Ministeriell approbirt.

„Wie schon der Titel des Buches andeuten soll, wurde bei demselben eine innige Verbindung der Geometrie und des geometrischen Zeichnens angestrebt, die bei dem Umstande, dass die Geometrie und das geometrische Zeichnen der Unterrealschule ein abgeschlossenes Ganzes bilden und nicht nur dem austretenden Schüler eine Summe praktisch verwendbarer Kenntnisse vermitteln, sondern auch die Vorbereitung auf die wissenschaftliche und vorzugsweise auf die darstellende Geometrie der Oberrealschule bilden soll, unbestritten mehr geeignet sein wird, zur Erreichung dieses von der hohen Unterrichtsbehörde für die Unterrealschule gesteckten Lehrzieles beizutragen, als ein die Construction nur nebenbei behandelndes, die neueren immer mehr zum Durchbruche gelangenden Anschauungen ganz ignorirendes System im Sinne Euklid's. Besteht doch der Bildungswerth des geometrischen Unterrichts nicht in der gedächtnissmässigen Aneignung einer Anzahl geometrischer Sätze und deren Begründung, sondern vielmehr darin, dass der Schüler zu einer klaren Erkenntniss des inneren Zusammenhanges der geometrischen Lehren gebracht und befähigt wird, einfache geometrische Aufgaben mit Verständniss zu lösen, beziehungsweise constructiv auszuführen." — So wahr und richtig der Verfasser dieses in der Vorrede gesagt hat, so vortrefflich und schön hat er sein Lehrbuch demgemäss eingerichtet. Indem der Verfasser das Wesentliche mit Glück vom Unwesentlichen schied, die Darstellung knapp und durchsichtig ausführte, ist es ihm gelungen, auf etwa 200 Seiten nicht nur die ganze Planimetrie einschliesslich der Lehre von den Kegelschnitten und die Stereometrie meisterhaft darzustellen, sondern auch noch reichlichen Uebungsstoff beizufügen, dessen Aufgaben, dadurch, dass sie eine praktische Bedeutung haben, oder decorativ verwendbar sind, in einem reizvolleren Gewande erscheinen, als man sie sonst zu sehen bekommt. — Die Ausstattung des Buches ist die denkbar beste. Ganz besonderes Lob verdienen die herrlichen Figuren (weiss auf schwarz) nicht nur wegen ihrer schönen Ausführung, sondern hauptsächlich, weil sie so charakteristisch sind, dass sie so zu sagen reden und den betreffenden Satz oder die Aufgabe sofort erkennen lassen. Sie können als Muster für die Zeichnungen des Lehrers an der Wandtafel gelten, und möchten wir aus diesem Grunde das Buch noch besonders empfehlen.

F. Schütte.

Bibliographie

vom 1. bis 31. Juli 1892.

Periodische Schriften.

Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte; 64. Versammlung in Halle a. S., 1891. Herausgegeben von A. Wangerin und F. Krause. 2. Theil. Abtheilungs-Sitzungen. Leipzig, Vogel. 12 Mk. (compl. 16 Mk.)

Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 29. (Beobachtungen von Nebelflecken und Sternhaufen von P. Kempf.) Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Die Fortschritte der Physik, 42. Jahrgang. 2. Abtheilung (1886; Phys. d. Aethers, red. von Budde.), Berlin, G. Reimer. 17 Mk. (1. u. 2. Abth. 30 Mk.)

Geschichte der Mathematik.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. II von 1200 bis 1668. 2. Theil. Leipzig, Teubner. 10 Mk. (I. u. II. 44 Mk.)

Reine Mathematik.

Bachmann, P., Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Krug, A., Zur linearen Differentialgleichung III. Ordnung. Prag, Dominicus. 2 Mk.

Hirsch, A., Zur Theorie der linearen Differentialgleichung mit rationalem Integral. (Dissertation.) Königsberg i. Pr., Koch. 1 Mk. 20 Pf.

Hribar, E., Elemente der ebenen Trigonometrie. Freiburg i. Br., Herder. 1 Mk. 20 Pf.

Angewandte Mathematik.

Seeliger, H., Ueber allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. Rede. München, Franz. 90 Pf.

Hagemann, G., Die Energie und ihre Umwandlungen. Vortrag. Berlin, Friedländer. 60 Pf.

Dweishauvers-Dery, F., Grundlage einer neuen Methode der Schallstärkemessung. (Dissertation.) Leipzig, Wild. 1 Mk. 20 Pf.

Physik und Meteorologie.

Sohncke, L., Gemeinverständliche Vorträge aus dem Gebiete der Physik. Jena, Fischer. 4 M.

Wallentin, G., Einleitung in das Studium der modernen Elektricitätslehre. Stuttgart, Enke. 12 Mk.

Schwarze, Th., Elektricität und Schwerkraft im Lichte einheitlicher Naturanschauung. Berlin, Seydel. 1 Mk. 80 Pf.

Albrecht, E., Anleitung zum Gebrauche des Hüfner'schen Spektrophotometers. Tübingen, Moser. 60 Pf.

Schreiber, P., Falbs kritische Tage und die Regenbeobachtungen in Sachsen. Chemnitz, Bülz. 60 Pf.



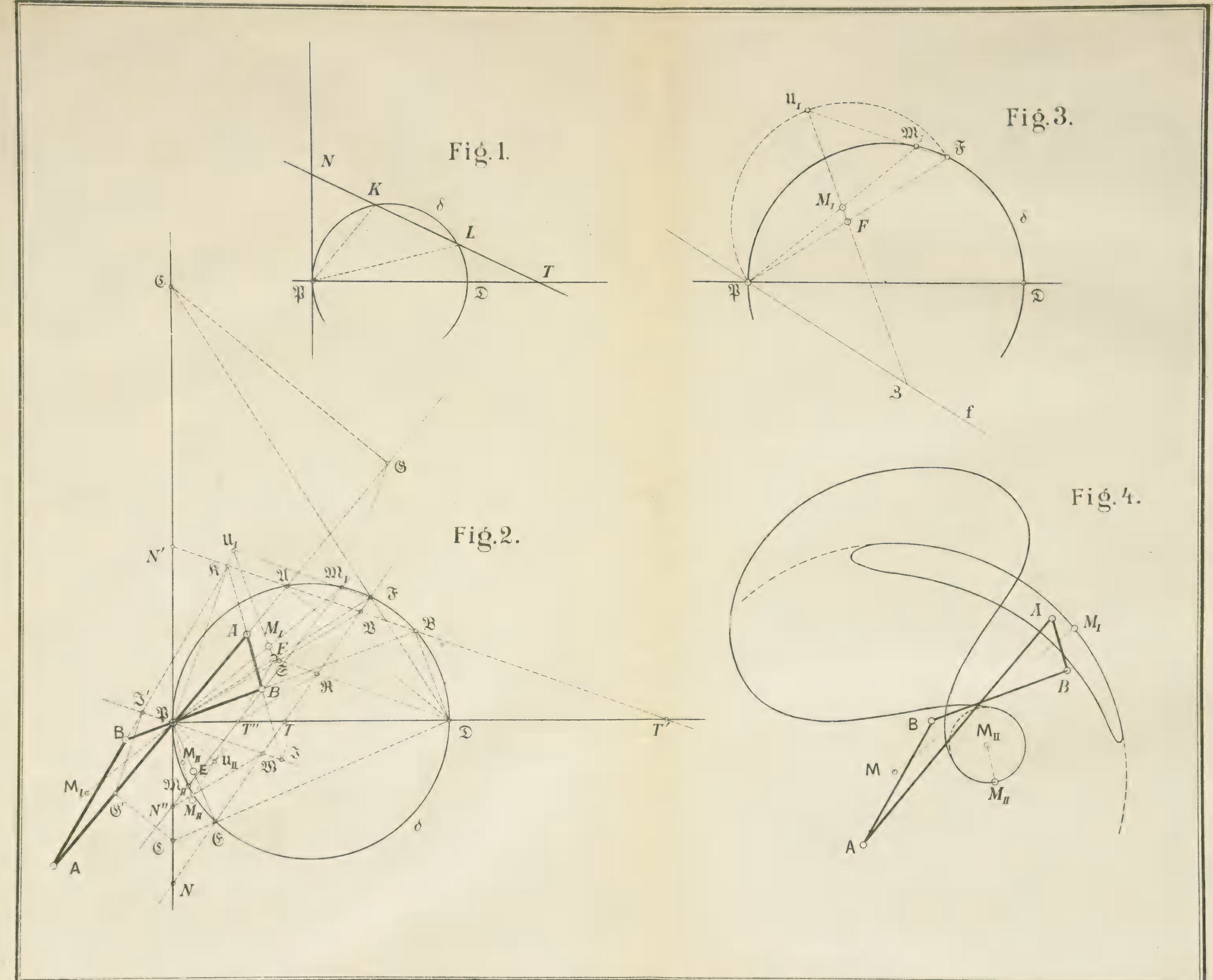


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.

10.

U_{23} B_2 B_3

A_3

Fig. 13

P

5

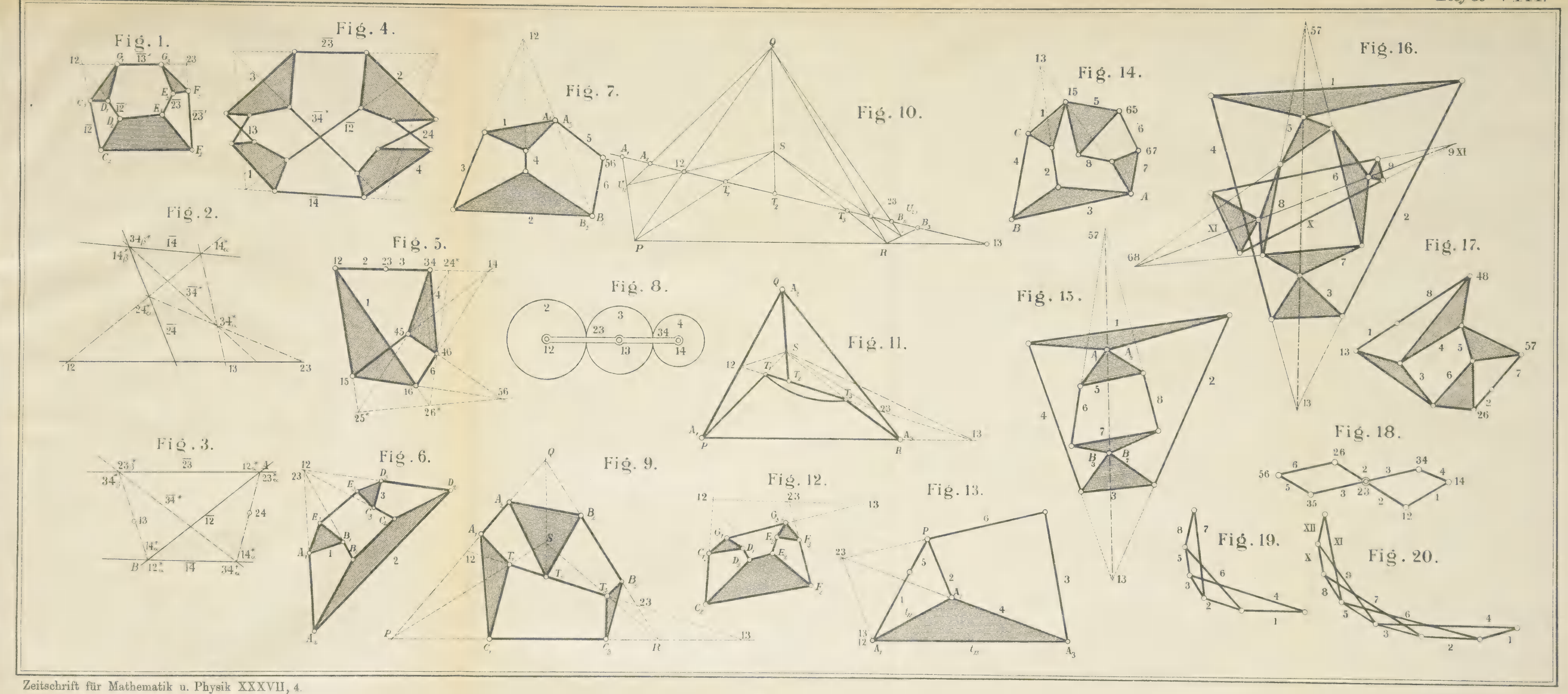
2

A_2

1

t_{12}

t_{13}


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

Historisch-literarische Abtheilung.

Anmerkungen zu Diophant.

Von

G. H. F. Nesselmann,
weiland Professor in Königsberg i. Pr.

(Schluss.)

Buch IV.

Aufgabe 1. Man soll eine gegebene Zahl in zwei Kubikzahlen theilen, deren Wurzeln eine vorgeschriebene Summe geben.

Ist eine bestimmte Aufgabe.

$$x^3 + y^3 = a,$$
$$x + y = b.$$

Nähme man allgemein $x^3 + y^3 = a$, $x + y = 2b$, und setzte nach Diophant die eine Wurzel $z + b$, die andere $b - z$, also die Summe der Cubi

$$6bz^2 + 2b^3 = a,$$

so erhielte man $z^2 = \frac{a - 2b^3}{6b}$, also ist Diophant's Methode nur anwendbar auf zugestutzte Aufgaben.

Aufgabe 2. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass sowohl die Zahlen selbst als die Cubi derselben einen vorgeschriebenen Unterschied haben.

Ist ebenfalls eine bestimmte Aufgabe

$$x^3 - y^3 = a, \quad x - y = b.$$

Von der Diophant'schen Auflösung gilt dasselbe wie von der vorhergehenden.

Aufgabe 3. Man soll ein Quadrat und deren Wurzel mit einerlei Zahl multipliciren, und dadurch die Quadratwurzel zu einer Cubikzahl, das Quadrat aber zu deren Cubikwurzel machen.

$$x^2y = \sqrt[3]{xy}; \quad x^6y^3 = xy; \quad x^5y^2 = 1; \quad y^2 = \frac{1}{x^5},$$

x muss also eine Quadratzahl sein.

Sei

$$x = \frac{1}{p^2}, \quad \frac{1}{x} = p^2, \quad \frac{1}{x^5} = p^{10},$$

so ist

$$y^2 = p^{10}, \quad y = p^5, \quad x^2y = p, \quad xy = p^3.$$

Aufgabe 4. Man soll zu einem Quadrat und zu dessen Wurzel dieselbe Zahl addiren, und die entstandenen Zahlen sollen die nämlichen Eigenschaften behalten.

$$\sqrt{x^2+y} = x+y, \quad x^2+y = x^2+2xy+y^2, \quad 1 = 2x+y, \quad y = 1-2x.$$

Sei
$$x = \frac{1}{n}, \quad \text{so ist } y = \frac{n-2}{n}$$
und es ist wirklich
$$x^2+y = \frac{1}{n^2} + \frac{n-2}{n} = \frac{n^2-2n+1}{n^2},$$
$$x+y = \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Diophant setzt das Quadrat x^2, die Wurzel also x, die addirte Zahl $(n^2-1)x^2$, so ist $x^2+(n^2-1)x^2 = n^2x^2$, $x+(n^2-1)x^2 = nx$, also
$$x = \frac{n-1}{n^2-1} = \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad (n^2-1)x^2 = \frac{n^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Aufgabe 5. Man soll zu einem Quadrate und zu einer Wurzel dieselbe Zahl addiren, und die entstandenen Zahlen sollen verwechselt dieselbe Eigenschaft haben.

$$x^2+y = \sqrt{x+y}, \quad x^4+2x^2y+y^2 = x+y,$$
$$y^2-(1-2x^2)\,y = x-x^4,$$
$$y = \frac{1}{2} - x^2 + \sqrt{\frac{1}{4}+x-x^2}.$$

Sei
$$\frac{1}{4}+x-x^2 = \left(mx-\frac{1}{2}\right)^2, \quad \text{so wird } x = \frac{m+1}{m^2+1}, \quad y = \frac{m^4+m^3-m-1}{(m^2+1)^2}.$$

Für	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
ist	$x=\frac{3}{5}$	$x=\frac{2}{5}$	$x=\frac{5}{17}$	$x=\frac{3}{13}$
	$y=\frac{21}{25}$	$y=\frac{26}{25}$	$y=\frac{315}{289}$	$y=\frac{186}{169}$
	$x^2+y=\frac{6}{5}$	$x^2+y=\frac{6}{5}$	$x^2+y=\frac{20}{17}$	$x^2+y=\frac{15}{13}$
	$x+y=\frac{36}{25}$	$x+y=\frac{36}{25}$	$x+y=\frac{400}{289}$.	$x+y=\frac{225}{169}$.

Aufgabe 6. Man soll zu einem Cubus und zu einem Quadrat ein anderes Quadrat addiren, und beide Summen sollen die vorige Eigenschaft behalten.

Diophant setzt den Cubus $= x^3$, das erste Quadrat $= (m^2-n^2)^2x^2$, das zweite zu beiden zu addirende Quadrat $z^2 = 4m^2n^2x^2$, so soll
$$x^3+4m^2n^2x^2 = p^3x^3$$
sein, also
$$x = \frac{4m^2n^2}{p^3-1}, \quad z = \frac{8m^3n^3}{p^3-1}.$$

Aufgabe 9. Man soll zu einem Cubus und zu dessen Wurzel dieselbe Zahl addiren, und beide sollen die nämliche Eigenschaft behalten.

$$x^3 + y = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$
$$1 = 3x^2 + 3xy + y^2,$$
also
$$y = \frac{3}{2}x + \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2} = \frac{-3x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2},$$
$$4 - 3x^2 = \left(\frac{m}{n}x - 2\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}x^2 - \frac{4m}{n}x + 4,$$
also
$$x = \frac{4mn}{3n^2 + m^2}, \quad \sqrt{4 - 3x^2} = \frac{6n^2 - 2m^2}{3n^2 + m^2},$$
$$y = \frac{3n^2 - 6mn - m^2}{3n^2 + m^2}.$$

Damit y positiv werde, muss sein $\frac{m}{n} < -3 + \sqrt{12}$, also $< 0{,}464$. Sei daher $m = 1$, $n = 3$, so wird
$$x = \frac{3}{7}, \quad y = \frac{2}{7}, \quad x^3 + y = \frac{125}{343}, \quad x + y = \frac{5}{7}.$$

Aufgabe 10. Man soll zu einem Cubus und zu dessen Wurzel dieselbe Zahl addiren, und beide Summen sollen verwechselt die vorige Eigenschaft haben.

$$x + y = (x^3 + y)^3 = x^9 + 3x^6y + 3x^3y^2 + y^3,$$
$$y^3 + 3x^3y^2 + (3x^6 - 1)y + x^9 - x = 0.$$

Sei $y = z - x^3$, so wird
$$z^3 - z + x^3 - x = 0,$$
$$x^3 + z^3 = x + z,$$
$$x^2 - xz = 1 - z^2,$$
also
$$x = \frac{1}{2}z + \sqrt{1 - \frac{3}{4}z^2} = \frac{z + \sqrt{4 - 3z^2}}{2},$$
$$4 - 3z^2 = \left(\frac{m}{n}z - 2\right)^2,$$
$$z = \frac{4mn}{m^2 + 3n^2},$$
$$x = \frac{m^2 + 2mn - 3n^2}{m^2 + 3n^2}, \quad y = z - x^3.$$

Sei $m = 2$, $n = 1$, so wird
$$z = \frac{8}{7}, \quad x = \frac{5}{7}, \quad y = \frac{8}{7} - \frac{125}{343} = \frac{267}{343}; \quad x + y = \frac{512}{343}, \quad x^3 + y = \frac{392}{343} = \frac{8}{7}.$$

Aufgabe 11. Man soll zwei Cubikzahlen suchen, deren Summe der Summe ihrer Wurzeln gleich ist.

$$x^3 + y^3 = x + y; \quad x^2 - xy + y^2 = 1; \quad x = \frac{1}{2}y \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 - 3y^2}.$$

Die Ausführung giebt

$$y=\frac{4mn}{m^2+3n^2},\quad x=\frac{2mn\pm(m^2-3n^2)}{m^2+3n^2}.$$

Bei Diophant ist $m=1$, $n=1$, $x=\frac{5}{7}$, $y=\frac{8}{7}$.

Aufgabe 12. Man soll zwei Cubikzahlen suchen, deren Unterschied dem Unterschiede ihrer Wurzeln gleich ist.

$$x^3-y^3=x-y;\quad x^2+xy=1-y^2;\quad x=\frac{-y+\sqrt{4-3y^2}}{2}.$$

Die Ausführung giebt

$$y=\frac{4mn}{m^2+3n^2},\quad x=\frac{-m^2-2mn+3n^2}{m^2+3n^2},$$

wo, damit x positv und $>y$ wird, $\frac{m}{n}<-3+\sqrt{12}$, das heisst $<0{,}464$ werden muss. Für $m=1$, $n=3$ ist $y=\frac{3}{7}$, $x=\frac{5}{7}$; $m=1$, $n=4$ giebt $x=\frac{39}{49}$, $y=\frac{16}{49}$. Soll nur x positiv werden, so muss $\frac{m}{n}<1$ sein; z. B.: $m=1$, $n=2$; $x=\frac{7}{13}$, $y=\frac{8}{13}$, $x-y=x^3-y^3=-\frac{1}{13}$.

Aufgabe 14. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass jede der Zahlen für sich, ferner die Summe und der Unterschied von beiden ein Quadrat wird, wenn man noch 1 dazu addirt.

Diophant's Verfahren ist verallgemeinert folgendes. Er setzt die erste Zahl A gleich einem um 1 verminderten Quadrat, z. B.:

$$A=m^2x^2+2mx,$$

so ist

$$A+1=(mx+1)^2.$$

Nun zerlegt er m^2x^2+2mx in die Factoren m^2x+2m und x, so ist ihre halbe Differenz

$$\frac{m^2-1}{2}x+m.$$

Das Quadrat davon giebt zu A addirt ein Quadrat, daher setzt er

$$B=\left(\frac{m^2-1}{2}x+m\right)^2-1=\frac{(m^2-1)^2}{4}x^2+m(m^2-1)x+m^2-1,$$

$$A+B=\frac{(m^2-1)^2}{4}+m(m^2+1)x+m^2-1,$$

so sind auch $B+1$ und $A+B+1$ Quadrate. Es bleibt nur noch übrig, dass auch $B-A+1$ Quadrat sei. Aber

$$B-A+1=\frac{m^4-6m^2+1}{4}x^2+m(m^2-3)x+m^2,$$ dieses sei $=(px-m)^2$,

so wird

$$x=\frac{4[2mp+m(m^2-3)]}{4p^2-m^4+6m^2-1}.$$

Bei Diophant ist $m=p=3$, also $x=18$.

Aufgabe 15. Man soll drei Quadratzahlen suchen, deren Summe der Summe ihrer Unterschiede gleich sei.

$$(A-B)+(A-C)+(B-C)=2(A-C).$$

Es sei
$$A = x^2 + 2nx + n^2,$$
$$C = n^2,$$
$$A + C = x^2 + 2nx + 2n^2,$$
$$A - C = x^2 + 2nx,$$
$$2(A - C) = 2x^2 + 4nx = A + B + C,$$
folglich
$$B = x^2 + 2nx - 2n^2 = (x - p)^2 = x^2 - 2px + p^2,$$
$$x = \frac{2n^2 + p^2}{2(n + p)},$$
$$A = \frac{(4n^2 + 2np + p^2)^2}{4(n + p)^2}, \quad B = \frac{(2n^2 - 2np - p^2)^2}{4(n + p)^2}, \quad C = n^2$$
und jedes Vielfache derselben.

Aufgabe 16. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass die Summe von je zweien mit der dritten multiplicirt eine vorgeschriebene Zahl zum Product geben.

Bestimmte Aufgabe.
$$(x + y)z = a = xz + yz,$$
$$(x + z)y = b = xy + yz,$$
$$(y + z)x = c = xy + xz,$$
$$xz - xy = a - b, \quad xz - yz = c - b,$$
$$xz + xy = c, \quad xz + yz = a,$$
$$xy = \frac{-a + b + c}{2},$$
$$xz = \frac{a - b + c}{2},$$
$$yz = \frac{a + b - c}{2},$$
$$x^2 = \frac{(-a + b + c)(a - b + c)}{2(a + b - c)}, \quad y^2 = \frac{(-a + b + c)(a + b - c)}{2(a - b + c)},$$
$$z^2 = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2(-a + b + c)}.$$

Aufgabe 17. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass die Summe von allen dreien ein Quadrat sei, und ausserdem das Quadrat jedweder auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man die nächstfolgende Zahl dazu addirt.

Es sollen $A + B + C$, $A^2 + B$, $B^2 + C$, $C^2 + A$ Quadrate sein.

Sei $B = 4mx (= 2mx \,.\, 2)$,

ferner $A = mx - 1$ (= halbe Differenz der Factoren von B),

so ist $A^2 + B$ Quadrat.

Sei $$B^2 + C = 16m^2x^2 + 8mx + 1 = (4mx + 1)^2,$$
so ist $$C = 8mx + 1, \text{ also auch } B^2 + C \text{ Quadrat.}$$
$$A + B + C = 13mx \text{ sei } = 169m^2y^2, \text{ so ist } x = 13my^2.$$

Setzen wir diesen Werth von x in die obigen Ausdrücke ein für A, B, C, so sind die drei ersten Bedingungen erfüllt, also
$$A = 13m^2y^2 - 1, \quad B = 52m^2y^2, \quad C = 104m^2y^2 + 1.$$

Es bleibt noch $C^2 + A$ zu einem Quadrate zu machen, das ist:
$$10816m^4y^4 + 208m^2y^2 + 1 + 13m^2y^2 - 1 = 10816m^4y^4 + 221m^2y^2,$$
oder $$10816m^2y^2 + 221 = (104my \pm p)^2 = 10816m^2y^2 \pm 208mpy + p^2,$$
so wird $$y = \pm \frac{221 - p^2}{208mp}.$$

Bei Diophant ist $m = 1$ und $p = 1$, also $y = \frac{55}{52}$. Für $p = 13$ und für $p = 17$ $(m = 1)$ wird $y = \frac{1}{52}$.

Aufgabe 18. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihre Summe ein Quadrat sei, und ausserdem das Quadrat jedweder auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man die zunächst folgende Zahl davon abzieht.

Ganz ähnlich wie 17.
$$B = 4mx, \quad A = mx + 1, \quad B^2 - C = 16m^2x^2 - 8mx + 1, \quad C = 8mx - 1,$$
$$A + B + C = 13mx = 169m^2y^2, \text{ also } x = 13my^2,$$
$$C^2 - A = 10816m^4y^4 - 221m^2y^2; \quad 10816m^2y^2 - 221 = (104my - p)^2,$$
so wird $$y = \frac{221 + p^2}{208mp}.$$

Aufgabe 19. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass der Cubus der ersten und die zweite wieder einen Cubus, das Quadrat der zweiten und die erste wieder ein Quadrat zu ihrer Summe geben.

Sei $$A = x, \quad B = n^6 - x^3,$$
so ist die erste Bedingung erfüllt und es ist:
$$B^2 + A = n^{12} - 2n^6x^3 + x^6 + x = (n^6 + x^3)^2 = n^{12} + 2n^6x^3 + x^6,$$
$$4n^6x^2 = 1, \quad x = \frac{1}{2n^3}.$$

Aufgabe 20. Man soll in allgemeinen Ausdrücken drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man noch 1 addirt.

Allgemeine Lösung:

Sei $$AB + 1 = m^2,$$
$$AC + 1 = n^2,$$
also

$$B = \frac{m^2 - 1}{A}, \quad C = \frac{n^2 - 1}{A},$$

$$BC + 1 = \frac{(m^2 - 1)(n^2 - 1) + A^2}{A^2}.$$

Sei
$$(m^2 - 1)(n^2 - 1) + A^2 = (A + q)^2,$$
so ist
$$A = \frac{(m^2 - 1)(n^2 - 1) - q^2}{2q},$$

$$B = \frac{2q(m^2 - 1)}{(m^2 - 1)(n^2 - 1) - q^2},$$

$$C = \frac{2q(n^2 - 1)}{(m^2 - 1)(n^2 - 1) - q^2}.$$

Aufgabe 21. Man soll vier Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man noch 1 dazu addirt.

$$AB + 1, \quad AC + 1, \quad AD + 1, \quad BC + 1, \quad BD + 1, \quad CD + 1$$

sollen Quadrate werden. Setze nach der vorigen Aufgabe

$$AB + 1 = (nx + 1)^2,$$

$$AC + 1 = [(n + 1)x + 1]^2,$$

so wird auch, wenn wir $A = x$, also $B = n^2 x + 2n$, $C = (n + 1)^2 x + 2(n + 1)$ setzen,
$$BC + 1 \text{ Quadrat.}$$

Sei nun
$$AD + 1 = [(n + 2)x + 1]^2,$$
so wird
$$D = (n + 2)^2 x + 2(n + 2).$$

Wegen den der vorigen Aufgabe entsprechenden Bedingungen (dass die Coefficienten von x um 1 wachsen müssen) ist nun auch $CD + 1$ Quadrat. Es bleibt nur noch übrig, dass auch $BD + 1$ Quadrat werde.

$$BD + 1 = n^2(n + 2)^2 x^2 + 4n(n + 1)(n + 2) + 4n^2 + 8n + 1 = [n(n + 1)x + p]^2,$$

$$x = \frac{p^2 - (4n^2 + 8n + 1)}{2n(n + 2)[2(n + 1) - p)]}.$$

Aufgabe 22. Man soll drei proportionale Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass der Unterschied von je zweien ein Quadrat wird.

Nimm ein rechtwinkliges Dreieck $m^2 + n^2$, $m^2 - n^2$, $2mn$ und setze

$$A = x, \quad B = x + (m^2 - n^2)^2, \quad C = x + (m^2 + n^2)^2,$$

so sind alle drei Differenzen Quadrate. Es ist nur noch nöthig, dass $AC = B^2$ sei,

$$x^2 + (m^2 + n^2)^2 x = x^2 + 2(m^2 - n^2)x + (m^2 - n^2)^2,$$

$$x = \frac{(m^2 - n^2)^4}{6m^2 n^2 - m^4 - n^4}.$$

Diophant nimmt das rechtwinklige Dreieck 5, 3, 4, wo $m = 2$, $n = 1$, und findet $x = \frac{81}{7}$. Wir konnten auch bei der Bildung von B die zweite Kathete nehmen und setzen

$$B = x + 4m^2n^2,$$

dann wäre gewesen

$$AC = B^2,$$

das ist

$$x^2 + (m^2 + n^2)x = x^2 + 8m^2n^2x + 16m^4n^4,$$

also

$$x = \frac{16m^4n^4}{m^4 - 6m^2n^2 + n^4}.$$

Hier ist aber die Annahme $m = 2$, $n = 1$ nicht statthaft, weil sie ein negatives x giebt; dagegen giebt $m = 3$, $n = 1$, $x = \frac{324}{7}$.

Aufgabe 23. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass die körperliche Zahl, welche sie bilden, oder das Product von allen dreien ein Quadrat wird, wenn man jedwede der drei Zahlen dazu addirt.

$$ABC + A,\quad ABC + B,\quad ABC + C \text{ Quadrate.}$$

Sei

$$ABC + A = x^2 + 2mx + m^2,$$

$$A = m^2 \text{ (particuläre Annahme von Diophant)}$$

$$ABC = x^2 + 2mx,$$

$$ABC + B = x^2 + 2nx + n^2,$$

also

$$B = 2(n - m)x + n^2,$$

$$AB = 2m^2(n - m)x + m^2n^2,$$

$$\frac{ABC}{AB} = C = \frac{x^2 + 2mx}{2m^2(n - m)x + m^2n^2} = \frac{x}{m^2} \cdot \frac{x + 2m}{2(n - m)x + n^2}.$$

Damit diese Division ausführbar sei, muss

$$1 : 2(n - m) = 2m : n^2,$$

$$n^2 = 4mn - 4m^2,$$

$$n = 2m$$

sein. Daher setzen wir oben

$$ABC + B = x^2 + 4mx + 4m^2,$$

$$B = 2mx + 4m^2,$$

$$AB = 2m^3x + 4m^4,$$

$$C = \frac{x^2 + 2mx}{2m^3x + 4m^4} = \frac{x}{2m^3},$$

$$ABC + C = x^3 + 2mx + \frac{x}{2m^3} = x^2 + \left(2m + \frac{1}{2m^3}\right)x = p^2x^2,$$

also

$$x = \frac{2m + \frac{1}{2m^3}}{p^2 - 1} = \frac{4m^4 - 1}{2m^3(p^2 - 1)},$$

$$A = m^2,\quad B = \frac{4m^4p^2 + 1}{m^2(p^2 - 1)},\quad C = \frac{4m^4 + 1}{2m^6(p^2 - 1)}.$$

Aufgabe 24. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product ein Quadrat wird, wenn man jedwede der drei Zahlen davon abzieht.

$$ABC - A,\quad ABC - B,\quad ABC - C \text{ Quadrate.}$$

Sei $ABC = x^2 + mx$, $A = mx$, $BC = \frac{1}{m}x + 1$, also $ABC - A = x^2$,

sei ferner $ABC - B = x^2 - 2nx + n^2$, $ABC - C = x^2 - 2px + p^2$,

$$B = (m + 2n)x - n^2,\quad C = (m + 2p)x - p^2,$$

also $BC = (m + 2n)(m + 2p)x^2 - [p^2(m + 2n) + n^2(m + 2p)]x + n^2p^2$.

Nun war aber $BC = \frac{1}{m}x + 1$, wäre also $n^2p^2 = 1$, so könnten wir durch Gleichstellung beider Ausdrücke x aus einer Gleichung des ersten Grades finden. Wir setzen also nun statt $ABC - C = (x - p)^2$

$$ABC - C = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 - \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2},$$

$$C = \left(m + \frac{2}{n}\right)x - \frac{1}{n^2},$$

so wird nun

$$BC = (m + 2n)\left(m + \frac{2}{n}\right)x^2 - \left[n^2\left(m + \frac{2}{n}\right) + \frac{m + 2n}{n^2}\right]x + 1 = \frac{1}{m}\quad + 1,$$

$$x = \frac{n^2\left(m + \frac{2}{n}\right) + \frac{m + 2n}{n^2} + \frac{1}{m}}{(m + 2n)\left(n + \frac{2}{n}\right)},$$

$$= \frac{mn^3(mn + 2) + m(m + 2n) + n^2}{mn(m + 2n)(mn + 2)}.$$

$m = 1$, $n = 2$ giebt $x = \frac{41}{40}$,

$A = \frac{41}{40}$, $ABC\text{-}A = \frac{1681}{1600}$

$B = \frac{9}{8}$, $ABC = \frac{3321}{1600}$, $ABC\text{-}B = \frac{1521}{1600}$

$C = \frac{9}{5}$, $ABC\text{-}C = \frac{441}{1600}$

$m = 3$, $n = 2$ giebt $x = \frac{31}{48}$

$A = \frac{31}{16}$, $ABC\text{-}A = \frac{961}{2304}$

$B = \frac{25}{48}$, $ABC = \frac{5425}{2304}$, $ABC\text{-}B = \frac{4225}{2304}$

$C = \frac{7}{3}$, $ABC\text{-}C = \frac{49}{2304}$.

Aufgabe 25. Man soll eine gegebene Zahl in zwei andere von der Beschaffenheit theilen, dass ihr Product der Unterschied zwischen einem Cubus und einer Wurzel werde.

$$A + B = a,\quad AB = y^3 - y.$$

Sei
$$A = x,\quad B = a - x,\quad AB = ax - x^2,\quad y = mx - n,$$
dann ist
$$ax - x^2 = y^3 - y = m^3x^3 - 3m^2nx^2 + m(3n^2 - 1)x - (n^3 - n).$$

Damit in dieser Gleichung x nur in der dritten und zweiten Potenz stehen bleibe, muss

1) $$n^3 - n = 0, \text{ also } n = 1,$$

2) $$m(3n^2 - 1), \text{ das ist } 2m = a, \quad m = \frac{1}{2}a$$

sein.

Daher setzen wir

$$ax - x^2 = \left(\frac{1}{2}ax - 1\right)^3 - \left(\frac{1}{2}ax - 1\right),$$

$$= \frac{1}{8}a^3x^3 - \frac{3}{4}a^2x^2 + ax,$$

$$-1 = \frac{1}{8}a^3x - \frac{3}{4}a^2,$$

$$x = \frac{\frac{3}{4}a^2 - 1}{\frac{1}{8}a^3} = \frac{6a^2 - 8}{a^3}$$

$$A = \frac{6a^2 - 8}{a^3}, \quad B = \frac{a^4 - 6a^2 + 8}{a^3}.$$

Aufgabe 26. Man soll eine vorgeschriebene Zahl in drei andere Zahlen von der Beschaffenheit theilen, dass das Product aus allen dreien eine Cubikzahl wird, welche die Summe der Unterschiede zwischen je zweien zu ihrer Wurzel hat.

$A + B + C = a$, $ABC = y^3$, $(A - B) + (B - C) + (A - C) = 2(A - C) = y$.

Sei $ABC = 8m^3x^3$, so ist $2(A - C) = 2mx$, also $A - C = mx$.

Sei $\quad A = (m + n)x, \quad C = nx, \quad AC = n(m + n)x^2,$

also
$$B = \frac{8m^3}{n(m + n)}x.$$

Nun soll $A + B + C = a$ sein, das heisst

$$\left[m + n + n + \frac{8m^3}{n(m + n)}\right]x = a,$$

also
$$x = \frac{an(m + n)}{8m^3 + m^2n + 3mn^2 + 2n^3}.$$

Um aber die Annahme $2(A - C) = 2mx$ zu rechtfertigen, ist erforderlich, dass $B < A$ und $> C$ sei, was in jedem Zahlenbeispiele sich leicht herstellen lässt.

Diophant schlägt folgenden eigenthümlichen Weg ein. Es soll also $\frac{8m^3}{n(m + n)} \begin{matrix} < m + n \\ > n \end{matrix}$ sein; die erste Bedingung übergeht er, und berücksichtigt nur (auf einem unnützen Umwege) die zweite $\frac{8m^3}{n(m + n)} > n$ oder $8m^3 > n^3 + mn^2$.

Nun ist $\left(n + \frac{1}{3}m\right)^3 = n^3 + mn^2 + \frac{1}{3}m^2 n + \frac{1}{27}m^3$, also ist auch $\left(n + \frac{1}{3}m\right)^3 > n^3 + mn^2$; da nun sowohl $8m^3$ als $\left(n + \frac{1}{3}m\right)^3$ grösser als $n^3 + mn^2$ ist, so setzt er $8m^3 = \left(n + \frac{1}{3}m\right)^3$, also $2m = n + \frac{1}{3}m$, $n = \frac{5}{3}m$.

Aufgabe 27. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product ein Cubus wird, wenn man jedwede der beiden Zahlen dazu addirt.

Sei
$$A = n^3 x, \quad B = x^2 - 1, \quad AB = n^3 x^3 - n^3 x,$$
$$AB + B = n^3 x^3 + x^2 - n^3 x - 1 = (nx - 1)^3, \text{ also } x = \frac{n^3 + 3n}{3n^2 + 1},$$
oder
$$A = x, \quad B = m^3 x^2 - 1, \quad AB = m^3 x^3 - x,$$
$$AB + B = m^3 x^3 + m^3 x^2 - x - 1 = (mx - 1)^3, \text{ also } x = \frac{3m + 1}{m^3 + 3m^2}.$$

Aufgabe 28. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product ein Cubus wird, wenn man jedwede der beiden Zahlen davon abzieht.

Sei
$$A = x, \quad B = n^3 x^2 + 1, \quad AB = n^3 x^3 + x,$$
so ist
$$AB - B = n^3 x^3 - n^3 x^2 + x - 1 = (nx - 1)^3, \text{ also } x = \frac{3m - 1}{3n^2 - n^3}.$$

Für $n = 2$ wird $A = x = \frac{5}{4}$, $B = \frac{27}{2}$.

Nach Diophant sei
$$A = m^3 x + 1, \quad B = x^2, \quad AB = m^3 x^3 + x^2,$$
$$AB - A = m^3 x^3 + x^2 - m^3 x - 1 = (mx - 1)^3, \text{ also } x = \frac{m^3 + 3m}{3m^2 + 1}.$$

(In der Auflösung Diophant's wird behauptet, $8x^3 + 8x^2 - x^2 - 1$ könne kein Cubus sein, dagegen richtet sich folgende Randglosse Nesselmann's.)

Es ist nicht unmöglich. Man setze die Wurzel $\frac{8}{3}x - 1$, so wird $x = \frac{599}{296}$; ferner für die Wurzel $= 2x - \frac{1}{12}$, wird $x = \frac{1727}{13752}$.

Im ersten Falle ist
$$8x^3 + 8x - x^2 - 1 = \left(\frac{589}{148}\right)^3 = \left(\frac{146}{37}\right)^3,$$
im zweiten Falle
$$8x^3 + 8x - x^2 - 1 = \left(\frac{577}{3438}\right)^3.$$

Aufgabe 29. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product ein Cubus wird, mag man die Summe der Zahlen dazu addiren oder davon abziehen.

$$AB + A + B = m^3,$$
$$AB - (A + B) = n^3,$$
$$AB = \frac{m^3 - n^3}{2},$$

also

$$A - B = \sqrt{\frac{(m^3 - n^3)^2}{4} - 2(m^3 + n^3)} = \frac{1}{2}\sqrt{(m^3 - n^3)^2 - 8(m^3 + n^3)}.$$

Sei $m = x + p$, $n = x - p$,

$$m^3 = x^3 + 3px^2 + 3p^2x + p^3,$$
$$n^3 = x^3 - 3px^2 + 3p^2x - p^3,$$
$$m^3 - n^3 = 6px^2 + 2p^3,$$
$$m^3 + n^3 = 2x^3 + 6p^2x,$$
$$(m^3 - n^3)^2 - 8(m^3 + n^3) = 36p^2x^4 - 16x^3 + 24p^4x^2 - 48p^2x + 4p^6,$$
$$\frac{(m^3 - n^3)^2 - 8(m^3 + n^3)}{4} = 9p^2x^4 - 4x^2 + 6p^4x^2 - 12p^2x + p^6.$$

Um diesen Ausdruck zum Quadrat zu machen, setzt Diophant denselben

$$= \left(3px^2 - \frac{6}{p}x + p^3\right)^2 = 9p^2x^4 - 36x^3 + \left(6p^4 + \frac{36}{p^2}\right)x^2 - 12p^2x + p^6$$

(siehe die Geschichte der Algebra, S. 345),

so bleibt

$$-4x + 6p^4 = -36x + \frac{6p^6 + 36}{p^2}, \quad x = \frac{9}{8p^2},$$

daher

$$m = \frac{9 + 8p^3}{8p^2}, \quad n = \frac{9 - 8p^3}{8p^2},$$

oder, wenn man für p den Bruch $\frac{p}{q}$ substituirt

$$m = \frac{9q^3 + 8p^3}{8p^2q}, \quad n = \frac{9q^3 - 8p^3}{8p^2q}.$$

Wenn diese Werthe für m und n oben eingesetzt werden, so wird der Ausdruck für $A - B$ rational, und es bleibt uns nur noch übrig, die Werthe von A und B aus $A + B$ und $A - B$ zu bestimmen. Bei Diophant ist $p = q = 1$. Setzt man $p = 1$, $q = 2$, so wird

$$m = 5, \; n = 4, \; AB + A + B = 125, \; AB - A - B = 64,$$
$$A + B = \frac{61}{2}, \; AB = \frac{189}{2}, \; (A - B)^2 = \frac{2209}{4}, \; A - B = \frac{47}{2}, \; A = 27, \; B = \frac{7}{2}.$$

Aufgabe 30. Dieselbe Aufgabe sehr einfach gelöst (aber nicht allgemein).

Sei $A = x$, $B = x^2 - x$, so ist $A + B = x^2$, $AB + A + B = x^3$,

$$AB - A - B = x^3 - 2x^2 = \frac{p^3}{q^3}x^3, \text{ also } A = x = \frac{2q^3}{q^3 - p^3}, \; B = \frac{2q^3(q^3 + p^3)}{(q^3 - p^3)^2}.$$

Aufgabe 31. Man soll vier Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, dass die Summe der Zahlen und die Summe ihrer Wurzeln zusammen genommen eine vorgeschriebene Zahl gebe.

Sind die vier Zahlen w, x, y, z,

so ist $$w^2 + w + x^2 + x + y^2 + y + z^2 + z = a, \text{ also}$$

$$\left(w^2 + w + \frac{1}{4}\right) + \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) + \left(z^2 + z + \frac{1}{4}\right) = a + 1,$$

$$\left(w + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = a + 1,$$

demnach ist $a + 1$ in vier Quadrate zu zerlegen und von der Wurzel eines jeden $\frac{1}{2}$ abzuziehen, so hat man die gesuchten Zahlen.

Aufgabe 33 und 34. Man soll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, zu jedem Stück eine gegebene Zahl addiren und das Product beider soll ein Quadrat sein.

$$A + B = 1, \quad (A + a)(B + b) = p^2,$$
$$A = x - a, \quad A + a = x,$$
$$B = a + 1 - x, \quad B + b = a + b + 1 - x,$$
$$(A + a)(B + b) = (a + b + 1)x - x^2 = m^2 x^2,$$
$$x = \frac{a + b + 1}{m^2 + 1}.$$

Aber x muss $> a$ und kleiner als $a + 1$ sein.

$$a + b + 1 > am^2 + a,$$
$$m^2 < \frac{b + 1}{a},$$
$$a + b + 1 < (a + 1)m^2 + a + 1,$$
$$m^2 > \frac{b}{a + 1}.$$

Dann wird:
$$A = \frac{b + 1 - am^2}{m^2 + 1}, \quad A + a = \frac{a + b + 1}{m^2 + 1},$$
$$B = \frac{(a + 1)m^2 - b}{m^2 + 1}, \quad B + b = \frac{(a + b + 1)m^2}{m^2 + 1}.$$

Setzen wir [in der Diophant'schen Lösung] in Nr. 33:

$$3x + 18 - x^2 = m^2 x^2,$$

so wird

$$x = \frac{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 18(m^2 + 1)}}{m^2 + 1},$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} + 18m^2}}{m^2 + 1}.$$

$\frac{81}{4} + 18m^2$ oder $81 + 72m^2 = (q + pm)^2$ gesetzt giebt:

$$m = \frac{18p}{72 - p^2}.$$

Bei Diophant ist $p = 8$ gesetzt.

Aufgabe 35. Man soll eine gegebene Zahl in drei Zahlen von der Beschaffenheit theilen, dass das Product der ersten und zweiten ein Quadrat wird, man mag die dritte Zahl davon abziehen oder hinzu addiren.

$$A + B + C = a, \quad AB + C = m^2, \quad AB - C = n^2.$$

Sei $C = x$, $A = p$, so ist $A + C = p + x$, also $B = a - p - x$,

$$AB = p(a-p) - px,$$

$$AB + C = p(a-p) - px + x = p(a-p) - (p-1)x,$$

$$AB - C = p(a-p) - px - x = p(a-p) - (p+1)x.$$

Beide Ausdrücke sollen Quadrate werden; daher müssen $p - 1$ und $p + 1$ sich wie zwei Quadrate zu einander verhalten, also

$$(p-1):(p+1) = q^2 : r^2,$$

also

$$p = \frac{r^2 + q^2}{r^2 - q^2},$$

dann ist

$$p - 1 = \frac{2q^2}{r^2 - q^2},$$

$$p + 1 = \frac{2r^2}{r^2 - q^2};$$

darauf lässt sich die doppelte Gleichung in bekannter Weise auflösen; es wird nämlich:

$$p(a-p) - \frac{2q^2}{r^2 - q^2} = m^2,$$

$$p(a-p) + \frac{2r^2}{r^2 - q^2} = n^2,$$

$$p(a-p)r^2 - \frac{2q^2r^2}{r^2 - q^2}x = m_1^2,$$

$$p(a-p)q^2 - \frac{2q^2r^2}{r^2 - q^2}x = n_1^2.$$

Die Differenz beider Gleichungen

$$p(a-p)r^2 - p(a-p)q^2 = m_1^2 - n_1^2,$$

zerlegt man in beliebige zwei Factoren, setzt den einen $= m_1 + n_1$, den anderen $= m_1 - n_1$ so ist die halbe Summe dieser Factoren $= m_1$, die halbe Differenz $= n_1$, und die Auflösung beider Gleichungen rational. Es ist nur darauf zu achten, dass $m_1^2 < p(a-p)r^2$, $n_1^2 < p(a-p)q^2$ werde.

Aufgabe 36. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass, wenn die eine von der anderen denselben aliquoten Theil, oder die-

selben aliquoten Theile erhält, die Summe zu dem Reste in beiden Fällen ein vorgeschriebenes Verhältniss habe.

$$A + \frac{m}{n} B = p\left(B - \frac{m}{n} B\right),$$

$$B + \frac{m}{n} A = q\left(A - \frac{m}{n} A\right).$$

Die Frage ist nach den Werthen von $\frac{m}{n}$, A, B.

$$A = B\left(p - p\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right),$$

$$B = A\left(q - q\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right).$$

Das Product beider giebt:

$$1 = \left\{p - (p+1)\frac{m}{n}\right\}\left\{q - (q+1)\frac{m}{n}\right\},$$

$$1 - pq = (p-1)(q-1)\frac{m^2}{n^2} - \left\{p(q+1) + q(p+1)\right\}\frac{m}{n},$$

$$= (pq+p+q+1)\frac{m^2}{n^2} - (2pq+p+q)\frac{m}{n},$$

also

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{2pq+p+q}{2} \pm \sqrt{\frac{(2pq+p+q)^2}{4} + (1-pq)(pq+p+q+1)}}{pq+p+q+1}$$

$$= \frac{2pq+p+q \pm \sqrt{p^2+2pq+q^2+4p+4q+4}}{2(pq+p+q+1)},$$

$$= \frac{2pq+p+q \pm (p+q+2)}{2(pq+p+q+1)}.$$

Das obere Zeichen (+) giebt $\frac{m}{n} = 1$, was nicht zulässig ist, dagegen das untere Zeichen (—) giebt:

$$\frac{m}{n} = \frac{2pq-2}{2(pq+p+q+1)} = \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)}.$$

Daraus folgt das Verhältniss von A und B, nämlich:

$$A : B = (p+1) : (q+1).$$

Aufgabe 37. Man soll in unbestimmten Ausdrücken zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product und die Summe beider Zahlen zusammen genommen eine vorgeschriebene Zahl gebe.

Allgemein sind die Zahlen x und $\frac{a-x}{x+1}$, denn

$$xy + x + y = a \text{ giebt } y = \frac{a-x}{x+1}.$$

Aufgabe 38. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass die Producte von je zweien, wenn noch die Summe der beiden Zahlen dazu kommt, vorgeschriebene Zahlen gleich werden. Die gegebenen Zahlen müssen aber um 1 verkleinerte Quadratzahlen sein.

Setzt man nämlich:

$$xy + x + y = a,$$
$$xz + x + z = b,$$
$$yz + y + z = c,$$

so wird

$$x = -1 + \sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}, \quad y = -1 + \sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}},$$
$$z = -1 + \sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}.$$

Diese Ausdrücke werden durch Diophant's Determination rational; dieselbe ist aber zu enge.

Aufgabe 42. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product von je zweien zu der Summe derselben ein vorgeschriebenes Verhältniss habe.

Setzt man

$$\left.\begin{array}{l} xy = m(x+y) \\ yz = n(y+z) \\ xz = p(z+x) \end{array}\right\}, \text{ so werden die drei Zahlen } \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2mnp}{pn + m(n-p)}, \\ y = \dfrac{2mnp}{pm + n(p-m)}, \\ z = \dfrac{2mnp}{mn + p(m-n)}. \end{array}\right.$$

Allgemein.

$$\left.\begin{array}{l} xy : (x+y) = m : n \\ xz : (x+z) = p : q \\ yz : (y+z) = r : t \end{array}\right\} \text{ giebt } \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2mpr}{mqr + npr - mpt}, \\ y = \dfrac{2mpr}{npr + mpt - mqr}, \\ z = \dfrac{2mpr}{mqr + mpt - npr}. \end{array}\right.$$

Aufgabe 43. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass das Product von je zweien zu der Summe aller drei Zahlen ein vorgeschriebenes Verhältniss habe.

$$1) \quad xy : (x+y+z) = m : n,$$
$$2) \quad xz : (x+y+z) = p : q,$$
$$3) \quad yz : (x+y+z) = r : t.$$

Da das zweite Glied der Proportion constant ist, so folgt:

$$x : y = pt : qr,$$
$$x : z = mt : nr,$$

also:

4) $$y = \frac{qr}{pt}x, \quad z = \frac{nr}{mt}x,$$

$$x + y + z = x\left(1 + \frac{qr}{pt} + \frac{nr}{mt}\right)x = \frac{mpt + mqr + npr}{mpt}x.$$

Dieser Werth für $x + y + z$ in Gleichung 1) und 2) eingesetzt, giebt:

$$y = \frac{mpt + mqr + npr}{npt}, \quad z = \frac{mpt + mqr + npr}{mqt},$$

und folglich
$$x = \frac{mpt + mqr + npr}{nqr}.$$

Aufgabe 45. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass der Unterschied der grössten und mittelsten zu dem Unterschiede der mittelsten und kleinsten ein vorgeschriebenes Verhältniss habe, ausserdem aber die Summe von je zweien eine Quadratzahl sei.

$$A + B,\ A + C \text{ Quadrate } A - B = n(B - C),$$

Es sei
$$B + C = 4m^2, \quad B = 2m^2 + x, \quad C = 2m^2 - x, \quad B - C = 2x,$$

also
$$A - B = 2nx, \quad A = 2m^2 + (2n + 1)x.$$

Nun soll noch sein:

$$A + B = 2m^2 + 2(n + 1)x = p^2,$$
$$A + C = 4m^2 + 2nx = q^2,$$
$$p^2 - q^2 = 2x.$$

Zerlegt man hier $2x$ in $4m \cdot \frac{x}{2m}$, so wird $q = 2m - \frac{x}{4m}$, und man findet $x = 16(2n + 1)m^2$, wodurch $C = 2m^2 - x$ negativ wird. Zerlege daher $p^2 - q^2 = 2x$ ganz allgemein in $2rx \cdot \frac{1}{r}$, so wird $q = rx - \frac{1}{2r}$, daher

$$A + C = 4m^2 + 2nx = r^2x^2 - x + \frac{1}{4r^2},$$
$$r^2x^2 - (2n + 1)x = 4m^2 - \frac{1}{4r^2},$$
$$r^2x = n + \frac{1}{2} + \sqrt{n^2 + n + 4m^2r^2}.$$

Man setzte $n^2 + n + 4m^2r^2 = (2mr - k)^2$, so wird $r = \frac{k^2 - n(n + 1)}{4mk}$,

$$\frac{\{k^2 - n(n + 1)\}^2}{16m^2k^2}x = \frac{k^2 + 2kn + k + n(n + 1)}{2k},$$

also
$$x = \frac{8m^2k[k^2 + (2n + 1)k + n(n + 1)]}{[k^2 - n(n + 1)]^2}.$$

Damit nun $C = 2m^2 - x$ positiv werde, muss $x < 2m^2$, also

$$\frac{4k[k^2 + (2n + 1)k + n(n + 1)]}{[k^2 - n(n + 1)]^2} < 1$$

werden, was bei einem in Zahlen gegebenen n sich leicht bestimmen lässt.

Bei Diophant ist $n = 3$, also haben wir die Bedingung:

$$\frac{4k(k^2+7k+12)}{(k^2-12)^2} < 1,$$

oder

$$k^4 - 4k^3 - 52k^2 - 48k + 144 > 0.$$

Suchen wir hier die Grenzen der positiven und negativen Wurzeln, so finden wir, dass k entweder < 2 oder > 9 zu nehmen ist, denn von $+2$ bis $+9$ wird das Resultat der Gleichung negativ, dagegen von $-\infty$ bis $+1$ und von $+10$ bis $+\infty$ positiv. Setzen wir $k = 1$, so erhalten wir:

$$x = \frac{8m^2(1+7+12)}{(1-12)^2} = \frac{160m^2}{121}.$$

Da m^2 beliebig ist, setzen wir $m^2 = 121$, also $x = 160$, das ergiebt die drei Zahlen:

$$A = 1362, \quad B = 402, \quad C = 82,$$

und es ist:

$$A - B = 960, \qquad A + B = 1764 = 42^2,$$

$$B - C = 320, \qquad A + C = 1444 = 38^2,$$

also

$$A - B = 3(B - C), \qquad B + C = 484 = 22^2.$$

Aufgabe 46. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass der Unterschied zwischen dem Quadrat der grössten und dem Quadrat der mittelsten zu dem Unterschiede zwischen der mittelsten und der kleinsten Zahl ein vorgeschriebenes Verhältniss habe, ausserdem aber die Summe von je zweien ein Quadrat sei.

$$A + B, \quad A + C, \quad B + C \text{ Quadrate } A^2 - B^2 = n(B - C).$$

Sei

$$A + B = m^2x^2, \quad A = \frac{1}{2}m^2x^2 + p, \quad B = \frac{1}{2}m^2x^2 - p,$$

$$A + C < A + B, \quad > A,$$

also

$$< m^2x^2, \quad > \frac{1}{2}m^2x^2 - p.$$

Sei

$$A + C = \frac{q^2}{r^2}m^2x^2, \text{ wo } r^2 > q^2, < 2q^2,$$

$$C = \left(\frac{q^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right)m^2x^2 - p.$$

Nun ist

$$A^2 - B^2 = 2m^2px^2,$$

$$B - C = \left(1 - \frac{q^2}{r^2}\right)m^2x^2,$$

also

$$2m^2px^2 = n\left(1 - \frac{q^2}{r^2}\right)m^2x^2,$$

$$2p = n\left(1 - \frac{q^2}{r^2}\right).$$

Demnach bilden wir jetzt:

$$A = \frac{1}{2} m^2 x^2 + \frac{1}{2} n \left(1 - \frac{q^2}{r^2}\right),$$

$$B = \frac{1}{2} m^2 x^2 - \frac{1}{2} n \left(1 - \frac{q^2}{r^2}\right),$$

$$C = \left(\frac{q^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right) m^2 x^2 - \frac{1}{2} n \left(1 - \frac{q^2}{r^2}\right);$$

es ist noch übrig, dass auch $B + C$ Quadrat sei, also

$$\frac{q^2}{r^2} m^2 x^2 - n\left(1 - \frac{q^2}{r^2}\right) = \left(\frac{q}{r} mx - t\right)^2,$$

$$= \frac{q^2}{r^2} m^2 x^2 - \frac{2q}{r} tmx + t^2,$$

also

$$x = \frac{t^2 + n\left(1 - \frac{q^2}{r^2}\right)}{2\frac{q}{r}t} = \frac{r^2 t^2 + n(r^2 - q^2)}{2qrt}.$$

Buch V.

Aufgabe 1. Man soll drei Zahlen suchen, welche eine geometrische Reihe bilden, und ausserdem so beschaffen sind, dass jede von ihnen ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeschriebene Zahl davon abzieht.

Die Zahlen seien A, Ax, Ax^2. Diophant nimmt A quadratisch an, und setzt:

$$A = \frac{(m^2 a + n^2)^2}{4 m^2 n^2}.$$

Nun soll noch sein

$$Ax - a = \frac{(m^2 a + n^2)^2}{4 m^2 n^2} x - a = p^2,$$

$$Ax^2 - a = \frac{(m^2 a + n^2)^2}{4 m^2 n^2} x^2 - a = q^2,$$

$$q^2 - p^2 = \frac{(m^2 a + n^2)^2}{4 m^2 n^2}(x^2 - x).$$

Sei

$$q + p = \frac{m^2 a + n^2}{2mn} x, \quad q - p = \frac{m^2 a + n^2}{2mn} x - \frac{m^2 a + n^2}{2mn}, \text{ also } p = \frac{m^2 a + n^2}{4mn}$$

daher:

$$\frac{(m^2 a + n^2)^2}{4 m^2 n^2} x - a = \frac{(m^2 a + n^2)^2}{16 m^2 n^2},$$

$$x = \frac{(m^2 a + n^2)^2 + 16 m^2 n^2 a}{n(m^2 a + n^2)^2}.$$

Demnach sind die drei Zahlen

$$A = \frac{(m^2 a + n^2)^2}{4 m^2 n^2},$$

$$Ax = B = \frac{(m^2 a + n^2)^2 + 16 m^2 n^2 a}{16 m^2 n^2},$$

$$Ax^2 = C = \frac{[(m^2 a + n^2)^2 + 16 m^2 n^2 a]^2}{64 m^2 n^2 (m^2 a + n^2)^2}.$$

Aufgabe 2. Man soll drei Zahlen suchen, welche eine geometrische Reihe bilden, und ausserdem so beschaffen sind, dass jede von ihnen ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeschriebene Zahl dazu addirt.

Die Zahlen seien A, Ax, Ax^2. Diophant nimmt wieder A quadratisch an.

$$A = \frac{(m^2 a - n^2)^2}{4 m^2 n^2},$$

$$Ax + a = \frac{(m^2 a - n^2)^2}{4 m^2 n^2} x + a = p^2,$$

$$Ax^2 + a = \frac{(m^2 a - n^2)^2}{4 m^2 n^2} x^2 + a = q^2,$$

$$q^2 - p^2 = \frac{(m^2 a - n^2)^2}{4 m^2 n^2} (x^2 - x),$$

$$q + p = \frac{m a^2 - n^2}{2mn} x, \quad q - p = \frac{m^2 a - n^2}{2mn} x - \frac{m^2 a - n^2}{2mn}, \text{ also } p = \frac{m^2 a - n^2}{4mn},$$

daher

$$\frac{(m^2 a - n^2)^2}{4 m^2 n^2} x + a = \frac{(m^2 a - n^2)^2}{16 m^2 n^2},$$

$$x = \frac{(m^2 a - n^2)^2 - 16 m^2 n^2 a}{4 (m^2 a - n^2)^2}.$$

Demnach sind die Zahlen:

$$A = \frac{(m^2 a - n^2)^2}{4 m^2 n^2}, \quad B = Ax = \frac{(m^2 a - n^2) - 16 m^2 n^2 a}{16 m^2 n^2},$$

$$C = Ax^2 = \frac{[(m^2 a - n^2)^2 - 16 m^2 n^2 a]^2}{64 m^2 n^2 (m^2 a - n^2)^2}.$$

In Aufgabe 3 behauptet Diophant: Wenn man zwei Zahlen hat, und nicht nur jede dieser Zahlen für sich, sondern auch das Product beider ein Quadrat wird, wenn man die nämliche vorgeschriebene Zahl hinzu addirt, so sind sie von zwei unmittelbar auf einander folgenden Quadraten entstanden.

Dieses Porisma beweist Nesselmann folgendermaassen:

Sei

$$x + a = m^2, \quad y + a = n^2,$$

so ist

$$xy = (m^2 - a)(n^2 - a) = m^2 n^2 - a m^2 - a n^2 + a^2,$$

also

$$xy + a = p^2 = m^2 n^2 - a m^2 - a n^2 + a^2 + a = m^2 n^2 - a(m^2 + n^2 - 1) + a^2.$$

Dieser Ausdruck, gleich $(mn-a)^2 = m^2n^2 - 2mna + a^2$ gesetzt, giebt $m^2+n^2-1=2mn$, also $m-n=1$, wie das Porisma sagt. Es ist demnach zu setzen

$$x+a=m^2,$$
$$y+a=(m+1)^2,$$

so ist

$$xy+a=m^2(m+1)^2-2am(m+1)+a^2=[m(m+1)-a]^2.$$

Aufgabe 7 und 8. 7. Lehnsatz für die folgende Aufgabe. Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass ihr Product ein Quadrat wird, wenn man die Summe ihrer Quadrate dazu addirt.

8. Man soll drei rechtwinklige Dreiecke suchen, deren Flächen einander gleich sind.

$$7)\left\{\begin{aligned} x^2+y^2+xy&=m^2,\\ y(x+y)&=m^2-x^2\\ y&=\frac{p}{q}(m+x),\\ x+y&=\frac{q}{p}(m-x),\\ x&=\frac{q}{p}(m-x)-\frac{p}{q}(m+x),\\ &=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2+pq}\cdot m,\\ y&=\frac{p^2+2pq}{q^2+p^2+pq}\cdot m,\end{aligned}\right.$$

oder, wenn wir setzen:

$$m=q^2+p^2+pq,$$

wird

$$x=q^2-p^2,$$
$$y=p^2+2pq.$$

8. Diophant bildet nun drei Dreiecke aus den Zahlen (in 7) m und x, m und y, m und $x+y$, das ist aus

$$q^2+p^2+pq,\quad q^2-p^2,$$
$$q^2+p^2+pq,\quad p^2+2pq,$$
$$q^2+p^2+pq,\quad q^2+2pq.$$

Die Dreiecke sind:

$$1)\ 2q^4+2pq^3+p^2q^2+2p^3q+2p^4,$$
$$2pq^3+5p^2q^2+2p^3q,$$
$$2q^4+2pq^3-2p^3q-2p^4;$$

$$2)\ q^4+2pq^3+7p^2q^2+6p^3q+2p^4,$$
$$q^4+2pq^3-p^2q^2-2p^3q,$$
$$4pq^3+6p^2q^2+6p^3q+2p^4;$$

$$3)\ 2q^4+6pq^3+7p^2q^2+6pq^3+p^4,$$
$$2pq^3+p^2q^2-2p^3q-p^4,$$
$$2q^4+6pq^3+6p^2q^2+4p^3q.$$

Dass die drei Dreiecke gleichen Inhalt haben, geht daraus hervor, dass je zwei Kathetenpaare aus denselben Factoren bestehen. Es ist nämlich:

$$\text{in 1)}\quad 2pq^3 + 5p^2q^2 + 2p^3q = p \,.\, q \,.\, (q+2p)(2q+p),$$
$$2q^4 + 2pq^3 - 2p^3q - 2p^4 = 2 \,.\, (q+p)(q-p)(q^2+pq+p^2);$$
$$\text{in 2)}\quad q^4 + 2pq^3 - p^2q^2 - 2p^3q = q \,.\, (q-p)(q+p)(q+2p),$$
$$4pq^3 + 6p^2q^2 + 6p^3q + 2p^4 = 2 \,.\, p \,.\, (2q+p)(q^2+pq+p^2);$$
$$\text{in 3)}\quad 2pq^3 + p^2q^2 - 2p^3q - p^4 = p \,.\, (q-p)(q+p)(2q+p),$$
$$2q^4 + 6pq^2 + 6p^2q^2 + 4p^2q = 2 \,.\, q \,.\, (q+2p)(q^2+pq+q^2).$$

Der Inhalt des Dreiecks ist also in allen drei Fällen

$$p \,.\, q \,.\, (q+p)(q-p)(q+2p)(2q+p)(q^2+pq+p^2).$$

Aufgabe 12. Man soll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, zu jedem Stück dieselbe vorgeschriebene Zahl addiren, und diese Summen sollen Quadrate werden. Diese vorgeschriebene Zahl darf aber weder ungerade sein, noch das Doppelte dieser Zahl, wenn man 1 dazu addirt, von einer Primzahl gemessen werden.

Zu der Determination giebt Nesselmann folgende Bemerkung:

Denn wenn die gegebene Zahl a ungerade ist, wird $2a+1 = 4p+3$, kann also niemals die Summe von zwei Quadraten sein. Ist dagegen a gerade, so ist $2a+1 = 4p+1$, welches, wenn es Primzahl ist (und dann immer) in zwei Quadrate zerlegt werden kann. Die Determination ist insofern zu enge, als $4p+1$, auch wenn es das Product von Primfactoren derselben Form ist, Summe zweier Quadrate ist. Z. B.: $65 = 5 \,.\, 13$, $85 = 5 \,.\, 17$.

Als Lösung giebt Nesselmann:

$$A + B = 1; \quad A + a = m^2,$$
$$B + a = n^2,$$
$$\overline{2a + 1 = m^2 + n^2.}$$

Es sei bekannt $2a+1 = c^2 + d^2$ und $c < d$. Man setze

$$m = c + x,$$
$$n = px - d,$$
$$m^2 = c^2 + 2cx + x^2,$$
$$n^2 = d^2 - 2dpx + p^2x^2,$$

also

$$x = \frac{2dp - 2c}{p^2+1},$$
$$m = \frac{cp^2 + 2dp - c}{p^2+1},$$
$$n = \frac{dp^2 - 2cp - d}{p^2+1}.$$

Wenn man nun m und n berechnet hat, so ist

$$A = m^2 - a,$$
$$B = n^2 - a.$$

Nun soll $m^2 \begin{matrix} > a \\ < a+1, \end{matrix}$

also

$$m \begin{matrix} > \sqrt{a} \\ < \sqrt{a+1}, \end{matrix}$$

folglich

$$x \begin{matrix} > -c + \sqrt{a} \\ < -c + \sqrt{a+1} \end{matrix}$$

sein.

1) $\frac{2dp-2c}{p^2+1} > -c+\sqrt{a},$

$$2dp-2c > (-c+\sqrt{a})p^2 - c + \sqrt{a}$$

$$(-c+\sqrt{a})p^2 - 2dp < -(c+\sqrt{a})$$

$$p < \frac{d+\sqrt{d^2+c^2-a}}{-c+\sqrt{a}},$$

$$< \frac{d+\sqrt{a+1}}{-c+\sqrt{a}}.$$

2) $\frac{2dp-2c}{p^2+1} < -c+\sqrt{a+1},$

$$2dp-2c < (-c+\sqrt{a+1})p^2 - c + \sqrt{a+1},$$

$$(-c+\sqrt{a+1})p^2 - 2dp > -(c+\sqrt{a+1}),$$

$$p > \frac{d+\sqrt{d^2+c^2-(a+1)}}{-c+\sqrt{a+1}},$$

$$> \frac{d+\sqrt{a}}{-c+\sqrt{a+1}}.$$

Bei Diophant ist

$$a=6,\quad c=2,\quad d=3,$$

also

$$p < \frac{3+\sqrt{7}}{-2+\sqrt{6}},$$

$$p > \frac{3+\sqrt{6}}{-2+\sqrt{7}}$$

$$p < 12{,}5603,$$

$$p > 8{,}4390.$$

Aufgabe 13. Man soll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, und zu jedem Stücke eine andere, aber vorgeschriebene, Zahl addiren, und beide Summen sollen dadurch Quadrate werden.

$$A+B=1;\quad A+a=m^2,$$

$$B+b=n^2,$$

$$a+b+1=m^2+n^2,$$

sei $a+b+1=c^2+d^2\,(c<d)$.

Man setze

$$m=c+x,$$

$$n=px-d,$$

$$m^2=c^2+2cx+x^2,$$

$$n^2=d^2-2dpx+p^2x^2,$$

so ist

$$x=\frac{2dp-2c}{p^2+1},$$

$$m=\frac{cp^2+2dp-c}{p^2+1},$$

$$n=\frac{dp^2-2cp-d}{p^2+1}.$$

Wenn man nun m und n berechnet hat, so ist

$$A=m^2-a,$$

$$B=m^2-b.$$

Nun soll

$$m^2 \begin{matrix} >a \\ <a+1 \end{matrix}$$

sein, dann wird auch

$$n^2 \begin{matrix} >b \\ <b+1, \end{matrix}$$

$$m=c+x \begin{matrix} >\sqrt{a} \\ <\sqrt{a+1}, \end{matrix}$$

$$x \begin{matrix} >-c+\sqrt{a} \\ <-c+\sqrt{a+1} \end{matrix}.$$

1) $\frac{2dp-2c}{p^2+1} > c+\sqrt{a},$

$$p < \frac{d+\sqrt{c^2+d^2-a}}{-c+\sqrt{a}},$$

$$< \frac{d+\sqrt{b+1}}{-c+\sqrt{a}}.$$

2) $\frac{2dp-2c}{p^2+1} < -c+\sqrt{a+1},$

$$p > \frac{d+\sqrt{c^2+d^2-(a+1)}}{-c+\sqrt{a+1}},$$

$$> \frac{d+\sqrt{b}}{-c+\sqrt{a+1}}.$$

Aufgabe 14. Man soll die Zahl 1 in drei Stücke theilen, zu jedem Stück dieselbe vorgeschriebene Zahl addiren, und alle drei Stücke sollen dadurch Quadrate werden.

Andere Auflösung. Zerlege 10 in drei Quadrate, von denen eines bereits in den geforderten Grenzen zwischen 3 und 4 liegt, was sich immer bewerkstelligen lässt, z. B. $1+\frac{81}{25}+\frac{144}{25}$, wo $\frac{81}{25}$ unmittelbar anwendbar ist. Sodann zerlege den Rest $1+\frac{144}{25}$ in zwei andere Quadrate, die beide > 3 sind, so ist die Aufgabe gelöst. Sei z. B.:

$$n=\frac{12}{5}-x, \quad p=qx-1,$$

$$n^2=\frac{144}{25}-\frac{24}{5}x+x^2, \quad p^2=1-2qx+q^2x^2,$$

so folgt

$$x=\frac{10q+24}{5(q^2+1)},$$

$$n=\frac{12q^2-10q-12}{5(q^2+1)}, \quad p=\frac{5q^2+24q-5}{5(q^2+1)};$$

n^2 sowohl als p^2 sollen grösser sein als 3, also n und $p>\sqrt{3}$

aus

$$\frac{12q^2-10q+12}{5(q^2+1)}>\sqrt{3} \text{ folgt } q>\frac{5+\sqrt{94}}{12-5\sqrt{3}}>4{,}40,$$

aus

$$\frac{5q^2+24q-5}{5(q^2+1)}>\sqrt{3} \text{ folgt } q<\frac{12+\sqrt{94}}{5\sqrt{3}-5}<5{,}92.$$

Setzt man nun $q=5$, und bedenkt, dass das erste Quadrat $\frac{81}{25}=m^2$ angenommen war, so sind die Wurzeln der drei Quadrate

$m=\frac{9}{5}=\frac{117}{65}$	$m^2=\frac{13689}{4225}$	$A=\frac{1014}{4225}=\frac{6}{25}$
$n=\frac{119}{65}$	$n^2=\frac{14161}{4225}$	$B=\frac{1486}{4225}$
$p=\frac{24}{13}=\frac{120}{65}$	$p^2=\frac{14400}{4225}$	$C=\frac{1725}{4225}=\frac{69}{169}$.

Dass die Auflösung auf diesem Wege immer möglich ist, ist klar. Gesetzt, wir hätten die Zerlegung von Zahlen

$$10=1+\left(\frac{15}{13}\right)^2+\left(\frac{36}{13}\right)^2$$

vor uns, so liegt keines dieser drei Quadrate innerhalb der verlangten Grenzen. Dann zerlege die Summe von $1+\left(\frac{36}{13}\right)^2$ oder $\left(\frac{15}{13}\right)^2+\left(\frac{36}{13}\right)^2$ in die Summe zweier anderer Quadrate, deren eines > 3 aber < 4 ist, so wird die Summe des zweiten Quadrates dieser Theilung und des dritten

Quadrates der ursprünglichen Theilung zwischen den Grenzen 6 und 7 liegen, daher wird diese Summe sich allemal in zwei Quadrate zerlegen lassen, deren jedes ebenfalls > 3 ist.

Aufgabe 15. Man soll die Zahl 1 in drei Stücke theilen, zu jedem Stücke eine andere, aber vorgeschriebene Zahl addiren, und jedes der drei Stücke dadurch zu einem Quadrate machen.

$A + B + C = 1,\ A + 2 = m^2,\ B + 3 = n^2,\ C + 4 = p^2,\ 10 = m^2 + n^2 + p^2.$

Theile zuerst 10 in zwei Quadrate, deren eines grösser als 2 und kleiner als 3 ist; sei

$$m = 1 + x,\ m_1 = (qx - 3);\ m^2 = 1 + 2x + x^2,\ m_1{}^2 = 9 - 6qx + q^2x^2,$$

also

$$x = \frac{6q - 2}{q^2 + 1},$$

$$m = \frac{q^2 + 6q - 1}{q^2 + 1} \begin{matrix} > \sqrt{2} \\ < \sqrt{3} \end{matrix}.$$

Es findet sich

$$q < \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} < 14{,}07,$$

$$q > \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} > 7{,}72.$$

Sei $q = 9$, so wird

$$m = \frac{67}{41},\quad m^2 = \frac{4489}{1681},\quad m_1{}^2 = \frac{12321}{1681} = \left(\frac{111}{41}\right)^2 = \left(\frac{36}{41}\right)^2 + \left(\frac{105}{41}\right)^2.$$

Sei nun:

$$n = \frac{36}{41} + y,\quad p = \frac{105}{41} - ry,\quad \text{so wird } y = \frac{210r - 72}{41(r^2 + 1)},$$

also

$$n = \frac{36r^2 + 210r - 36}{41(r^2 + 1)} \begin{matrix} > \sqrt{3} \\ < 2 \end{matrix},$$

(weil n^2 zwischen 3 und 4 liegen soll); es ergiebt sich

$$r < \frac{105 + \sqrt{7278}}{41\sqrt{3} - 36} < 5{,}43,$$

$$r > \frac{105 + \sqrt{1998}}{46} > 3{,}25.$$

Sei $r = 5$, so wird

$$n = \frac{975}{533},$$

$$n^2 = \frac{915849}{284089},$$

$$p^2 = m_1{}^2 - n^2 = \frac{1166400}{284089},$$

$$m^2 = \frac{4489}{1681} = \frac{758641}{284089}.$$

Zieht man nun von m^2 2, von n^2 3, von p^2 4 ab, so erhält man die Theile der Einheit:

$$A = \frac{190463}{284089},$$

$$B = \frac{163582}{284089},$$

$$C = \frac{30044}{284089}.$$

Aufgabe 33. Zweierlei Wein, acht Drachmen das Maass, und schlechteren zu fünf nur, mischte der gütige Herr seinen Bedienten zum Fest. Was er als Preis für Beides bezahlt, ist eine Quadratzahl. Setzt Du zu dem Quadrat aber noch sechzig hinzu, siehe, so hast Du ein zweites Quadrat; nun merke, die Wurzel zeigt Dir, wie viel Maass Jener im Ganzen gekauft? Und nun sage mir an, wieviel des besseren Weines und wieviel zu fünf wurde zusammengemischt?

1. Die Maasse seien x und y, so ist

$$8x + 5y = m^2,$$

$$x + y = \sqrt{m^2 + 60},$$

$$3x = m^2 - 5\sqrt{m^2 + 60},$$

$$3y = -m^2 + 8\sqrt{m^2 + 60},$$

$$m = \frac{5p^2 - 3q^2}{pq},$$

$\left(\text{indem man } m^2 + 60 = n^2,\ n + m = \frac{10p}{q},\quad n - m = \frac{6q}{p} \text{ setzt}\right)$, dann wird

$$x = \frac{25p^4 - 25p^3q - 30p^2q^2 - 15pq^3 + 9q^4}{3p^2q^2},$$

$$y = \frac{-25p^4 + 40p^3q + 30p^2q^2 + 24pq^3 - 9q^4}{3p^2q^2}.$$

Damit x und y positiv werden, muss $m^2 > 5\sqrt{m^2 + 60}$ und $< 8\sqrt{m^2 + 60}$ werden. Die erste Bedingung giebt $m > \frac{1}{2}\sqrt{50 + 10\sqrt{265}}$, die zweite $m < 4\sqrt{2 + \sqrt{19}}$, daraus folgt $\frac{p}{q} > 1{,}794$ und $< 2{,}280$.

2. Anzahl der Maasse x, Preis $x^2 - A$. Der theuere Preis für ein Maass sei a, der geringere sei b.

$$x^2 - A < ax,$$

$$> bx,$$

$$x^2 - ax < A,\quad x < \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + A},$$

$$x^2 - bx > A,\quad x > \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + A}.$$

Nun soll $x^2 - A$ Quadrat sein. Sei $x^2 - A = (x-n)^2 = x^2 - 2nx + n^2$, so ist

$$x = \frac{n^2 + A}{2n}.$$

Nach Obigem ist

$$\frac{n^2 + A}{2n} < \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + A},$$

$$> \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + A},$$

$$n^2 - 2n\left(\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + A}\right) < -A,$$

$$n^2 - 2n\left(\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + A}\right) > -A,$$

$$n < \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + A} + \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + A}},$$

$$> \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + A} + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + b\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + A}}.$$

Bei Diophant ist $A = 60$, $a = 8$, $b = 5$, daher

$$n < 4 + \sqrt{76} + \sqrt{32 + 8\sqrt{76}},$$

$$> \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{265} + \frac{1}{2}\sqrt{50 + 13\sqrt{265}},$$

das ist

$$n < 22{,}8045,$$

$$> 17{,}9300.$$

Diophant setzt $n = 20$, so gewinnt er

$$x = \frac{460}{40} = \frac{23}{2}.$$

Ist nun A die Anzahl der Maasse zu acht Drachmen, B diejenige der Maasse zu fünf Drachmen, so haben wir

$$A + B = \frac{23}{2} = \frac{46}{4},$$

$$8A + 5B = \frac{529}{4} - 60 = \frac{289}{4},$$

$$5A + 5B = \frac{230}{4},$$

$$8A + 8B = \frac{368}{4},$$

$$3A = \frac{59}{4},$$

$$3B = \frac{79}{4},$$

$$A = \frac{59}{12} \qquad\qquad 8A = \frac{472}{12},$$

$$B = \frac{79}{12} \qquad\qquad 5B = \frac{395}{12},$$

$$A + B = \frac{138}{12} \qquad\qquad 8A + 5B = \frac{867}{12} = \frac{289}{4},$$

$$= \frac{46}{4} = \frac{23}{2} \qquad\qquad + 60 \qquad = \frac{240}{4},$$

$$8A + 5B + 60 = \frac{529}{4} = \left(\frac{23}{2}\right)^2.$$

3. Der Ansatz auch so: $A + B$ sei die Anzahl der Maasse der beiden Sorten, so ist der Preis $8A + 5B$ und das soll ein Quadrat sein. Es soll aber auch $8A + 5B + 60$ ein Quadrat sein, und zwar $(A + B)^2$. Sei nun $A + B = x$, so ist

$$8A + 5B + 60 = x^2,$$
$$8A + 5B = x^2 - 60$$

und das soll Quadrat sein.

Sei es $= (x - n)^2$. Danach haben wir für A und B die Gleichungen:

$$A + B = x,$$
$$8A + 5B = x^2 - 60 = (x - n)^2,$$
$$5A + 5B = 5x,$$
$$8A + 8B = 8x,$$
$$A = \frac{x^2 - 5x + 60}{3},$$
$$B = \frac{-x^2 + 8x + 60}{3}.$$

Damit A und B positiv werden, muss

$$x^2 - 5x > 60, \quad x^2 - 8x < 60$$

sein, also

$$x > \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{265}, \quad < 4 + \sqrt{76}.$$

Nun folgt aber aus $x^2 - 60 = (x - n)^2$, $x = \frac{n^2 + 60}{2n}$,

also

$$\frac{n^2 + 60}{2n} > \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{265},$$
$$< 4 + \sqrt{76}$$

u. s. w.

Beispiel in ganzen Zahlen:

Wein zu 13 Drachmen und zu 9 Drachmen

$$13A + 9B = x^2 - 60,$$
$$A + B = x,$$

$$A = \frac{x^2 - 9x + 60}{4}, \quad B = \frac{-x^2 + 13x + 60}{4}, \quad x > 13{,}458, \quad x < 16{,}612, \quad x = \frac{n^2 + 60}{2n},$$

also

$$n > 24{,}46,$$
$$< 47{,}92.$$

Sei $n = 30$, so ist $x = 16$

$$A = 13, \quad B = 3; \quad A + B = 16, \quad 13A + 9B = 196 = 14^2,$$
$$13A + 9B + 60 = 256 = 16^2.$$

Buch VI.

Aufgabe 1. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, dass die Hypotenuse eine Cubikzahl wird, wenn man jedwede der beiden Katheten davon abzieht.

Bilde allgemein das Dreieck aus den Zahlen x und $2m^3$, also

$$x^2 + 4m^6, \quad x^2 - 4m^6, \quad 4m^3x,$$

so ist eine Bedingung gelöst. Die andere ist

$$x^2 + 4m^6 - 4m^3x = \text{Cubus};$$

es ist aber $= (x - 2m^3)^2$, also $x - 2m^3 = n^3$, $x = 2m^3 + n^3$. Demnach ist das Dreieck zu bilden aus den Zahlen $2m^3 + n^3$ und $2m^3$.

Aufgabe 18. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, dass, wenn man die spitzen Winkel desselben hälftet, die hälftende Linie sich durch eine Rationalzahl ausdrücken lässt.

(Anmerkung von Nesselmann.) Dagegen kann die Linie, welche den rechten Winkel halbirt, nie rational werden; denn, wenn die Katheten a und c sind, und BF den Winkel B halbirt, so ist

$$BF = \frac{ac}{a+c}\sqrt{2}.$$

Sei

$$BD = (m^2 + n^2)x,$$
$$AB = 2mnx,$$
$$AD = (m^2 - n^2)x.$$

Sei ferner $AC = (m^2 - n^2)p$, also $CD = (m^2 - n^2)(p - x)$, so ist

$$AD : AB = CD : BC,$$

das ist

$$(m^2 - n^2) : 2mn = (m^2 - n^2)(p - x) : BC,$$
$$BC = 2mn(p - x).$$

Nun soll noch sein $BC^2 = AB^2 + AC^2$, das ist

$$4m^2n^2p^2 - 8m^2n^2p^2x + 4m^2n^2x^2 = 4m^2n^2x^2 + (m^2 - n^2)p^2,$$

$$x = \frac{4m^2n^2 - (m^2 - n^2)}{8m^2n^2}\,p$$

cetera patent.

Bei Diophant ist $m = 2$, $n = 1$, $p = 1$.

Aufgabe 19. In derselben wird von Diophant verlangt: Eine Cubikzahl zu suchen, welche um zwei grösser ist als eine Quadratzahl.

Bekannt ist (durch Diophant's Rechnung):

$$3^3 - 2 = 5^2,$$
$$(3-x)^3 - 2 = (nx-5)^2,$$
$$25 - 27x + 9x^2 - x^3 = n^2x^2 - 10nx + 25,$$
$$-27 + 9x - x^2 = n^2x - 10n.$$

Sei $10n = 27$, $n = \frac{27}{10}$, $9 - x = \frac{729}{100}$, $x = \frac{171}{100}$, folglich

$$\left(\frac{129}{100}\right)^3 - 2 = \left(\frac{383}{1000}\right)^2.$$

Aufgabe 20. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, dass die Summe der Fläche und der Hypotenuse eine Cubikzahl, der Umfang desselben aber eine Quadratzahl wird.

Wenn man ein Dreieck bildet aus den Zahlen m und $\frac{2p^2 - q^2}{q^2}m$, wo $q^2 \begin{matrix} < 2p^2 \\ > p^2 \end{matrix}$ ist, so ist der Umfang eine Quadratzahl. Man kann auch setzen

$$m = q^2, \quad n = 2p^2 - q^2$$
$$m^2 = q^4,$$
$$n^2 = q^4 - 4p^2q^2 + 4p^4$$

$$m^2 + n^2 = 2q^4 - 4p^2q^2 + 4p^4$$
$$m^2 - n^2 = + 4p^2q^2 - 4p^4$$
$$2mn = -2q^4 + 4p^2q^2$$

$$\text{Summe} = 4p^2q^2.$$

Es ist auch

$$\left(\frac{66113}{80656}\right)^3 + 2 = \left(\frac{166709671}{22900304}\right)^2.$$

Zu Buch IV, Aufgabe 9. Im Allgemeinen sind zwei Zahlen, deren Cubi um eine Quadratzahl verschieden sind, folgende beiden:

$$x = \frac{2m^2(b+1)}{3b^2+1}, \quad y = \frac{2m^2(b-1)}{3b^2+1},$$

und wenn auch $x - y$ ein Quadrat sein soll

$$x = \frac{2m^2(3q^2 - p^2)(2pq + 3q^2 - p^2)}{(3q^2 + p^2)^2}, \quad y = \frac{2m^2(3q^2 - p^2)(2pq - 3q^2 + p^2)}{(3q^2 + p^2)^2},$$

für $x - y = 1$ ist $\quad x = \frac{m^2 - 2mn}{m^2 - 3n^2}, \quad y = \frac{3n^2 - 2mn}{m^2 - 3n^2}.$

Zu Buch IV, Aufgabe 44. Wenn die drei Zahlen x, y, z sind, und A eine dreieckige Zahl bedeutet, so ist allgemein

$$x = \frac{2mA}{A + c^3 + m^2}, \quad y = \frac{(A + c^3 - m^2)^2}{2m(A + c^3 + m^2)}, \quad z = \frac{2mc^3}{A + c^3 + m^2}.$$

Ihre Summe $= \frac{A + c^3 + m^2}{2m} = S$, also

$$xS = A = \frac{a(a+1)}{2},$$
$$yS = \frac{(A + c^2 - m^2)^2}{4m^2},$$
$$zS = c^3.$$

c^3 und m können jede ganze und gebrochene Zahl bedeuten. In Diophant's Beispiel ist $c = 2$, $A = 153 = 17\triangle$, $m = 1$.

Zu Buch V, Aufgabe 14. Soll eine Zahl von der Form $8n + 7$ zugleich die Form $3a + 1$ haben, so wird sie die Form $24p + 7$ annehmen, und diese eben sind es, welche Diophant's Determination ausschliesst. Die dazwischen liegenden Zahlen der Form $8n + 7$ stehen in keinem Connex zur Aufgabe, da sie nicht $3a + 1$ sind.

Nur in vier Quadrate lassen sich zerlegen die Zahlen von der Form $2^{2n+3}.P + 7.2^{\lambda n}$. Die einzigen ungeraden Zahlen dieser Formel sind die von der Form $8P + 7$ (wo $n = 0$). Damit $3a + 1$ nicht $8P + 7$ werde, muss a nicht $8P + 2$ sein. Im Allgemeinen aber muss a nicht sein $2^{2n+3}P + \frac{7.2^n - 1}{3} = 2^{2n+3}P + 2^{2n+1} + \frac{2^{2n}-1}{3}$ (NB! $\frac{2^{2n}-1}{3}$ ist immer eine ganze Zahl.) Siehe Fermat's Observatio. Hat a die Form $4p + 3$, so ist die Auflösung immer möglich, denn dann ist $3a + 1 = 12p + 10$, ungerad gerade $(= 2(6p + 5)$ also immer in drei Quadrate zerlegbar. Hat aber a die Form $4p + 1$, so wird $3a + 1 = 12p + 4$, und es treten dann weitere Determinationen ein, die Diophant nicht gegeben hat. Diophant's Determination excludirt nur die unzulässigen geraden, nicht die unzulässigen ungeraden a.

Zu Buch VI, Aufgabe 13. Allgemeine Auflösung. $ax^2 + b = m^2$; sei $x = y + n$, so ist $ax^2 + b = ay^2 + 2nay + an^2 + b$. Dieses soll ein Quadrat sein, was möglich ist, wenn $an^2 + b$ ein Quadrat wird, das ist aber wieder die ursprüngliche Gleichung. Hat man also einen Werth für x, welches $ax + b$ zum Quadrate macht, so kann man durch die Substitution $x = y + n$ unzählige andere finden. Wenn man nämlich den Werth für x, welcher $ax^2 + b = m^2$ macht, für n substituirt, so hat man die Formel $ay^2 + 2nay + m^2$ zum Quadrat zu machen.

Zu Buch VI, Aufgabe 18. Es ist im Allgemeinen

$$AB = 2mn, \quad BD = m^2 + n^2, \quad AC = \frac{8m^2n^2(m^2 - n^2)}{4m^2n^2 - (m^2 - n^2)^2},$$
$$BC = 2mn\left[\frac{4m^2n^2 + (m^2 - n^2)}{4m^2n^2 - (m^2 - n^2)^2}\right] = \frac{2mn(m^2 + n^2)^2}{4m^2n^2 - (m^2 - n)^2},$$
$$AD = m^2 - n^2, \quad DC = \frac{(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)^2}{4m^2n^2 - (m^2 - n^2)^2},$$

B E A D C

oder: wenn $BC = a^2 + b^2$, $BA = a^2 - b^2$, $AC = 2ab$ ist, so ist BD rational, wenn $a^2 + b^2$ ein Quadrat, aber CE rational, wenn $a^2 + b^2$ ein doppeltes Quadrat ist, also können in keinem Dreiecke BD und CE zugleich rational sein.

Noch allgemeiner, wenn kein rechtwinkliges Dreieck erforderlich wird, ist die Auflösung diese:

$$a = \frac{mnq^2(m+n)}{q^2(m+n) - r^2(m-n)}, \quad b = n^2\, \frac{q^2(m+n) + r^2(m-n)}{q^2(m+n) - r^2(m-n)},$$

$$c = \frac{mnr^2(m-n)}{q^2(m+n) - r^2(m-n)}, \quad s = \frac{(m^2-n^2)nqr}{q^2(m+n) - r^2(m-n)}.$$

Die Auflösung beruht auf dem Satze: Die Differenz der Seiten a, c ist die mittlere Proportionale zwischen der Differenz der Höhenabschnitte und der Differenz der Abschnitte, welche die Halbirungslinie auf b bildet, oder auch, wenn man $c = m$, $s = n$, $f = p$ setzt, so ist

$$a = \frac{mn^2}{m^2 - p^2}, \quad b = p \cdot \frac{m^2 + n^2 - p^2}{m^2 - p^2} \quad p \begin{matrix} < m \\ > m - n. \end{matrix}$$

Zu Buch VI, Aufgabe 19. Aus einer Auflösung unzählige zu finden.

Sei $m^2 + a = n^3$ gegeben, so soll auch $x^2 + a = y^3$ werden. Sei $x = m - 2$, $x^2 + a = n^3 - 2mz + n^3 = y^3$. Sei $y = n - \frac{2m}{3n^2z}$, so wird $z = \frac{36m^2n^3 - 27n^6}{8m^3}$, daher $x = \frac{8m^4 - 36m^2n^3 + 27n^6}{8m^3}$, $y = \frac{9n^4 - 8m^2n}{4m^2}$.

Die Auflösung wird immer möglich sein, wenn a der Ueberschuss eines Cubus über ein Quadrat ist.

Recensionen.

Die Elementar-Planimetrie. Ein methodisches Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht. Von H. Müller, Kgl. Gymnasiallehrer. Berlin, Verlag von Jul. Springer. 1891. 187 S. 8⁰. Preis: 2,40 Mk.

Der Verfasser beginnt mit ziemlich abstracten und gelehrten Entwickelungen über die Grundbegriffe, denen der Anfänger unmöglich folgen kann, zumal sie eine Reihe Unrichtigkeiten bezw. Ungenauigkeiten enthalten, auf die einzugehen zu weit führen würde; wir wollen nur auf das Raisonnement hinweisen, dass es keine weiteren Grundgebilde als Punkt, Linie, Körper gebe. Kugelfläche und Kreis erscheinen eher als die Gerade, welche als Inbegriff aller derjenigen Punkte erklärt wird, welche bei der Drehung eines festen Körpers um zwei Punkte ihre Lage im Raume behalten. Noch viel verwickelter ist die Definition der Ebene, die als eine Art Kegelfläche aufgefasst wird, was für den Anfänger sehr ermuthigend sein mag, umsomehr, da die bezüglichen Erläuterungen mehr als eine Seite umfassen. Die Erklärung des Kreises wird dadurch unklar gemacht, dass eine neue, von der früher angeführten ganz abweichende Erklärung gegeben wird, und darin das unbestimmte Wort Fläche statt Ebene gebraucht wird. Der Winkel wird erklärt als Theil der Ebene, der durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen begrenzt wird. Er ist ein „unbegrenzt grosses Flächenstück, und es ist deshalb nicht möglich, die wirkliche Grösse eines Winkels zu messen“ (sic!). Das Kapitel „Beweisformen und Grundsätze“ ist schwer verständlich; hier, wie an machen anderen Stellen, vergeht sich der Verfasser gegen den alten pädagogischen Grundsatz: „Erst die Beispiele, dann die Regel“. Ganz verfehlt ist das Capitel über die Parallelentheorie. Die neuere, so reiche Literatur über diese „Klippe der elementaren Geometrie“ hat längst gezeigt, dass der vom Verfasser Seite 27 gegebene Beweis des Haupttheorems falsch ist. Nicht nur die meisten Erklärungen und Beweise sind wenig elegant und sehr weitläufig, sondern auch der Inhalt ist zu weitläufig und enthält vieles für die Schule ganz Ueberflüssige, z. B. die Capitel über die nicht congruenten Dreiecke, Vierecke etc., über congruente Parallelogramme, über Winkelhalbirungslinien im Parallelogramm, über die Verbindungslinie der Diagonalen-Mitten im Trapez. — Von Werth scheinen uns die im Laufe des Textes verschiedentlich auf-

tretenden und besonders hervorgehobenen „Winke“ zu sein, deren Zusammenstellung als eine Art Anleitung zur Führung von Beweisen gelten kann.

F. Schütte.

Vorschule der Mathematik für österr. Untergymnasien von Jos. Schram, Professor am Communal-Real- und Obergymnasium in Mariahilf und Rud. Schüssler, Doctor der Philosophie. Mit 384 Figuren in besonderem Heft. (Mit Erlass des hohen k. k. Ministeriums etc. zum Unterrichtsgebrauche zugelassen.) Wien 1890. Alfred Hölder. 219 S. 8⁰. Preis geheftet 1 fl. 24 kr. Dazu: Vier besondere Hefte „Uebungsstoff“.

Dieses Lehrbuch bietet dem Schüler den gesammten Lehrstoff wohlgegliedert in kurzer und bündiger Form. Wir hatten schon im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift Gelegenheit, auf die Vorzüge dieses Werkes, welche der nunmehr vorliegenden neuen Auflage in gleicher Weise anhaften, aufmerksam zu machen, und wollen dasselbe hiermit nochmals auf's Wärmste empfehlen.

F. Schütte.

Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Von Dr. M. Paul Mansion. Vom Verfasser durchgesehene und vermehrte deutsche Ausgabe. Mit Anhängen von S. von Kowalevsky, Imschenetzky und Darboux. Herausgegeben von H. Maser. Berlin. Julius Springer. 1892. 8⁰. XIV und 489 S.

Die erste Auflage dieses vortrefflichen Werkes, welches die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in ihrer historischen Entwickelung vorführt und mit kritischem Geiste den verschiedenen Methoden, unter lichtvoller Darlegung ihrer Beziehungen zu einander, die gebührende Stellung im System anweist, ist im 22. Jahrgange dieser Zeitschrift ausführlich besprochen worden.

Die neue Ausgabe, welche in deutscher Sprache veranstaltet ist, unterscheidet sich von der ersten durch Hinzufügungen, die in besonderen Nachträgen gegeben werden, und durch eine beträchtliche Vermehrung der bibliographischen Notizen, während der Vortrag des Textes, abgesehen von gewissen Berichtigungen, im Wesentlichen unverändert geblieben ist. Die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen allein ist in veränderter Darstellung entwickelt, in Folge der gleichzeitigen Berücksichtigung der singulären Lösungen nach dem Vorgange des Herrn Gilbert, der zuerst auf die Unzulänglichkeit der üblichen Art der Auseinandersetzung hingewiesen hat. Von dieser Aenderung werden lediglich die Nummern 18, 20 und 25 des Textes betroffen, Nr. 20 nur insofern, als zu den früheren Beispielen noch die Herrn Cockle entlehnte Gleichung $(x+y)(1+p+q)+zp=0$ hinzugefügt wird, von der $x+y+z=0$ eine singuläre Lösung sein soll, die in dem allgemeinen Integral nicht enthalten sei. Bemerkt man jedoch, dass in der allgemeinen Lösung $v=\varphi(u)$, wo φ eine willkürliche Function

bedeutet, auch $v = const.$ und insbesondere $v = \infty$ enthalten ist, so erhellt, da hier

$$v = log(x + y + z) + \frac{z}{x + y + z}$$

ist, dass $x + y + z = 0$ auch als eine particuläre Lösung bezeichnet werden kann. Der Beweis der Existenz des allgemeinen Integrals der partiellen Differentialgleichungen war in der französischen Ausgabe, als der allgemeinen Theorie der Functionen angehörend, fortgelassen worden. Zur Ausfüllung dieser Lücke dient der erste Anhang, worin die berühmte Abhandlung der Frau von Kowalevsky „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen“ aus Crelle's Journal, Bd. 80, abgedruckt ist. Ferner befindet sich am Schlusse der Einleitung als Nachtrag I eine historische Uebersicht über die auf die Existenz des allgemeinen Integrals und der singulären Lösungen der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen bezüglichen Untersuchungen. Das erste Buch ist durch zwei Nachträge vermehrt. Nachtrag II giebt eine Anwendung der Cauchy'schen Methode, um zu zeigen, wie diese Methode zugleich das allgemeine Integral und die singuläre Lösung geben kann. Im Nachtrag III wird als Anwendung der Theorie der linearen Gleichungen die partielle Differentialgleichung der Regelflächen integrirt. Endlich wird den beiden ersten Capiteln des zweiten Buches, die der Jacobi'schen Methode gewidmet sind, als Nachtrag IV die neue Darlegung hinzugefügt, die Herr Gilbert in der wichtigen Arbeit „Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la méthode de Jacobi“ (Ann. de la soc. sc. de Bruxelles 1881, Bd. V) von dieser Methode gegeben hat. Die gewöhnliche Art ihrer Darstellung litt an dem Mangel, dass die verschiedenen Formen, unter denen die Jacobi'schen Integrabilitätsbedingungen sich darstellen lassen, im Verlauf der Integration sämmtlich als Identitäten behandelt werden, die sie nicht nothwendig zu sein brauchen, und dass ferner die Relationen, die benutzt werden, um nach und nach zu den Gleichungen zu gelangen, welche mit der gegebenen partiellen Differentialgleichung ein integrables System ausmachen sollen, nicht Folgen der früher erhaltenen Gleichungen sind, sondern unzulässiger Weise auf die Voraussetzung gestützt werden, die erst als Resultat erscheinen soll, nämlich, dass das durch das Verfahren am Schluss sich ergebende System von Gleichungen integrabel ist. Die bezeichnete Schwierigkeit wird vermieden, indem mit Hilfe einer Gleichung, die eine wichtige Eigenschaft der Poisson'schen Function darstellt, die Integrabilitätsbedingungen auf identische Formen gebracht werden, was unerlässlich ist, um die benutzten Relationen unabhängig vom Endresultat als richtig zu erweisen. Es sei hier gelegentlich darauf hingewiesen, dass Herr Frobenius auf eine analoge Lücke in den gewöhnlichen Darstellungen des Pfaff'schen Problems, wovon bekanntlich die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ein specieller Fall ist, in seiner bereits im Jahre 1877 erschienen Arbeit „Ueber das Pfaff'sche Problem“ (Crelle, Journ.

Bd. 72) die Aufmerksamkeit gelenkt und den vermissten Beweis für die Integrabilität der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen, aus denen der Reihe nach die Functionen in dem reducirten Differentialausdrucke zu bestimmen sind, geliefert hat.

Eine höchst werthvolle Bereicherung verdankt das Werk dem Uebersetzer Herrn Maser durch Anfügung zweier wichtiger Arbeiten auf dem Gebiete der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in deutscher Uebertragung. Die erste Arbeit hat Herrn Imschenetzky zum Verfasser und erschien zuerst in russischer Sprache in den Mém. de Kasan, 1868. Sie wurde von Herrn J. Hoüel übersetzt und 1872 in Grunert's Archiv, Bd. 54, unter dem Titel „Etude sur les méthodes d'intégration aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables“ veröffentlicht. Auf dem noch so wenig angebauten Felde der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bietet die Abhandlung dem Leser eine gründliche Orientirung über Alles, was in Integrationsmethoden bis zur Zeit geleistet worden ist, mit Ausschluss der Integration durch Reihen und bestimmte Integrale, und eine Vervollständigung der betreffenden Untersuchungen durch neue Methoden, namentlich bezüglich der Ampère'schen Gleichung. Leider fehlt ein Inhaltsverzeichniss des umfangreichen Aufsatzes, was uns zu der Bemerkung veranlasst, dass Herr A. Mayer seinem bezüglichen Berichte im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik einen sehr ausführlichen Index nach Capitel und Paragraphen beigefügt hat.

Die zweite Arbeit von Herrn Darboux, in den Ann. de l'éc. Norm. VII 1870, unter dem Titel „Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre“ erschienen, enthält ein kurzes Exposé einer neuen Methode, die einen Fortschritt in der Behandlung der partiellen Differentialgleichungen bezeichnet und durch die Ausdehnung bemerkenswerth ist, die sie auf Gleichungen aller Ordnungen mit beliebig vielen Variablen gestattet.

Zur Erhöhung der praktischen Brauchbarkeit des Buches sind am obern Rande jeder Seite Hinweise auf den Inhalt und die fortlaufenden Nummern gegeben. Ein ausführliches Autorenverzeichniss bildet den Schluss. In der Uebersetzung des Textes, die sehr sorgfältig ausgeführt ist, ist uns eine Stelle aufgefallen, die einer Berichtigung bedarf. Auf Seite 97, Zeile 4 von oben, steht „oder“ statt „nun ist aber“ als Uebersetzung des in der französischen Ausgabe gebrauchten „or“. Die beiden mit dieser Partikel a. a. O. in Verbindung gesetzten Relationen sind in der That weder gleichbedeutend, noch Folgen von einander, vielmehr bildet die zweite Relation das vermittelnde Glied, um aus der ersten die weiteren Folgerungen abzuleiten.

Möge das Buch in der neuen Auflage, die hervorragend schön ausgestattet ist, einem weiteren Kreis von Lesern in einem der wichtigsten Theile der Analysis ein bewährter Führer sein und Anregung zu eigenen Forschungen bieten!

HAMBURGER.

Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie. Von Prof. Dr. B. Féaux, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Arnsberg. Sechste verbesserte Auflage besorgt durch Friedr. Busch, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Arnsberg. Mit 51 eingedruckten Figuren. Paderborn, Druck und Verlag von Ferd. Schöningh. 1891. 157 S. 8⁰.

Die Féaux'schen Lehrbücher, denen man es auf den ersten Blick ansieht, dass sie sozusagen ganz aus dem Unterrichte herausgewachsen, sind in Bezug auf ihre praktische Brauchbarkeit bekannt genug und oft genug von der Kritik lobend besprochen worden, als dass wir hier darüber weitere Worte verlieren brauchen. — Die hier vorliegende von Herrn Friedr. Busch neu bearbeitete sechste Auflage der ebenen Trigonometrie und elementaren Stereometrie zeigt nichts desto weniger gegen die fünfte, von Herrn Luke besorgte Auflage, einige nicht unwesentliche Verbesserungen. Der sprachliche Ausdruck und die mathematische Bezeichnung ist vielfach verbessert und präciser gestaltet. Die Einleitung in die Trigonometrie hat eine einfachere, übersichtlichere Darstellung und einen eleganteren Zusammenhang erhalten, ausserdem ist jetzt in derselben der allgemeine Functionsbegriff entwickelt worden. Die Stereometrie ist durch ein Capitel über das Prismatoid bereichert worden. — Eine wesentliche Umgestaltung haben die Figuren in der Stereometrie erfahren. Dieselben sind fast alle durch neue ersetzt worden, die sich durch besondere Anschaulichkeit auszeichnen. Es sind nämlich diejenigen Linien der Figuren, welche dem Beschauer am nächsten liegen, dicker gezeichnet, und zwar um so mehr, je näher sie sind; allerdings in etwas übertriebener Weise, aber die Figuren treten in Folge dessen in so aufdringlicher Weise plastisch hervor, dass man weiterer Veranschaulichungsmittel ganz entbehren kann. Bei den Figuren mancher Lehrbücher ist man oft im Zweifel, welche Theile man sich als vorne, welche als hinten liegend denken soll. Diese Zweideutigkeit ist hier völlig ausgeschlossen. Man zeichne einmal solche Figuren, wie sie Herr Busch hier geliefert hat, auf die Wandtafel, man wird überrascht sein, wie schön und plastisch sie gerade dort hervortreten. Wir glauben den lehrenden Fachgenossen einen Dienst zu erweisen, indem wir auf diesen Umstand besonders hinweisen. Die wenigen noch gebliebenen alten Figuren werden hoffentlich in der folgenden Auflage in dem verbesserten Typus neu erstehen.

F. Schütte.

Planimetrische Aufgaben für den Gebrauch im Schul-, Privat- und Selbstunterricht. Bearbeitet von Prof. Dr. F. Reidt, Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm. Erster Theil. Aufgaben geordnet nach den Lehrsätzen des Systems. Zweite Auflage. Breslau, Verlag von Eduard Trewendt. 1890. 96 S. 8⁰. Preis 1,60 M.

„Das Gebiet der planimetrischen Aufgaben ist bereits von so vielen Seiten mit günstigem Erfolge behandelt worden und die bezüglichen Schriften

sind zum Theil so umfangreich, dass eine neue Sammlung von Aufgaben aus der Planimetrie ihre Berechtigung nicht in der Beseitigung eines Mangels an für die Zwecke des Unterrichts brauchbarem Material finden kann. Man wird daher auch von der vorliegenden in stofflicher Hinsicht nichts Neues erwarten dürfen." „Anders verhält es sich mit der nicht minder wichtigen Anordnung und Behandlungsweise des Stoffes. Die dem Verfasser bekannt gewordenen gebräuchlichen Sammlungen scheinen ihm die Aufgaben zu sehr als Selbstzweck zu behandeln und dieselben in nicht hinreichend engem Anschluss an die einzelnen Partien des fortschreitenden Unterrichts zu bringen." — „Aus diesem Grunde ist die vorliegende Schrift in zwei Heften herausgegeben worden, deren ersteres das Uebungsmaterial für die einzelnen Sätze und Satzgruppen nach diesen geordnet giebt und dasselbe so auswählt, dass es zur unmittelbaren Erläuterung geeignet erscheint. Zu beweisende Lehrsätze, Rechnungsaufgaben und diejenigen Constructionsaufgaben, welche man wohl als mittelst „Analysis durch Lehrsätze" lösbar bezeichnet, bilden daher fast ausschliesslich den Inhalt dieses ersten Heftes." — Das Beweisen von möglichst vielen Lehrsätzen ist aber gewiss nicht die Aufgabe des mathematischen Unterrichtes, sondern eher das Lösen von Constructionsaufgaben. Hierbei verdient aber die Anordnung der Aufgaben nach Methoden schon wegen ihrer Wissenschaftlichkeit den Vorzug. Dennoch dürfte auch die hier angewandte Weise, die Aufgaben nach ihrem sachlichen Inhalte, bezüglich der einzelnen Arten der behandelten Figuren, oder nach den Lehrsätzen des Systems für die Praxis des Unterrichtes namentlich bei weniger begabten Schülern auch ihre Vorzüge haben. Als eine zu lobende Eigenthümlichkeit des Büchleins wollen wir noch hervorheben, dass die für die Lösung nöthigen Lehrsätze in vollem Wortlaute jedem einzelnen Abschnitte vorausgehen.

F. Schütte.

Bibliographie

vom 1. August bis 15. September 1892.

Periodische Schriften.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. 6. Heft. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 25. Herausgegeben von C. Vogel. Potsdam u. Leipzig, Engelmann. 10 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1889. Königreich Preussen. 3. Heft. Herausgegeben von W. von Bezold. Berlin, Asher & Co. 21 Mk.

—— für 1891. Königreich Sachsen. 1. Hälfte. Herausgegeben von P. Schreiber. Chemnitz, Brunner. 10 Mk.

Mémoires de l'académie imp. d. sc. de St. Petersbourg. VII. série, tome 35, No. 9—13. Leipzig, Voss. 11 Mk. 20 Pf.

Reine Mathematik.

Riemann's Gesammelte Werke. Herausgegeben von H. Weber. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Krazer, A. und F. Prym, Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Ebendaselbst. 7 Mk. 20 Pf.

Hirsch, A., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit eindeutigem Integral. Königsberg, Koch. 20 Pf.

Sturm, R., Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Theil. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Eberle, F., Ueber rationale Raumcurven fünfter Ordnung insbesondere über die vierter und fünfter Classe. München, Lindauer. 1 Mk.

Madel, W., Die wichtigeren Dreiecksaufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Berlin, M. Rüger. 1 Mk. 80 Pf.

Angewandte Mathematik.

Grossmann, E., Ueber systematische Fehler bei Doppelstern-Beobachtungen in Verbindung mit einer Bahnbestimmung von η coronae borealis. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk. 60 Pf.

Kahle, P., Sonnen- und Sterntafeln für Deutschland, Oesterreich und die Alpen. Aachen, Mayer. 1 Mk. 35 Pf.

Physik und Meteorologie.

Hoffmann, G., Die Anderssohn'sche Drucktheorie und ihre Bedeutung für die einheitliche Erklärung der physikalischen Erscheinungen. Halle, Schwetschke. 1 Mk.

Zwerger, M., Leitfaden zum Unterrichte in der elementaren Physik. 1. Theil. München, Lindauer. 1 Mk. 50 Pf.

Feigentraeger, W., Die längste nachweisbare Periode der erdmagnetischen Elemente. 1. Theil. Declination. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk. 40 Pf.

Schneider, H., Gegen Falb's kritische Tage. Berlin, Dümmler. 50 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Unsere Kenntnisse von alten Erd- und Himmelsgloben.

Von

ARMIN WITTSTEIN.

Als ich in meinen „Historisch-astronomischen Fragmenten aus der orientalischen Literatur"* die These aufstellte, „dass, soweit mein Wissen reiche, von einem arabischen oder anderen Erd- resp. Himmelsglobus sichere Kunde erst wieder aus dem 13. Jahrhunderte auf uns gekommen sei, und wir darüber nicht berichten könnten, wie es innerhalb eines Zeitraumes von mehr als 1400 Jahren (nämlich seit Krates) im Punkte der Verfertigung solcher Globen ausgesehen haben mag," — war mir so ziemlich alles Das, was man gegen meine Behauptung einwenden und einen oberflächlichen Beurtheiler mühelos in den Stand setzen kann, sie scheinbar ad absurdum zu führen, bereits bekannt. Damals glaubte ich jedoch dem sachkundigen Leser einen Beweis, der ja nicht viel mehr als eine rein compilatorische Bearbeitung vereinzelnter Angaben erfordert, kaum schuldig zu sein. Um aber einer, der meinigen entgegengesetzten Ansicht, die im Allgemeinen als die dominirende zu betrachten ist, zu ihrem Rechte zu verhelfen, fehlte es mir und fehlt es mir noch an überzeugendem Material, das sichere Schlüsse gestattete; ich befand mich eben nahezu in derselben Lage, wie vor 60 Jahren Ideler, der in seinem chronologischen Werke der chinesischen Zeitrechnung nicht gedacht hatte und erst später seine Gründe dafür angab: „Nicht, dass es an Nachrichten darüber fehlte; es finden sich deren genug, in manchen Büchern zerstreut. Allein alle diese Nachrichten stehen isolirt und schwankend da. . . . . Ich habe daher in meinem Handbuch der Chronologie von der Sache lieber ganz schweigen, als nach dem Beispiel meiner Vorgänger einzelne Notizen mittheilen wollen, deren Richtigkeit sich aus inneren Gründen nicht wenigstens wahrscheinlich machen liess." („Zeitrechnung von Chatâ und Igûr.")

Obwohl nun inzwischen meine Kenntnisse nicht bereichert und, vor Allem, Schriften, die mich eines Besseren belehren könnten, mir eben so

* „Abhandlungen z. Geschichte d. Mathematik," VI. Heft. Leipzig, 1892. gr. 8°.

wenig zu Gesicht gekommen sind, meine Auffassung also unverändert dieselbe geblieben ist, gestehe ich jetzt doch, dass es vielleicht besser gewesen wäre, wenn ich a. a. O. mit dem, was ich weiss, und auf Grund dessen ich mir mein Urtheil gebildet habe, nicht zurückgehalten hätte. Ich hole deshalb das Versäumte hier nach und bemerke dazu im Voraus, dass an der ganzen Collection nur etwa ein halbes Dutzend Quellen participirt, deren Mehrzahl selbst wieder aus Manuscripten geschöpft hat.

I.

Den Anfang mache ich mit dem grossen Sammelwerke des Fabricius*, und zwar mit dessen fünftem Bande, in welchem auf den Seiten 297 bis 306 der Geschichte der Globen ein besonderer Abschnitt gewidmet ist; aus ihm hebe ich Nachstehendes heraus:

Globum coelestem primus videtur construxisse stellis in eo notatis Hipparchus. . . . . . Gassendi, qui Eudoxum putat esse primum, qui partim Aegyptias, partim Graecas imagines siderum repraesentari in globo solidave sphaera curavit. Eudoxi sphaeram descripsit Aratus, ut Hipparcho pridem notatum fuit. . . . . . In numis frequentissimum est, imperatores a Caesare usque, regesque ac principes cum globo in manu conspici, potestatis denotandae caussa. . . . . . In palatio Farnesiano Romae exstat statua Herculis circa Commodi imp. tempora, ut videtur, sculpta, sustinentis globum coelestem, sideribus insignitum, de quo adscribam haec Francisci Bianchini in historia universali, ex antiquis monumentis confirmata, Rom. 1699. 4⁰. Folgt der italienische Text.

Damit dürften die prägnantesten Stellen zur Anführung gelangt sein. Wenn wir einzeln, der Reihe nach, betrachten, welche Grade der Zuverlässigkeit ihnen gebühren, so erkennen wir, dass sich dieser gleich für die erste, Hipparch betreffende, Mittheilung als ein sehr niedriger erweist. Ohne Zweifel ist nämlich damit die, mindestens dunkele, Bemerkung am Schlusse des ersten Capitels des siebenten Buches im Almagest des Ptolemaeus gemeint; ich citire sie hier nach der Halma'schen Ausgabe (Paris, 1813 und 1816. 2 Bände in gr. 4⁰.):

Καὶ τούτους μέντοι πάλιν αὐτοὺς τοὺς σχηματισμοὺς εἴτις ἐφαρμόζοι ταῖς κατὰ τὸν τοῦ Ἱππάρχου τῆς στερεᾶς σφαίρας ἀστερισμὸν διατυπώσεσι, τὰς αὐτὰς ἂν ἔγγιστα εὕροι ταῖς νῦν, τὰς ἐκ τῆς τότε παρατηρήσεως κατὰ τὴν ἀναγραφὴν γινομένας αὐτῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ θέσεις.

Si l'on compare maintenant ces configurations aux représentations des constellations sur la sphère solide d'Hipparque, on trouvera que les positions qu' il a données aux étoiles, suivant son catalogue, sont à très-peu près les mêmes que celles qu'on remarque encore aujourd'hui.

---

* J. A. Fabricii Bibliotheca Graeca. Editio tertia curante Gottl. Christoph. Harles. Accedunt Chr. Aug. Heumanni supplementa inedita. Volumen quintum. Hamburgi, MDCCLXXXXVI. 4⁰.

Sie hilft uns herzlich wenig, wenngleich sie werthvoller erscheint, als die von Proclus in seinem Commentar zum Euclid (Proclus in Eucl., p. 41, 16)*: ἡ σφαιροποιία κατὰ μίμησιν τῶν οὐρανίων περιφορῶν, οἵαν καὶ Ἀρχιμήδης ἐπραγματεύσατο. Ja, es ist möglich, dass sich Archimedes in solcher Kunstfertigkeit versucht hat!

Einen weit besseren Anhalt dafür, dass man sich zu jenen Zeiten überhaupt mit der Herstellung künstlicher Himmelskugeln beschäftigte, giebt uns Ptolemaeus (achtes Buch, drittes Capitel) durch seine ausführliche Anleitung hierzu, die sich sogar auf die dabei zur Verwendung kommenden Farbentöne erstreckt. Wenn Letzterer es damals nicht für überflüssig hielt, auf derartige Details einzugehen, so war zu seiner Zeit dieser Zweig der Plastik weder neu, noch stand er auf einer tiefen Stufe der Ausbildung. Aber, wo wird ein Globus von Ptolemaeus aufbewahrt, oder, welches Schriftstück schildert uns einen solchen in auch nur annähernd befriedigender Weise? Einmal, und zwar im elften Jahrhunderte, wird allerdings ein Ort genannt, — ich komme später auf diese Notiz zurück — allein die ganze Nachricht ist so dürftig, dass sie wirklich gläubiger Gemüther bedarf, um nicht den Argwohn aufkommen zu lassen, es handele sich nur um eine Ausgeburt der Phantasie. Da ich eben eine manuale Fertigkeit eine nicht neue genannt habe, so kann man billiger Weise darüber eine Angabe von mir erwarten, seit wie lange ich ihren Bestand annehme. Deshalb sei jetzt jener Ausspruch dahin näher präcisirt, dass dieselbe, soweit sie sich mit plastischer Darstellung des gestirnten Himmels befasste, erst seit Hipparch ihre wahre Bedeutung erhalten haben kann; denn „erst jetzt wurde es möglich, die Sternbilder nach richtigen Verhältnissen auf Globen und Karten aufzutragen, und Veränderungen am Fixsternhimmel mit Sicherheit zu bemerken. Erst jetzt hatte man feste Punkte, womit man die Oerter der Sonne, des Mondes und der Planeten vergleichen konnte, ohne welche Vergleichung an eine, den Erscheinungen angemessene Theorie ihres Laufes nicht zu denken war.“ (Ideler, Untersuchungen über den Ursprung und die Bedeutung der Sternnamen.)

Den bisherigen Urkunden gleichwerthig erscheint die Erzählung des Strabo (S. 546 der zweiten Kasaubonischen Ausgabe), gelegentlich der Eroberung der Stadt Sinope** durch den bekannten Heerführer im Mithridatischen

* Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit J. L. Heiberg. 2. Band. Leipzig, 1881. 8⁰. Mit einer Lichtdrucktafel.

** Das heutige Sinob am Schwarzen Meere, etwas südlicher als die nördlichste Spitze Kleinasiens gelegen und zugleich das eine Ende einer weitgeschwungenen Bucht bildend, an deren anderem der ķyzyl irmâķ („rothe Fluss“, der Ἅλυς der Alten) mündet. Dieser grosse Fluss zeigt in seinem Laufe eine merkwürdige Aehnlichkeit mit dem Orinoco.

Kriege, L. Licinius Lucullus, dass nämlich den Bewohnern alle Zierden der Stadt erhalten geblieben seien, mit Ausnahme der Himmelskugel des Billaros und des Autolykos, eines Werkes von Sthenis; beide habe Lucullus mitgenommen. Ohne Frage muss man die Einnahme von Sinope in das erste Jahrhundert vor Chr. setzen; denn Cicero spricht in der *oratio de signis* (einer seiner Verrinischen Reden) von einem gewissen Eupolemus, der sich in der Begleitung des Lucullus befinde.

Ich komme nun zu Dem, der *Eudoxi sphaeram descripsit*, nämlich zum Aratus*, dem allein wir es zu danken haben, dass uns der wichtigste Theil der Lehren des Ersteren nicht verloren gegangen ist. Sollte man, wie so oft zu lesen, geneigt sein, unter dieser sphaera etwa eine *sphaera metallo solida* zu verstehen, dann muss ich sagen, dass der ganze Satz nur eine Fiction enthält. Ja, Aratus beschreibt allerdings die Sphäre des Eudoxus, aber die am Himmel, das heisst deren nothwendigste Kreise; nirgends spricht er von einer künstlichen. Vers 61 und 62 seines, wenigstens für mich, nichts weniger als leichten Gedichtes lauten:

κείνη που κεφαλὴ τῇ νίσσεται, ἧχί περ ἄκραι
μίσγονται δύσιές τε καὶ ἀντολαὶ ἀλλήλῃσιν.

Hierzu bemerkt u. A. der Scholiast: *ὁ δὲ νοῦς, ἐκείνη ἡ κεφαλὴ ἡ τοῦ Δράκοντος κατὰ τοῦτο τὸ μέρος νήχεται καὶ κολυμβᾷ ἄκρῳ τοῦ ὠκεανοῦ (τουτ ἔστι τοῦ ὁρίζοντος) ἐπιψαύουσα, ὅπου ἥ τε δύσις καὶ ἡ ἀνατολὴ ψαύουσιν ἀλλήλων, δηλονότι περὶ τὸν μεσημβρινὸν πόλον ἤγουν κύκλον.* Der Sinn ist also, dass der Kopf des Drachen bei der Umdrehung der Himmelskugel den Horizont im Norden berührt. Daraus hat man ableiten wollen, dass Eudoxus seine Kugel für eine Polhöhe von 38^0 eingerichtet habe, ein schon deshalb missliches Beginnen, weil die vier hellen Sterne (β, γ, ν^1 ν^2, ξ) am Kopfe des Drachen, um die es sich allein handeln kann, in Decl. fast bis zu 5.4^0 von einander abweichen können, und man nicht weiss, welcher gemeint war, wenn es auch wohl γ gewesen sein wird.

Schliesslich erübrigt noch, die Marmor-Statue im Farnesischen Palaste zu Rom** auf ihren Werth als zuverlässiges Denkmal der Globen-Verfertigung aus dem letzten Viertel des zweiten Jahrhunderts nach Chr. (wie Fabricius annimmt) zu prüfen. Hierbei werde ich mich jedoch nicht auf Das stützen, was Bianchini darüber mittheilt, sondern der umfangreichen Darstellung folgen, welche Passeri im Jahre 1750 gegeben hat.

---

* Aratus cum scholiis. Recognovit Immanuel Bekkerus. Berolini, 1828. 8^0.

** Atlas Farnesianus marmoreus, insigne vetustatis monumentum, commentario Jo. Baptistae Passerii inlustratus. Adcedunt ejusdem dissertationes XV in selectas gemmas antiquas astriferas et in praestantiora inedita cimelia. Florentiae, anno CIƆ.IƆ.CC.L. (Gori, Thesaurus gemmarum antiquarum astriferarum cum Atlante Farnesiano volumen III.) Klein-Folio, mit sechs Kupfertafeln.

Im 13. Capitel erörtert der Verfasser die Frage nach dem Alter jenes, von einem Atlas getragenen Himmelsglobus und findet, dass derselbe schon vor der Zeit der Antonine, also vor dem Jahre 150 nach Chr., angefertigt sein müsse. Da aber einige Gelehrte seine Entscheidung angezweifelt hätten, — *ob signorum Caelestium imagines in hoc globo expressas, quas in globis delineari consuevisse ante ea tempora constanter negant* — so wolle er jetzt zeigen, in wie weit zurückliegenden Zeiten das Eintragen von Sternen in die Oberfläche einer Himmelskugel bereits üblich gewesen sei. Zu diesem Zwecke muss ihm das ganze classische Alterthum dienstbar sein, und eine stattliche Reihe von Repräsentanten daraus ist es, die er aufmarschiren lässt; Homer, Sophokles, Euripides, Vitruv, Hyginus erscheinen in ganz neuem Lichte, und neben ihnen durfte auch des Anaximander's gewichtige Auctorität nicht fehlen. „Was aber, wie ich der Meinung bin, am unzweideutigsten beweist, dass seine Anfertigung in eine Zeit fällt, die der Regierungs-Aera der Antonine lange vorhergeht, ist, dass das Zeichen oder Bild des Antinous gar nicht darauf vorkommt.“ Dieses neue Gestirn sei erst von Hadrian an den Himmel gesetzt worden, und deshalb „müsse er sich gar sehr wundern, wie im Uebrigen gelehrte Männer einen solchen schwerwiegenden Umstand übersehen konnten.“ — Das hat sich der selige Kaiṣar, dessen Globus auch dieses Manco aufweist, im Jahre 1225 gewiss nicht träumen lassen, dass damit folgerichtig auch er und sein Machwerk dereinst in das zweite Jahrhundert nach Chr. verwiesen werden würden!

Abgesehen davon, dass es kaum nöthig ist, zu bemerken, dass der Antinous und das Haupthaar der Berenice (die sogenannten „unförmlichen“ Sterne im Adler und Löwen) erst von Tyge Brahe im eigentlichen Sinne als Bilder eingeführt worden sind, erinnert der Schluss-Satz ein wenig an „jene Höflichkeit, die (nach A. v. Humboldt) zu allen Zeiten wissenschaftliche Streitfragen begleitet und bezeichnet hat“, und ist überdiess, mit dem vorangehenden zusammengehalten, noch dazu angethan, Unbefangenen ein Lächeln zu entlocken, da der Verfasser gleich darauf etwas unvorsichtig — vielleicht aber auch, weil er selbst fühlen mochte, grösserer Nachdruck könne nicht schaden — seiner Weisheit wahre Quelle preisgiebt. Auf der ersten Kupfertafel wird nämlich ein, den Himmel tragender Atlas abgebildet, der dem Zeitalter der Antonine angehöre: *uti colligitur ex collocatione Asterismorum, relatâ ad sphaerae Circulos, ibidem expressos, et collatâ cum Tabulis et observationibus, à Ptolemaeo peractis eodem saeculo;* — wie die pomphafte Unterschrift besagt — sodann, und damit wird der Kern der Sache enthüllt, weil sich unter Schutthaufen Roms eine, im Farnesischen Palaste aufbewahrte Münze fand, die genau dieselbe Figur zeigt und unter dem 20. Tribunat des Antoninus Pius geprägt wurde. — Mir ist es unerfindlich, wie Jemand

tiefe Untersuchungen über Sternbilder anstellen kann, von denen nur wenige allgemeine Umrisse in einer Zeichnung vorliegen.

Mit diesem Bildnisse, ja sogar hinsichtlich einiger Sternbilder darauf, hat nun die Marmor-Statue im Farnesischen Palaste eine ganz überraschende Aehnlichkeit, so dass bei flüchtigem Anblicke beide mit einander verwechselt werden können. Die tragenden Atlanten sind ungemein kräftige und schöne Männergestalten, mit prächtig entwickelter Musculatur; nur erscheint der auf der Münze, im Gegensatze zu dem andern, im hohen Grade überanstrengt und ermattet. Die Sternbilder auf der Marmorkugel, von denen einige das Gesicht gegen den Beschauer kehren, während die meisten, bei seitlicher Drehung des Kopfes, ihm den Rücken zuwenden, — sind sehr deutlich, zum Theil ausserordentlich naturgetreu, in erhabener Arbeit ausgeführt. Die zur Orientirung beigefügten Kreise erscheinen gleichfalls erhaben, aber gar zu massiv gemeisselt. Da beide Bildwerke einander fast völlig gleichen, und sich das Alter des einen unzweideutig feststellen liess, so war es am Ende kein so grosses Kunststück, hieraus auf das des anderen zu schliessen.

Ist ihre perspectivische Ansicht richtig entworfen, dann würde ich mich nicht getrauen, Abmessungen, bis zu 1^0 genau, auf der Sculptur selbst vorzunehmen. Letztere scheint mir, wenn ich aus dem Bilde urtheilen darf, nur der Forderung gerecht zu werden, die jeder Himmelsglobus, bei mässigen Ansprüchen auf Naturwahrheit, erfüllen muss: die Sternbilder stehen ungefähr da, wohin sie gehören. Der Verfasser ist anderer Ansicht: die Schiefe der Ekliptik stimmt, die Präcession ist genau berücksichtigt, und den Wendekreisen hat der Künstler ganz scharf die ihnen zukommenden Plätze angewiesen; auch soll Cassini im Jahre 1695 einige Positionen darauf nachgemessen und dieselben in befriedigender Uebereinstimmung mit Ptolemaeus gefunden haben. Weiter heisst es, mit dem obersten und untersten (kleinen) Kreise habe der Künstler nichts Anderes bezweckt, als Grenzen für die stets sichtbaren und stets unsichtbaren Sterne dauernd festzusetzen. Da nun der nördliche Circumpolarkreis 40^0 vom Pole des Aequators abstehe, so sei damit die Polhöhe des Ortes gegeben, an welchem der Globus verfertigt worden ist: *et ad cuius* (nämlich des Poles) *elevationem disposita videtur haec Sphaera; adeo ut videatur antiquum Sculptorem in ora Tarentina versatum esse, atque ad illius longitudinem* (kann Druckfehler sein!) *hunc Globum adcommodasse: est enim fere graduum XL vel XLI.* — Diese Zahlenangabe lässt auf's Deutlichste die herrschende Unsicherheit erkennen. Der in Rede stehende Kreis geht nämlich mitten durch die rechte Schulter des Cepheus, wo sich der Stern α (gegenwärtig etwa $27^0\,52'$ vom Pole entfernt) befindet, der im Jahre 127 nach Chr. $34^0\,44'$ Poldistanz hatte; 40^0 würden die Statue in's graueste Alterthum versetzen. Für α Cephei gilt noch: $\lambda = 347^0\,9'$, $\beta = +\,68^0\,51'$ (im Jahre 127).

Der Verfasser spricht auch von der Breite des Zodiacus auf dem Globus und theilt mit, dass sie 12° betrage, mithin über 6° fehlerhaft sei; denn auf Grund neuerer Beobachtungen müsse man für diesen Gürtel über 18° annehmen, *quod praecipue cognoscitur a maximo Veneris recessu, quem Antiqui minime adsecuti sunt.* Es ist wahr, von der Erde aus gesehen, kann die Venus bis fast 9° von der Ekliptik entfernt erscheinen; allein aus im Allgemeinen willkürlichen und durch wenige numerische Bestimmungen unterstützten Hypothesen über die geometrische Natur der Bewegungen (vergl. das nicht ganz leichte 13. Capitel des Almagest) war immerhin schon eine ganz beachtenswerthe Theorie der wirklichen Bahnen zu Stande gebracht.

Was mir an dem Bilde des Farnesischen Globus und von den wichtigsten Angaben über letzteren untersuchenswerth erschien, habe ich untersucht und im Vorstehenden der Oeffentlichkeit übergeben; ob man danach die Sculptur selbst noch auf dem hervorragenden Platze in der Geschichte der Astronomie belassen will, den ihr Ruf derselben einräumt, bedarf zuvor der definitiven Entscheidung durch einen Astronomen an Ort und Stelle, das heisst jetzt wohl zu Neapel im Nationalmuseum.

Passeri hat sich von der Wärme, mit der er für das Kunstwerk eintrat, zu weit hinreissen lassen in dem Bestreben, dem Globus den Werth eines wissenschaftlichen Denkmales zu sichern, der ihm durchaus gebühren sollte; gleichwohl verfährt er doch nicht so summarisch, wie Halma, der auf dem Titelblatte des zweiten Bandes seiner Almagest-Ausgabe, ohne viel' Scrupel, den Himmelsglobus des Hipparch abbilden liess, leider ohne eine Notiz über das Material, woraus er gemacht war, die zweifellos interessant gewesen wäre.

II.

Ben an-Nabdî (بن النبدى) versichert*, dass er im Jahre 435 d. H. (1043) in der öffentlichen Bibliothek zu Kairo zwei Globen gesehen habe, einen kupfernen (وكرة نحاسا), von Ptolemaeus und 1250 Jahre alt, sowie einen aus Silber, von Abû'l Hasan aṣ-Ṣûfì für den König 'Aḍad ad-daula (wörtlich „Arm des Chalifates“) verfertigt, der 3000 Drachmen (Silberstücke) wog (وكرة اخرى من فضّة من عمل ابى الحسن الصوفى للملك اعضد الد ولة وزنها ثلا ث الف درهم) und eben so viele Goldstücke werth war, oder dessen Kaufpreis diese Summe betragen hatte.

---

* Bibliotheca Arabico-Hispana Escurialensis sive Librorum omnium Mss. quos Arabicè ab auctoribus magnam partem Arabo-Hispanis compositos Bibliotheca Coenobii Escurialensis complectitur, Recensio et Explanatio Operâ et studio Michaelis Casiri. Tomus prior. Matriti, anno M.DCC.LX. Folio. Enthält u. A. die Mathematiker, Mediciner, Naturforscher.

Wenn auch in beiden Fällen nicht ausdrücklich gesagt, können hierunter wohl nur Himmelsgloben zu verstehen sein; denn einmal hätten solche der Erde des Berichterstatters Aufmerksamkeit doch zu sehr gefesselt, als dass er unterlassen haben sollte, diess besonders zu betonen, sodann waren alle zwei aus den Händen von Astronomen hervorgegangen.

Der Letztere, عبد الرحمن بن عمر الصوفى الرازى ‘Abdurraḥman ben ‘Omar aṣ-Ṣûfî ar-Râzî (geb. 903 zu Raï in Persien, gest. 986), durch Schjellerup* uns näher bekannt geworden, stand bei ‘Aḍad ad-daula, der im Jahre 949 zur Herrschaft über Persien etc. gelangte, gleich hoch in Gunst und Ansehen; in der Vorrede zu seinem Fixstern-Verzeichnisse spricht er wiederholt, aber in aller Kürze, von Himmelskugeln und nur Ein Mal gedenkt er, mit ein Paar Worten mehr, der Sternbilder auf dem „grossen“ Globus des على بن عيسى الحرانى ‘Alî ben ‘Isa al-Ḥarrânî, jedoch leider! ohne näher auf diesen einzugehen.

Was den angeblich Ptolemäischen Globus aus dem Ende des zweiten Jahrhunderts vor Chr. betrifft, so halte ich für das Wahrscheinlichste, Ben an-Nabdî habe sein Alter nur nach dem Hörensagen bestimmt, nicht etwa, dass eine so lautende Inscription dazu aufgefordert hätte; über des Ptolemaeus Lebenszeit wird der alte Araber nicht genau informirt gewesen sein.

Der Leser, der mir bis hierher, das heisst bis zum Ende meines Aufsatzes, gefolgt ist, wird, wie ich vermuthe, verwundert fragen, wo der, in der Ueberschrift gleichfalls versprochene Abschnitt aus der Geschichte der Erdgloben bleibt? Als Antwort darauf das Geständniss, das in diesem Falle für mich kein fatales ist: ich weiss Nichts davon! Damit, dass ich zwar beide Arten nannte, von der ersten aber schweigen musste, habe ich — jedenfalls in einer Form, wie sie nicht kürzer gedacht werden kann — die eine und die andere behandelt.

Assemani beginnt seine Beschreibung des Borgianischen Himmelsglobus mit den Worten: *Qui primus caelestes hasce machinas molitus fuerit inter Arabes, latet. Credi tamen potest, tot inter excellentes Astronomos, qui ex pluribus nationibus apud Chalifam Almamonem confluxerant, extitisse quempiam, qui in aliquo artefacto Globo caelestium siderum formas, ordinemque expresserit.* Ich zweifele auch nicht hieran und bedauere deshalb um so mehr, dass sich in unseren Sammlungen Nichts dergleichen aus jener Zeit findet.

---

* H. C. F. C. Schjellerup, Description des étoiles fixes, composée au milieu du dixième siècle de notre ère par l'astronome persan Abd-al-Rahman al-Sûfi etc. St.-Pétersbourg, 1874. Imp. 4⁰. Mit sieben Figurentafeln.

Um mich gegen jeden Tadel zu sichern, bemerke ich, dass der Borgianische Globus zwar unförmliche Sterne im Adler enthält, zu ihrer Bezeichnung aber ein schwer entzifferbares Wort angiebt, das Ideler الظليمين liest; eine Beziehung auf den Antinous ist damit durchaus nicht angedeutet.

Ueber das Vorkommen dieses Sternbildes und des πλόκαμος Βερενίκης bei den Arabern (ضَفِيرَة ḍafîra, Haarflechte) vergleiche man die Seiten 44, 75, 76 bei B. Dorn, Drei in der Kaiserl. öffentlichen Bibliothek zu St. Petersburg befindliche astronomische Instrumente mit arabischen Inschriften. Mit 2 lithographirten Tafeln. St. Petersburg, 1865. Imp. 4⁰.

Recensionen.

Die Decade und die Ziffernschrift von Hermann Pauly. Nachdruck verboten und alle Rechte vorbehalten. Im Selbstverlag des Verfassers Hermann Pauly-Danzig, Ketterhagergasse 14. Druck von A. W. Kafemann. 1892.

Eine Seite Vorwort und fünf Seiten Text! Philosophisch sein wollende Redensarten im Selbstverlage. Sollte das heissen: keine Zeitschrift habe den Aufsatz drucken wollen? Referent würde es von einer mathematischen Zeitschrift nur begreiflich finden, denn einem Mathematiker dürfte es unmöglich sein einzusehen, dass die Zahl 10 so sehr allen anderen Grundzahlen von Systemen an Vorzügen voraus sei, dass deshalb die Schöpfung sie zur Anzahl der menschlichen Finger gemacht habe. Cantor.

Notizen über die Zahlwörter im Abacus des Boethius von Fr. Th. Köpper. Abdruck aus den Mélanges gréco-romains T. VI, livraison 1. St. Petersburg 1892 (Imprimerie de l'Académie des sciences). 18 S.

Referent hat in seinen Vorlesungen Gesch. Mathem. (I, 765) die bekannten Verse aus dem Manuscripte von Chartres zum Abdrucke gebracht, in welchen die Wörter *igin*, *andras* u. s. w. vorkommen. Chasles hatte dieselben Aperçu hist. pag. 473 (deutsch 540) veröffentlicht, und in unserem Abdrucke ist leider der Druckfehler *termenias* statt *temenias* stehen geblieben, der in die deutsche Ausgabe von Chasles sich einschlich. Der Güte von Herrn L. Gegenbauer verdanken wir die Mittheilung, dass die gleichen Verse mit einigen unwesentlichen Abänderungen in dem mit der Signatur Vat. Univ. 5327 versehenen Pergamentscodex der Vaticanischen Bibliothek enthalten sind. Dort kommt nicht nur das im ersten Verse des Codex von Chartres fehlende *sibi* vor, sondern auch als Schlussvers der auf *celentis* bezügliche Vers:

Terque notat trinum celentis nomine rithmum,

das heisst:

Dreimal schreibet die drei das Zeichen celentis mit Namen.

An diese Verse schliesst sich der von Treutlein herausgegebene Abacus des Gerlandus (Nonnullis arbitrantibus etc.). Herr Köpper hat sich die schon oft vorgelegte Frage nach dem Ursprunge jener räthselhaften

Wörter neuerdings gestellt und ist in mancher Beziehung zu neuen Ansichten darüber gelangt. Er verwirft dabei vollständig diejenigen Versuche, welche eine griechische Ableitung für möglich halten und stellt dem Leser folgende Auswahl zur Verfügung, welche darin mit den meisten anderen Forschern, auch mit dem Referenten, übereinstimmt, dass sie nicht einheitlich ist:

1 = igin, entweder berberisch *iggen* oder magyarisch *igy*;
2 = andras, germanisch der *Andere*;
3 = ormis, magyarisch *három*, vielleicht früher *horm*;
4 = arbas, hebräisch *arba'* oder arabisch *arbaũ*;
5 = quimas, lateinisch *quimus* (erhalten in *quimatus*, das Alter von fünf Jahren);
6 = calcis, vorläufig unerklärt;
7 = zenis, vorläufig unerklärt, vielleicht an das russische *sem'* zu denken;
8 = temenias, aramaeisch *temānya*;
9 = celentis, magyarisch *kilencz*.

Die Magyaren seien um das Jahr 1000 zum Christenthum übergetreten, und seit dieser Zeit „kamen Missionäre und deutsche Kaufleute in's Land; und diese letzteren, sowie Gesandte aus verschiedenen europäischen Ländern, haben ohne Zweifel magyarische Wörter nach Westen gelangen lassen“. So die Vermuthungen von Herrn Köpper. Referent muss auch jetzt bei seiner alten Meinung stehen bleiben: Non liquet!

Cantor.

Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert, eine Studie von Professor Dr. H. Weissenborn. Berlin 1892. Mayer & Müller. III, 123 S.

In Gerbert's Briefen ist an zwei verschiedenen Stellen von einem Büchlein über die Multiplication und die Division die Rede, welches „Joseph sapiens“, wie er das eine Mal, „Joseph Hispanus“, wie er das andere Mal heisst, zum Verfasser hatte. Es wäre nicht unwichtig, diesen Joseph genauer zu kennen, es wäre noch wünschenswerther, die Schrift selbst wieder aufzufinden. Bisher war keines von beiden gelungen. Da fand Herr Weissenborn erst bei Jöcher, dann bei Zedler eine Spur, welche er von Citat zu Citat weiter rückwärts verfolgte, bis er schliesslich sich überzeugte, dass sie irrig war, und nun wissen wir von jenem Joseph nicht ein Wort mehr, als früher und sind wieder ausschliesslich auf Vermuthungen angewiesen. Das ist der Hauptinhalt der zu zwei Dritteln aus Text, zu einem Drittel aus Anmerkungen bestehenden Studie des Herrn Weissenborn. Die häufig eingestreuten polemischen Bemerkungen gegen den Referenten sind wesentlich höflicher als in dem „Gerbert“ von 1888, über welchen wir Bd. XXXIII, Hist.-liter. Abthlg. S. 101—107, berichtet

haben. Wir quittiren dankend für diese Veränderung. An einer Stelle (S. 22) hat Herr Weissenborn vollkommen Recht in seiner Bemängelung. Sie richtet sich gegen unsere frühere Annahme eines „Architas Latinus", an welcher wir noch in unseren Vorlesungen Gesch. Mathem. (I, 500) festhalten zu dürfen glaubten. Inzwischen sind wir durch eine Bemerkung des Herrn George J. Allman, Hermathena V, 194 (Dublin 1884) belehrt und bekehrt worden. Dort ist nämlich hervorgehoben, dass der Ausdruck „non sordidus auctor", welcher mit Bezug auf jenen Architas gebraucht wird, Horaz angehört und in dessen Ode auf Archytas von Tarent (Lib. I, Ode 28) vorkommt. Bei dieser Uebereinstimmung musste jeder Zweifel daran schwinden, dass Architas und Archytas von Tarent eine und dieselbe Persönlichkeiten sei. Herrn Weissenborn scheint diese Entdeckung Allman's unbekannt geblieben zu sein, wenigstens führt er sie nicht an, und deshalb ergänzen wir hier seine Darstellung. Der Ergänzung wäre sie auch nach der Richtung bedürftig, dass die Arbeiten des Herrn Nagl in keiner Weise berücksichtigt sind, welche man nicht mehr das Recht hat, zu vernachlässigen, mag man ihnen beipflichten oder nicht. Ausser dem von uns angedeuteten negativen Hauptergebnisse der Weissenborn'schen Studie ist eine werthvolle Bemerkung darin enthalten. Es ist nämlich (S. 7) unseres Wissens zum ersten Male darauf aufmerksam gemacht, dass Casiri unter den Schriften des Ostarabers Alkindî aus dem IX. S. auch eine solche nennt, welche den Titel führe „De Numeris per lineas et grana hordeacea multiplicandis." Vorausgesetzt, dass die Uebersetzung richtig wäre, könnte hier allerdings ein Abacusrechnen mit Strichen und Gerstenkörnern als Rechenmarken gemeint sein, wovon bisher bei Arabern jener verhältnissmässig frühen Zeit noch keine Spur gefunden war. Da derselbe Alkindî von Casiri als Verfasser eines Buches „De Arithmetica Indica" und eines solchen „De Numeris harmonicis a Platone in Timaeo memoratis" genannt wird, ihm also indische und griechische Quellen zu Gebote gestanden haben müssen, so würde die weitere Frage auftreten, ob das Abacusrechnen ihm von Osten oder von Westen her bekannt geworden war? Unser Zweifel, ob die erwähnte Ueberschriftsübersetzung auch richtig sei, fusst darauf, dass Herr Suter in seiner Uebersetzung des Mathematiker-Verzeichnisses im Fibrist (Supplementheft dieses Bandes, S. 11, Z. 11) die Uebersetzung „Ueber die Linien und das Multipliciren mit der Zahl der Gerstenkörner (?)" giebt, eine Uebersetzung, welche an Dunkelheit dem Urtexte wohl recht nahe kommt und das von Herrn Suter beigefügte Fragezeichen reichlich verdient. Auch Casiri's „De numeris harmonicis a Platone in Timaeo memoratis" dürfte falsch sein, denn nach Herrn Suter (l. c. S. 11, Z. 6—7) heisst es im Fibrist „Ueber die Erklärung der Zahlen, die Platon in seinem Buche vom Staate erwähnt", und dort kommen thatsächlich die räthselhaften Zahlen vor. Ueberhaupt ist Casiri nur mit grösster Vorsicht zu benutzen, und auf eine ganz

vereinzelt nur bei ihm vorkommende Uebersetzung Schlussfolgerungen zu gründen, ist höchst gewagt, wie Herr Weissenborn sich von jedem Orientalisten bestätigen lassen mag.

CANTOR.

Ueber den Antheil der mathematischen Wissenschaft an der Cultur der Renaissance. Vortrag, gehalten im Rathhaus zu Zürich am 5. Februar 1891 von Dr. F. RUDIO, Professor in Zürich. [Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge. Neue Folge. VI. Serie, Heft 142.] Hamburg 1892. Verlagsanstalt und Druckerei A. G. (vormals J. F. Richter). 33 S.

Die historisch-literarische Abtheilung des XXXVI. Bandes dieser Zeitschrift hat Herrn Rudio unseren Lesern als Historiker schon bekannt gemacht. Seite 139 ist eine Notiz aus seiner Feder über die bekannte Vieta-sche Factorenfolge für $\frac{2}{\pi}$ abgedruckt, und Seite 30 berichteten wir über eine in Zürich erschienene Abhandlung des gleichen Verfassers über das Problem von der Quadratur des Zirkels. Zeigte sich dort Herr Rudio als vollständig zu Hause in einem eng umschriebenen Bereiche der geschichtlich-mathematischen Forschung, so liefert er in dem heute uns vorliegenden Vortrage den Beweis, dass er reiche Kenntnisse in dem ganzen Gebiete der Geschichte der Mathematik besitzt, und zeigt auf's Neue die Gabe anziehender Darstellung, welche man jedesmal an ihm zu schätzen gewohnt ist, wann und wo man ihm als Schriftsteller begegnet. Neue Entdeckungen sind natürlich in dem kurzen Ueberblick, welchen Herr Rudio vor einem aus Damen und Herren gemischten Zuhörerkreise über die ganze Entwicklungsgeschichte der Mathematik bis etwa zum Jahre 1500 warf, nicht mitgetheilt, aber dafür ist es dem Redner sicherlich gelungen, eben jenem Zuhörerkreise den Wahn zu vertreiben, als sei die „trockene" Mathematik zu allen Zeiten nichts Anderes gewesen, als ein Mittel, die armen Schüler zu plagen!

CANTOR.

Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische von GALILEO GALILEI. Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von EMIL STRAUSS, ordentlicher Lehrer an der Realschule „Philantropin" in Frankfurt a. M. Leipzig 1892, bei B. G. Teubner. LXXIX, 585 S.

Ist die Herausgabe einer deutschen Uebersetzung von Galilei's berühmtem Dialoge gerechtfertigt? Ist die von Herrn Strauss ausgeführte Uebersetzung gut? Das sind die beiden Fragen, welche allein der Beantwortung bedürfen, da zwei und ein halb Jahrhunderte bereits die Vorfrage nach dem Werthe der übersetzten Schrift beantwortetet haben. In erster

Linie dürfen wir behaupten, die Herausgabe einer Uebersetzung scheine uns vollberechtigt. Aufwachsend im hergebrachten Glauben an die kopernikanische Weltenordnung ist sich, meinen wir, unsere Jugend nicht genügend der Gründe bewusst, welche diese Annahme vor anderen auszeichnen, und wo könnte sie dieselben besser kennen lernen, als in dem Werke, welches, wie kein anderes, zum Siege der neuen Lehre beigetragen hat? Und wie soll dieser Wissensdurst Befriedigung finden? Die alten Originaldrucke sind Seltenheit des buchhändlerischen Verkehrs geworden, die neuen Gesammtausgaben von Galilei's Werken sind zu umfangreich und von zu kostspieliger Anschaffung, als dass sie auf grosse Verbreitung rechnen können; eine neue Einzelausgabe des Dialoges kann allein dieses Bedürfniss befriedigen, kann allein gestatten, dass an recht vielen Mittelschulen unter den alljährlich zu vertheilenden Preisbüchern auch Galilei's Dialog regelmässig erscheine. Kann doch der Jüngling ausser jener Begründung der kopernikanischen Lehre noch vieles Andere bei Galilei lernen, z. B. wie man scharfe Logik mit feiner Ironie paare, wie man gelehrt sei, ohne dem Fluche der Langweiligkeit zu verfallen. Giebt es doch kein besseres Buch zur Einführung in die zahlreichen Fragen, welche das XVII. Jahrhundert den Naturwissenschaften stellte, und welche nur sehr allmählich Beantwortung fanden. Wir haben den Nutzen, welche jugendliche Leser aus dem galileischen Dialoge ziehen können, vorausgestellt, weil diese Gattung von Lesern nur der Uebersetzung sich bedienen wird, während dem reiferen Kreise auch ein italienischer Einzeldruck genügen könnte, ohne dass damit gesagt sein soll, dass nicht auch der Mittelschullehrer, gleich seinem Schüler, ein deutsches Exemplar vorziehen wird. Er wird dann, von Schwierigkeiten der Sprache ungehemmt, um so mehr dem Genusse galileischer Darstellung sich hingeben können. Freilich setzt dieser Genuss voraus, dass auch die zweite von uns am Anfange betonte Frage Bejahung finde, dass Herr Strauss eine gute Uebersetzung lieferte. Wir reden von der Arbeit eines allzufrüh aus dem Leben Geschiedenen. Emil Strauss ist am 3. Mai 1859 in Frankfurt am Main geboren, am 6. Februar 1892 ebenda gestorben. Eine Lungenentzündung raffte den jugendlich kräftigen Mann in wenigen Tagen dahin. Er war Lehrer an der „Philantropie" genannten Realschule seiner Vaterstadt, derselben Schule, in welcher einst durch seinen Lehrer, Herrn G. Wertheim, unseren geschätzten Mitarbeiter, die Lust an mathematischen Studien in ihm geweckt wurde, welchen er vier Jahre (1878—1882) an der Berliner Hochschule unter Männern widmen durfte, von denen nur einer noch als Docent thätig ist: Helmholtz. Ueber dessen wichtigste Entdeckungen und Arbeiten hat Strauss seine physikalische Prüfungsarbeit gemacht, welche in dem Prüfungszeugnisse vom November 1882 als eine vorzügliche Leistung bezeichnet wurde. Nur eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionen-theoretischer Anwendung hat Strauss in den Acta Mathematica (1887) veröffentlicht.

Die Uebersetzung des Galilei'schen Dialogs ist demnach sein wissenschaftliches Lebenswerk gewesen, und wenn sie uns bedauern lässt, dass der begabte Schriftsteller so jung aus der Schaffensfreude herausgerissen wurde, so wird sie seinen Namen zu erhalten hinreichen. Die Sprache ist edel und vornehm, dem Sinne und dem Geiste des Originals sich anbequemend, ohne sclavisch an dasselbe angekettet zu sein. Zahlreiche Anmerkungen, ohne welche nur sehr wenige Leser den Dialog in allen Einzelheiten zu verstehen im Stande wären, zeugen von der seinen Jahren vorgeeilten Belesenheit ihres Verfassers. Eine biographische Einleitung giebt Galilei's Lebens- und Leidensgeschichte; auch hier erfreut neben der Beherrschung des überreichen Stoffes die schöne, warme, an manchen Stellen fast dichterische Sprache.

Cantor.

Gino Loria, Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce. Con 4 tavole litografate. 144 pag. Estratto dagli Atti della R. Università di Genova. Genova 1892.

Wir freuen uns jedes Mal, wenn wir in die Lage kommen, eine neue geschichtlich-mathematische Studie unseres jugendlichen Fachgenossen anzuzeigen, und sein Fleiss verschafft uns diese Freude häufig. Heute haben wir über Untersuchungen zu berichten, welche der geometrischen neapolitanischen Schule am Anfang des XIX. Jahrhunderts gewidmet sind. Wenn Chasles in seiner Geschichte der Geometrie (französische Ausgabe, pag. 46, deutsch Seite 43) das Lob von Fergola und seinen Schülern Bruno, Flauti, Scorza ausspricht und der Leser, den Worten des französischen Geometers vertrauend, nicht weiter im Stande zu sein pflegt, sie zu controliren, als höchstens so weit Flauti's *Geometria di sito* in Frage kommt, so ist es doppelt erwünscht, dass Herr Gino Loria sich die Mühe gab, die Grundlagen zu erforschen, auf welchen jenes Lob beruht, und die Ergebnisse seiner Forschung in der ihm eigenen angenehmen Darstellungsweise zu veröffentlichen.

Eine Schule war es in der That, welche Nicola Fergola (1753 bis 1822) gegründet hat, eine Schule von so engem Zusammenhang, wie sie kaum je wieder bestand, seit Pythagoras fast in derselben Gegend deren Musterbild schuf. Dieser sehr richtige Vergleich gehört Herrn Loria an, welcher ihn noch damit belegte, dass bei den Schriften der neapolitanischen Schule man stets in Zweifel sei, ob man von dem Verfasser oder den Verfassern reden solle, da die Arbeiten, wie die Entdeckungen, bis zu einem gewissen Grade Gemeingut waren, der Geist des Lehrers vollends überall sichtbar blieb. Man möchte zum Vergleiche wohl auch die Arbeiten beiziehen, welche in unseren Tagen aus dem chemischen Laboratorium berühmter Lehrer hervorgehen. Was in den Geistesretorten der Neapolitaner sich destillirte, war Geometrie nach Art der Alten.

Die gleiche Abneigung, welche gegen das rein analytische Verfahren, das bei Lagrange die extremste Vertretung gefunden hatte, in Frankreich, dann in Deutschland wach geworden ist und dort in Gergonne, in Brianchon, in Poncelet, in Chasles, hier in Möbius, in Steiner, in von Staudt Vertreter einer Reaktion geschaffen hat, die eine neue Geometrie der Alten hervorbrachte, diese selbe Abneigung regte sich schon vierzig und mehr Jahre früher in Fergola, zu früh wahrscheinlich, als dass sie ebenso positive Ergebnisse hätte zeitigen können, als bei den genannten Franzosen und Deutschen. Bei diesen waren die analytischen Methoden, und was man durch sie herausgerechnet hatte, wider Willen in Fleisch und Blut übergegangen. Rechnungsgedanken — wir erinnern nur an das Doppelschnittverhältniss — lagen fast unbewusst in den neuen rein geometrisch gemeinten Betrachtungen. Das war bei Fergola und seinen Schülern noch nicht der Fall. Sie haben darum nur eine wirklich dem griechischen Vorbilde ähnliche Geometrie zu Wege gebracht, während die Zeit nahte, dass eine projective Geometrie entstehen sollte. Was aber in der neapolitanischen Richtung mit enthalten war, das waren geschichtliche Betrachtungen über euklidische und voreuklidische Geometrie, und hier hätte man von den Schülern Fergola's lernen können, wenn ihre Schriften weitere Verbreitung gefunden hätten.

Wir unterlassen es, auf das Einzelne einzugehen. Wir verweisen vielmehr unsere Leser auf die Arbeit, welche die Ueberschrift unserer kurzen Anzeige bildet. Dort werden sie mannigfache und genussreiche Belehrung finden.

Cantor.

Das Ottajano'sche Problem. Eine mathematisch-historische Studie von Oberlehrer Dr. Johannes Max Brückner. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht über das Realgymnasium zu Zwickau, Ostern 1892. (1892. Progr.-Nr. 555.)

Chasles hat in seiner Geschichte der Geometrie (französische Ausgabe S. 328, deutsche Uebersetzung S. 341) die verschiedenen Entwicklungsstufen bemerkbar gemacht, welche die Aufgabe: in einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen durchlief, seit Pappus sie für den ganz besonderen Fall löste, dass die drei gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen. Aber Chasles begnügte sich, dem Charakter einer Anmerkung, wenn auch einer ausgedehnteren Anmerkung entsprechend, mit der Angabe der Schriftsteller und der Stellen, wo sie sich mit jener Aufgabe beschäftigt haben. Wollte man alle diese Einzelleistungen kennen lernen, so war man darauf angewiesen, in zahlreichen Bänden nachzuschlagen, die überdies nicht gerade aller Orten zur Verfügung standen. Herr Brückner hat sich dieser Sammelmühe ein für alle Mal unterzogen und sämmtliche Untersuchungen

— auch solche neueren Ursprungs, welche Chasles noch nicht anführen konnte — gruppenweise geordnet seinen Lesern vereinigt geboten. Es war eine sehr dankenswerthe Mühe, die er sich gab, und er hat dadurch die Programmliteratur um eine Nummer bereichert, welche sicherlich auch in weiteren Kreisen sich Freunde erwerben wird. Einem Irrthume ist er verfallen, zu welchem Chasles, der eben denselben beging, die Veranlassung bot. Einen jungen Neapolitaner Ottajano, welcher mit der betreffenden Aufgabe sich erfolgreich beschäftigte, hat es nicht gegeben. Der jugendliche Gelehrte, dessen Auflösung durch Lorgna bekannt geworden ist, hiess Annibale Giordano und war in Ottajano, einem grösseren hinter dem Vesuv gelegenen Orte, geboren. Das geht zweifellos aus dem Bändchen: *Opuscoli matematici della Scuola del sig. N. Fergola parte già pubblicati e parte inediti.* Vol. I. Napoli 1810 hervor, in welchem A. Giordano als Verfasser des ersten Aufsatzes *Risoluzioni di alcuni difficilissimi geometrici problemi* genannt ist, und dieser Aufsatz enthält eben die erwähnte Auflösung.

Cantor.

Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte. Nach neueren Methoden dargestellt von Adolf Hanner, ordentlicher Professor der höheren Mathematik an der K. und K. technischen Militär-Akademie in Wien. Mit 127 in den Text gedruckten Figuren. Prag 1891. Verlag von H. Dominicus. Th. Gruss. 8⁰. VIII, 480 S.

An die Ausarbeitung des vorliegenden neuen Lehrbuches der analytischen Geometrie der Ebene ging der Verfasser zunächst in der Absicht, seinen eigenen Schülern ein Handbuch zu liefern, das zur Grundlage und Vervollständigung seiner Vorlesungen an der Wiener Militär-Academie dienen sollte. In der Form, die es schliesslich gewonnen hat, rechnet es aber auf einen viel weiteren Kreis, auf die Studirenden der Mathematik überhaupt. Die langjährige Lehrthätigkeit des Verfassers lässt von vornherein die Vermuthung entstehen, dass wir es mit einem besonnenen und brauchbaren Werke zu thun haben, und wir sehen uns hierin nicht getäuscht.

Nachdem die Cartesischen Coordinaten erläutert sind, werden die Gleichungen der Geraden und des Punktes besprochen, wobei sofort das Princip der Dualität hervortritt. Es folgen die Grundgebilde erster Stufe und das Doppelverhältniss. Sehr gut hat dem Referenten gefallen, dass vor der Behandlung des letzten Begriffes die einfachen Theilverhältnisse in § 15—17 einer ausführlicheren Behandlung und eigenen Bezeichnung gewürdigt werden, was auf das Verständniss der Doppelverhältnisse nur günstig wirken kann. Weiter werden die vollständigen Figuren gebracht und zum Schlusse des ersten Abschnittes die homogenen Coordinaten und deren Transformation gelehrt.

Der zweite Abschnitt, „Projectivische Geometrie“ betitelt, giebt die Lehre von der Projectivität und Involution der Grundgebilde erster Stufe, daran anknüpfend ein Capitel mit der Ueberschrift „Invarianten und Covarianten binärer Formen“ und schliesslich Collineation und Reciprocität ebener Systeme, mit Einschluss der Polarsysteme.

Der dritte Abschnitt ist der Theorie der Kegelschnitte gewidmet. Nach den gewöhnlich zuerst abgehandelten allgemeineren Eigenschaften beschäftigt er sich, unter dem nicht besonders empfehlenswerthen Titel „Polarisation“ mit Polen und Polaren, dann mit Mittelpunkten, Asymptoten und Durchmessern, mit der projectivischen Erzeugung der Kegelschnitte, und schliesslich, unter Zuhilfenahme invarianten-theoretischer Betrachtungen, mit Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittreihen.

Die in den Text gedruckten Figuren entsprechen ihrem Zwecke; die Ausstattung ist lobenswerth. Literaturangaben* und Aufgabensammlungen enthält das Buch nicht. Ein doppeltes Bestreben des Verfassers ist es, welches dem Buche seine Physiognomie verleiht.

Inhaltlich wünschte er, ohne irgendwo Neues bieten zu wollen, seinem Werke ein Gepräge zu verleihen, das man in Bausch und Bogen als modern bezeichnen kann. Das Wesen der Dualität, der homogenen Coordinaten, der Projectivität, der Invariantenbegriffe, tritt unter ausführlichen Anwendungen deutlich hervor, Determinantentheorie wird vorausgesetzt. Das erstgenannte Princip wird man in wenig Lehrbüchern mit solcher Liebe und Consequenz dargestellt finden, was sich schon äusserlich an der, so weit irgend thunlich, festgehaltenen Zweitheilung der Seiten ausspricht. Wollte man nur mit Rücksicht auf diese Zweitheilung urtheilen, so möchte man dem Buche ein grösseres Format wünschen, siehe z. B. Seite 268; bei der gegenwärtigen Schmalheit werden sogar ein Mal die Zeilen einer Determinante gebrochen, Seite 270. Wenn man auch sagen kann, sobald das Princip erkannt ist, sei die Uebersetzung eines einseitig gegebenen Satzes in den reciproken sehr leicht, so hat die ausführliche Darstellung doch sicher ihre Vortheile. Sie kommt der Geometrie der Liniencoordinaten zu Gute, welche, was man auch sagen mag, den meisten von uns doch weniger vertraut zu bleiben pflegt, wie die der Punktcoordinaten.

Die homogenen Coordinaten bleiben von ihrer Einführung an das bevorzugte Mittel der Darstellung, und es wird zu den speciellen cartesischen Coordinaten nur in den Fällen metrischer Aufgaben, wo sie Vortheile bieten, zurückgegriffen. Das letzte invarianten-theoretische Capitel, hauptsächlich Gordan's Lehrbuche entnommen, giebt die Begriffe der Invariante, Covariante und Contravariante und bedient sich für dieselben und für die binären Formen der kurzen symbolischen Bezeichnungsweisen.

---

* Mit ganz geringen Ausnahmen.

Hinsichtlich der Form hat der Verfasser vor Allem auf leichtfassliche Darstellung gesehen. Eine Hauptsache, um ein mathematisches Buch angenehm lesbar zu machen, ist die gleichmässige, entweder stärkere oder schwächere Ausführlichkeit der Beweise, welche den Leser schon nach kurzer Lectüre das Maass geistiger Anstrengung sicher erkennen lässt, welches er durchweg beim Verständniss anwenden muss. Es giebt viele sonst gute Bücher, welche darauf nicht Rücksicht nehmen, vielmehr an der einen Stelle ausführlich verfahren, an einer anderen, von gleich grosser Schwierigkeit, mit einem „Man sieht leicht", oder auch ohne jede Andeutung den ganzen Beweis hinunterschlucken. Der Leser plagt sich dann oft vergeblich mit naheliegenden, selbstverständlichen Gedanken, den Beweis zu führen, der ihm leichter werden würde, wenn er wüsste, dass er schwer ist.

Hanner's Buch befleissigt sich einer solchen Gleichmässigkeit in der Ausführung, und verdankt derselben wesentliche Vorzüge. Es ist ein leicht und angenehm zu lesendes Buch, bei dem auch das Quantum des Gebotenen geschickt abgemessen ist.

Wir können hiernach Hanner's Streben nach moderner Gestaltung und leichtfasslicher Darstellung als von Erfolg begleitet bezeichnen, und glauben, dass sein Lehrbuch die Concurrenz mit den vielen anderen bereits bestehenden Lehrbüchern über denselben Gegenstand getrost aufnehmen kann.

Bei dem Interesse und der eingehenden Prüfung, die wir dem Buche zugewendet haben, ist es natürlich, dass wir auch Stellen entdeckten, welche uns weniger gelungen erschienen, und wir wollen auch mit unseren Ausstellungen nicht zurückhalten. Vielleicht, dass bei einer doch wohl zu erwartenden Neuauflage ein oder die andere unserer Bemerkungen von Seite des Autors Berücksichtigung findet.

Das erste Dutzend Paragraphen ist es nicht, welches uns am besten gefallen hat. Die Elemente sollten simpler und zugleich präciser dargestellt werden. Auch darf man hier mit erläuternden Worten nicht sparen und nichts als selbstverständlich voraussetzen, was nur dem gelernten Geometer ganz geläufig erscheint. Bei Hanner kommen uns z. B. diejenigen Bemerkungen, welche sich auf Uebersetzung des Vorzeichens von Zahlen in den Sinn geometrischer Gebilde beziehen, undeutlich, zerstreut und vielfach als zu selbstverständlich hingestellt vor.

In der That aber handelt es sich doch um einen der Cardinalpunkte, gegenüber denen alles Andere nur das Prädicat „Anwendung" oder „Nebensache" verdient. Auch sind gerade Vorzeichenfragen diejenigen, in denen man sich am leichtesten verwirrt und in denen selbst geübte Mathematiker Fehler machen. Statt also den Anfänger in seiner ohnehin stets vorhandenen Neigung, das Vorzeichen auf die leichte Achsel zu nehmen, zu bestärken, ist es gerathen, ihn eben hier zur äussersten Gewissenhaftigkeit anzuleiten. Wenn es z. B. auf Seite 3 ohne Weiteres heisst: „Es ist klar,

dass unter (xL) derjenige Winkel (gemeint ist offenbar der Winkel $< \pi$) zu verstehen ist, welchen die positive Richtung der Projectionsachse mit der positiven Richtung der Geraden (L) — Richtung von M_1 nach M_2 — bildet", so würden wir im Gegentheil es angezeigt finden, die hier in Frage kommenden Verhältnisse etwas ausführlicher zu erörtern, etwa eine zweite Figur beizufügen, wo die positive Richtung nicht mit der Richtung $M_1 M_2$ übereinstimmt, und des häufig vorkommenden Falles zu gedenken, dass die Linienlängen absolut, die Winkel von der x-Achse aus drehend, in einem bestimmten Sinne gemessen werden. Wird ja doch diese Art der Winkelbestimmung später Seite 14 und 16 wirklich eingeführt. Die Beschreibung des Drehungssinnes mit „von rechts nach links" ist gefährlich einfach. Mag Hanner damit auch das Richtige — den der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Sinn — meinen, ein Anderer wird das Gegentheil darunter verstehen. Diese und andere zweifelhaften, ursprünglich unlogischen Bezeichnungen, wie z. B. rechtsdrehend etc., sollte man stets durch unzweideutige, wie linksvornläufig, linksobendrehend etc., ersetzen.

Auf Seite 44, ebenso Seite 223, Zeile 4 von oben, ist immer von dem Winkel zweier Strahlen L_1, L_2 die Rede, sowie von inneren und äusseren Theilstrahlen desselben, ohne dass die Zweideutigkeit aus dem Wege geräumt würde — übrigens ein ganz hergebrachter, schon bei Chasles sich findender Fehler.

Nicht ohne eine kleine Schadenfreude hat der Referent bemerkt, dass Herrn Hanner selbst mit dem Vorzeichen ein Versehen passirt ist, indem die Vorzeichenbestimmung der Strecke $NO = d$, auf Seite 29, oben mit jener in Gleichung (24), Seite 15, in Widerspruch steht.

Bei den Polarcoordinaten, § 7, lässt Hanner negative Werthe des Radius vector zu, während man gewöhnlich vorzieht, den Radius vector ein für alle Mal positiv zu nehmen. Man wünscht ja doch ein ein-eindeutiges Entsprechen zwischen geometrischem Object und System der zugehörigen Coordinatenwerthe. Hanner giebt übrigens auch keine allgemeinere Definition von Coordinaten, sagt nicht ein Mal, dass darunter Bestimmungsstücke zu verstehen seien, sondern überlässt es dem Instinkte des Lesers, allmählich sich die richtige Idee zu bilden. Auch eine allgemeinere Darstellung des Fundamentalprincips, wie eine Curve durch eine Gleichung zwischen Coordinaten sich darstellen lässt, gehört doch unzweifelhaft an den Anfang des Buches. Statt dessen kommen wir auf Seite 13 gleich speciell zu der Geraden und finden natürlich auch später das allgemeine Princip nicht mehr herausgehoben.

Die Beweise sind zum Theil unabhängiger von den Figuren zu stellen; in § 3 z. B. könnte mit einem Worte gesagt werden, warum das erhaltene Resultat allgemein giltig ist. Man muss an die Neigung des Anfängers denken, sich stets auf gewisse specielle Figurengestaltungen zu beschränken, oder von ihnen aus falsch zu verallgemeinern.

Es kommt uns nicht gerade gut gesagt und gut erklärt vor, wenn es Seite 11 heisst: „Die Wahl ... hängt mit dem ... Principe der ... Reciprocität innig zusammen, nach welchem nämlich in den meisten Fällen zu jedem Satze ein reciproker Satz gefunden werden kann.“

Wenn das Werk auch im Allgemeinen keine Literaturangaben bringen will, so könnten doch wohl an den Stellen, wo Cartesius, Plücker, Hesse als Gründer genannt werden, auch die Titel ihrer Hauptwerke sammt Zeitangabe beigefügt sein.

Was die Determinanten anlangt, so wollen wir über deren Zulässigkeit im Ganzen nicht streiten. Es ist ein Zeichen des mathematischen Fortschritts der letzten Jahrzehnte, dass dieselben jetzt sogar in elementareren Lehrbüchern figuriren dürfen. Gewiss aber verdient das Verständniss der untersten Grundlagen einer selbst so fundamentalen Disciplin, wie die analytische Geometrie ist, von dem der Determinanten unabhängig gehalten zu werden, und es empfiehlt sich, die allereinfachsten Aufgaben über Bestimmung und Schnitt von Geraden ausser in Determinanten, auch in ausgeschriebener Form zu bringen. Jedenfalls aber sind Determinanten, die zu zwecklosem Aufputz dienen, wie eine auf Seite 7, überflüssig.

Auf Seite 28, § 11, ist es wohl weniger wichtig zu betonen, dass es überhaupt unendlich viele imaginäre Punkte einer Geraden giebt, als vielmehr, dass die Mannigfaltigkeit dieser Punkte eine zweifach unendliche Ausdehnung hat. Es wird ja in Folge dessen, sobald man reelle und imaginäre Punkte als gleichberechtigt ansieht, etwas ganz Wesentliches an dem Begriffe der Curve, wie man ihn durch die Anschauung erworben hat, zerstört, man bekommt es mit einem Dinge ganz anderer Dimension zu thun. Diese wichtige Bemerkung fehlt übrigens auch in anderen Lehrbüchern. § 20, Seite 67, ist statt von „benachbarten“ Punkten M_i oder Strahlen α_i besser von drei mit aufeinander folgenden Indiceswerthen versehenen zu sprechen. § 23, Seite 92, enthalten die Ausdrücke, dass aus den Gleichungen dreier Ecken eines vollständigen Vierseits die der drei anderen „hergeleitet werden können“ resp. „bestimmt sind“, doch mehr als sie sollen. Im Vorbeigehen sei erwähnt, dass es vielleicht nicht unpraktisch wäre, statt der Bezeichnungen u, v für die Geradencoordinaten die Bezeichnungen X, Y einzuführen. Daraufhin würden z. B. die Transformations-Gleichungen Seite 104 und 105 sich nur noch durch die Grössenart der Buchstaben unterscheiden.

Dass Seite 129 die Gleichung $s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = 0$ in Folge der für die endlichen Geraden geltenden Bedingung

$$s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = S$$

keine im Endlichen liegende Gerade sein kann, ist ohne die Zuhilfenahme einer Hilfsgeraden L ersichtlich. Dass zwei Grundgebilde erster Stufe projectivisch sind, wenn jedem Elemente M der einen Reihe ein und nur

ein Element der anderen entspricht, ist, in dieser Allgemeinheit hingestellt, ein Unsinn, den man sehr oft ausgesprochen findet.* Seite 146—147 wird vom Doppelverhältniss auf das einfache Theilverhältniss zurückgeschlossen; natürlicher wäre der umgekehrte Weg.

In § 37, Seite 162, Zeile 12 von unten, ist es doch wohl zu kühn, von einer viel einfacheren und besseren Methode zu sprechen.

Im Umkehren von Schlussfolgerungen ist Hanner oft etwas zu rasch bei der Hand. In § 36, Seite 159, handelt es sich darum, dass die drei Coefficienten K_1, K_2, K_3 einer quadratischen Gleichung von der Form

$$K_1 = a(A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2) + b(A_2 a_2 + B_2 b_2 + C_2);$$
$$K_2 = c(A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2) - a(A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1)$$
$$- b(A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1) + d(A_2 a_2 + B_2 b_2 + C_2);$$
$$K_3 = c(A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1) + d(A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1);$$

sämmtlich zu Null werden. Letzteres sei aber, sagt Hanner, nur dann möglich, wenn

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + C = 0; \quad A_2 a_2 + B_2 b_2 + C_2 = 0;$$
$$b(A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1) = c(A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2);$$
$$a = d = 0$$

ist. Allerdings verschwinden unter diesen Bedingungen die K, sie thun es aber auch noch auf unendlich viele verschiedene andere Arten, von denen eine Art und Weise, z. B. durch die Gleichungen

$$A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2 = 0; \quad A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1 = 0;$$
$$a(A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1) - d(A_2 a_2 + B_2 b_2 + C) = 0;$$
$$b = 0; \quad c = 0,$$

sofort angegeben werden kann. Geometrisch entspricht an der angezogenen Stelle die Thatsache, das es zur Perspectivität eines Strahlbüschels und einer Punktreihe doch durchaus nicht nöthig ist, dass die beiden zur Darstellung der Büschel- und Punktreihengleichung gewählten Elementenpaare gerade entsprechende sind. Auch auf Seite 226 scheint die Umkehr des Schlusses: Wenn zwei zusammengehörige Punkte einer Involution in die Rechnung eingehen, verschwindet eine gewisse Determinante — obwohl sie ja richtig ist, zu leichthin vorgebracht. Ebenso kann auf Seite 315 und 316 aus der Thatsache, dass für die Gleichungsform

$$U \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x^2 + a_3 x_3^2 = 0$$

das Coordinatendreieck in Bezug auf U sich selbst conjugirt ist, nicht sofort das Umgekehrte geschlossen werden, dass jeder Kegelschnitt, auf ein sich selbst conjugirtes als Coordinatendreieck bezogen, diese Gleichungsform annimmt.

---

* In besserer Einsicht wird auch beim Beweise des Satzes Seite 148—149 auf die Anwendung dieser Definition verzichtet.

Die Betrachtungen über die Doppelpunkte in projectivischen zusammenliegenden Punktreihen, Seite 174—178, welche durchaus unseren Beifall haben, möchten wir nur nicht gerade als „analytische“ (Seite 178, Zeile 5 von unten), sondern vielmehr als kinematisch-geometrische bezeichnen.

In § 41 würde es sich vielleicht empfehlen, die Gleichung (264) gleich in die Definition involutorischer Gebilde mit hinein zu ziehen, weil sonst die Möglichkeit der Existenz solcher Gebilde nicht sofort klar ist. Inconsequent erscheint, dass in Capitel VIII die Begriffe der Invariante und Covariante als bekannt vorausgesetzt, in Capitel XIV dagegen, Seite 422 und 424, erklärt werden, ohne dass im erstgenannten Capitel auf das Spätere verwiesen wäre.

Seite 241, beim Beweise des Satzes, dass die Collineation ebener Systeme durch vier Paare entsprechender Punkte bestimmt ist, dürfte die gleichmässige Ausführlichkeit (siehe oben S. 219) wohl eine Andeutung darüber fordern, dass man die Systeme (316) resp. (318) durch Elimination von ϱ resp. μ erst auf je zwei Gleichungen zu reduciren hat, wenn man durch Einsetzung der Coordinaten, statt 12 Gleichungen mit 13 Unbekannten sofort die dort erwähnten 8 Gleichungen mit 9 Unbekannten erhalten will.

Wenn auf Seite 247 oben die Doppelpunkte einer Collineation als Eckpunkte des Fundamentaldreiecks verwendet werden, so wird die bis dahin mindestens vom Leser stillschweigend gemachte Voraussetzung der Realität dieser Eckpunkte unter Umständen fallen gelassen, was wohl der Erwähnung werth wäre.

Seite 248 muss zu dem geometrischen Ort aller sich selbst entsprechenden Punkte der collinearen zusammen liegenden Systeme natürlich auch der Punkt gerechnet werden, welchen die ausser der Doppelwurzel σ existirende Wurzel ϱ der Gleichung Δ (Seite 246) ergiebt, das heisst: das Centrum der Collineation selbst. Analoges gilt reciprok, so dass es Seite 248, Zeile 6 von oben nach „Systeme“, heissen muss: „ausgenommen die Achse“.

In § 51 sollte die Definition der Affinität zunächst unabhängig vom Zusammenliegen der beiden Systeme gegeben werden.

Besondere Vorsicht ist bei Besprechung der Ordnungskegelschnitte in allgemeinen reciproken und polaren Systemen anzuwenden. Es ist daher nicht zu billigen, dass Seite 263 der Ort der Punkte x des Systems I, welche in entsprechenden Strahlen Y des Systemes II liegen ohne Angabe des einfachen Beweises mit dem Ort der Punkte y von II identificirt wird, welche in entsprechenden Strahlen X von I liegen. Es wäre an dieser Stelle passend, darauf hinzuweisen, dass die einem bestimmten Punkte p des betreffenden Ordnungskegelschnittes K entsprechenden zwei Strahlen X und Y im Allgemeinen nicht mit einander oder mit der Tangente von K in p zusammen fallen.

Es würde dann wohl auch nicht zu einer irrigen Behauptung betreffs der Ordnungscurve des Polarsystems, Seite 266, gekommen sein. Dort heisst es, weil die Tangenten des Kegelschnittes (339) durch die entsprechenden Punkte des Kegelschnittes (338) gehen, so sei an sich klar, dass beide Curven identisch sind. Dem ist nicht so; denn wäre die Identität hier selbstverständlich, so würde sie es auch bei den allgemeineren reciproken Systemen sein. Die Richtigkeit der Behauptung folgt vielmehr aus der Form der beiden Gleichungen (338) und (339) erst mit Hilfe des späteren § 59.

Wenn auf Seite 311 die Gleichung $L' + L'' + L''' \equiv 0$ richtig sein soll, so ist entweder die Bedeutung der L gegen vorher als um gewisse Factoren geändert anzusehen, oder statt L' zu setzen: $\Sigma U'x''.\Sigma U'x'''.L'$, etc. Auf Seite 327 kann die Existenz eines Mittelpunktes bei Kegelschnitten als streng erwiesen nicht angesehen und müsste wenigstens hinterher noch gezeigt werden, dass der berechnete Punkt 395) wirklich alle durchgehenden Sehnen halbirt.

Auf Seite 341 heisst es: „Nimmt man ferner an, dass der Winkel der Sehnen alle Werthe durchläuft von 0 bis 2π, so wird auch der Winkel α_1, unter welchem der Diameter (δ) gegen die Achse der x geneigt erscheint, alle Werthe annehmen von 0 bis 2π etc.“ Dies ist zu sorglos geschlossen.

Zu Seite 360 ist zu bemerken, dass, wenn kurzweg von dem „Parameter“ einer Parabel gesprochen wird, gewöhnlich die Enfernung von Brennpunkt und Directrix, also die Hälfte der Grösse p bei Hanner gemeint ist.

Seite 416 wird eine Construction gemacht, „wodurch man nach dem Pascal'schen Satze bereits eine Gerade erhält, in welcher ein sechster Punkt des Kegelschnittes liegen muss.“ Dies ist natürlich auch ohne den Pascalschen Satz ersichtlich. Auch vermag ich nicht einzusehen, warum Seite 461 unten die Beziehung der beiden Kegelschnitte (U') und (U'') auf ein gemeinsames Polardreieck nicht an und für sich, sondern „vermöge der contravarianten Eigenschaft von Φ und der covarianten Eigenschaft von Ψ“ gestattet sein soll.

In dem Absatz hinter (514) dürfte bei Discussion der Gleichung $A^2(a_{11}+a_{22})^2 - 4A^2(a_{11}a_{22}-a_{12})^2 = 0$ auch die Möglichkeit $A = 0$ mit ein paar Worten behandelt werden.

Wenn es Seite 477 heisst, dass die Parabel nur einen reellen Brennpunkt aufweise, indem der zweite unendlich fern liegt, so ist zu erwähnen, dass nach der gewöhnlichen Sprechweise auch dieser noch als reell zu bezeichnen ist.

Seite 478 wäre der Sicherheit wegen wenigstens ein Mal der speciellen Lage des Curvensystems gegen das Coordinatensystem zu gedenken.

Die Diction ist in Einzelheiten noch der Verbesserung fähig. Es machen sich manchmal falsche Satzverbindungen bemerkbar, unnöthige

Partikeln schlüpfen herein, und verleiten den Leser, unrichtige Causalitäten anzunehmen. Abgesehen von bereits angeführten Stellen vergleiche man z. B. noch Seite 192 oben: „und...aber auch“, Seite 269: „und...übrigens“, Seite 314: „und gelangt man sonach zur Erkenntniss“, Seite 152: „und bedeutet...die Constante f selbstverständlich eine Fläche“.

Störende Druckfehler etc. habe ich folgende bemerkt:

In (65), Seite 33, lies A^3 für A^2,

Seite 239	Zeile	16 von oben	lies	$\frac{A}{\varrho}$	statt	$\varrho . A$,
„ 240	„	18 von unten	„	$\frac{A}{\mu}$	„	$\mu . A$,
„ 267	„	1 und 2 von unten	„	Σ	„	V,
„ 301	„	17 von unten links	„	$a_1 x_1$	„	$a_1 u_1$,
„ 326	„	6 von unten	„	(383)	„	(283),
„ 332	„	8 von oben	„	(399)	„	(390),
„ 422	„	15 von oben	„	eine solche	„	diejenige,
„ 462	„	14 von oben links (analoges rechts),	„	ersten	„	zweiten,
„ 479	„	6 von unten	„	Quadranten	„	Quadraten,
„ 187	„	6 von unten für „Transportation“ schlagen wir „Verschiebung“ vor.				

Statt „Desarque“ lies überall „Desargues“. Ob „proportionirt“ für „proportional“ ein Versehen, oder in Oesterreich gebräuchlich, wage ich nicht zu entscheiden. Das zwischen die zwei Indices eines Buchstabens eingeschobene, überflüssige Komma wirkt nicht günstig.

Wir haben uns schliesslich ganz in Kleinigkeiten verloren. Man wird dies hoffentlich nicht zu pedantisch finden bei einem Lehrbuche, das auf Verwendung in weiteren Kreisen Aussicht hat. Man hat ja bei einem solchen, um sozusagen das Gewicht eines Fehlers zu finden, denselben mit der Anzahl der unerfahrenen Leser zu multipliciren. Gebräuchliche Lehrbücher sollen mit der Zeit tadellos werden. Glücklich ein neues Buch, das durch Correctur an einzelnen Stellen diesem Ziele nahe geführt werden kann. Ueber eine verfehlte Grundanlage würde kein flickweises Verbessern hinweghelfen können.

Hermann Brunn.

Bibliographie

vom 15. September bis 31. October 1892.

Periodische Schriften.

Veröffentlichungen des Recheninstituts der königl. Sternwarte zu Berlin. Nr. 1. (Berechnung wahrer Anomalieen, Auflösung der Kepler'schen Gleichung.) Berlin, Dümmler. 4 Mk.

Publicationen der Kuffner'schen Sternwarte in Ottakring bei Wien. Herausgegeben von Norb. Herz. 2. Bd. Wien, Frick. 20 Mk.

Monatsbericht der deutschen Seewarte. 16. Jahrgang. 2. Beiheft. Die Ergebnisse der Sturmwarnungen im Jahre 1891. Von D. van Bebber. Hamburg, Friedrichsen & Co. 50 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 21. Bd. 1889. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin, G. Reimer. 34 Mk.

Reine Mathematik.

Klein, F., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke. 2. Bd. Leipzig, Teubner. 24 Mk.

Schubert, H., Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Potsdam, Stein. 1 Mk.

Wenzel, L., Logische Operationen in der Mathematik und beim mathematischen Unterrichte. Fortsetzung. Programm. Klagenfurt, Kleinmayr. 1 Mk.

Spieker, Th., Anleitung zur Lösung der Uebungsaufgaben des Lehrbuchs der ebenen Geometrie. Potsdam, Stein. 1 Mk. 20 Pf.

Salberg, A., Geometrische Wandtafeln. (12 Tafeln.) München und Bamberg, Buchner. 7 Mk. 20 Pf.

Geschichte der Mathematik.

Rudio, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung, nebst einer Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Angewandte Mathematik.

Catalog der astronomischen Gesellschaft. 1. Abtheilung. Catalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördl. und 2° südl. Declin. für d. Aecquin. 1875. 5. Stück. Leipzig, Engelmann. 17 Mk.

Schubert, H., Zeitunterschiede; eine Tabelle mitteleuropäischer Zeit, Ortszeit etc. Hamburg, Meissner. 80 Pf.

Gef, W., Die Wärmequelle der Gestirne in mechanischem Maass; ein Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie. Heidelberg, Siebert. 1 Mk.

Lambert, Photometria sive de mensura et gradibus luminis etc. (1760). Deutsch herausgegeben von E. Anding. (Ostwald's Classiker, Nr. 31—33.) Leipzig, Engelmann. 6 Mk. 10 Pf.

Neumann, F., Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme (1847). Herausgegeben von C. Neumann. (Ostwald's Classiker Nr. 36.) Ebendaselbst. 1 Mk. 50 Pf.

Physik und Meteorologie.

Windisch, K., Die Bestimmung des Moleculargewichts in theoretischer und praktischer Beziehung. Berlin, Springer. 12 Mk.

Pfeil, L. v., Die Lufthülle der Erde, der Planeten und der Sonne. Berlin, Dümmler. 1 Mk.

Carnot, S., Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers und die zur Entwickelung dieser Kraft geeigneten Maschinen (1824). Uebersetzt von W. Ostwald. (Ostwald's Classiker Nr. 37.) Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.

Schreiber, P., Das Klima des Königreiches Sachsen. 1. Heft. Chemnitz, Bülz. 4 Mk.

Berichtigung.

Seite 202 Zeile 8 von unten (des Textes) ist zu lesen *ἀυτοὺς* an Stelle von *ἀντοὺς*.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1891.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abbildung.

272. Sur un problème de représentation conforme. Gus. Cassel. Acta Math. XV, 33.
273. Sur la théorie de la représentation conforme. P. Painlevé. Compt. Rend. CXII, 653.

Abel'sche Transcendenten.

274. Sur la théorie des fonctions abéliennes. J. Dolbnia. N. ann. math. Ser. 3, X, 478.

Absolute Geometrie.

275. Zur Theorie der reellen linearen Transformation und der Lobatschewsky-schen Geometrie. A. Schwarz. Wien. Akadem. Ber. XCIX, 153.
276. Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie. Fr. Schur. Mathem. Annal. XXXIX, 113.

Akustik.

277. Sur les déformations et l'extinction des ondes aeriennes, isolées ou périodiques, propagées à l'intérieur de tuyaux de conduite sans eau, de longueur indéfinite. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXII, 1337.

Analytische Geometrie der Ebene.

278. Analytische Untersuchungen der Curven zweiter und dritter Ordnung mittelst numerischer Dreiecks-Coordinaten. H. v. Jettmar. Grun. Archiv 2. R. X, 13.
279. Sur la représentation plane des équations à quatre variables. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXII, 421.
280. Theilungen. Rud. Gaertner. Grun Archiv 2 R. X, 337.
281. On the centre of an algebraical curve. H. M. Taylor. Quart. Journ. math. XXIV, 55. H. F. Baker. ibid. 338.
282. On the angles at the points of intersection of a curve with a straight line. E. J. Routh. Quart. Journ. math. XXIV, 257.
283. Sur deux séries de droites. E. Grossetête. N. ann. math. Ser. 3, X, 256.
284. Sur la courbe $y=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}$. Barisien. N. ann. math. Ser. 3, X, 297.

Vergl. Kegelschnitte. Krümmung. Rectification.

Analytische Geometrie des Raumes.

285. On biangular coordinates, and an extension of the system to space of three dimensions. T. Biggin. Quart. Journ. math. XXV, 237.
286. Sur certains systèmes de coordonnées sphériques et sur les systèmes triples orthogonaux correspondants. A. Petot. Compt. Rend. CXII, 1426.
287. Analytische Untersuchungen der einem Tetraeder zugeordneten Flächen zweiter und dritter Ordnung mittelst numerischer Tetraedercoordinaten. H. v. Jettmar. Grun. Archiv 2. R. X, 398. [Vergl. Nr. 278.]
288. Sur une généralisation du théorème des projections. E. Carvallo. N. ann. math. Ser. 3, X, 345.
289. Sur les spirales harmoniques. L. Raffy. Compt. Rend. CXII, 518.

Vergl. Complanation. Krümmung. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

290. Nouvelles recherches sur les séries employées dans la théorie des planètes. H. Gyldén. Acta Math. XV, 65.
291. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice. H. Poincaré. Compt. Rend. CXII, 269.
292. Méthode pour la détermination des coordonnées équatoriales des centres des clichés constituant la Carte du ciel. Loewy. Compt. Rend. CXII, 1393.
293. Sur les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons. J. Perchot. Compt. Rend. CXIII, 683.
294. Sur la théorie des étoiles filantes. O. Callandreau. Compt. Rend. CXII, 1303.
295. Integration der Gleichungen für die Störungen der Elemente periodischer Kometen von geringer Neigung (Biela'scher Komet) durch die Planeten Erde, Venus, Merkur. J. v. Hepperger. Wien. Akad. Ber. XCIX, 89.
296. Sur les conditions dynamiques du développement des queues cométaires. Et. Siffert. Compt. Rend. CXIII, 321.
297. Loi suivant laquelle la somme des distances de la Lune à deux étoiles quelconques varie en fonction du temps. L. Cruls. Compt. Rend. CXII, 700.
298. Sur le mouvement du périgée de la Lune. J. Perchot. Compt. Rend. CXII, 1045.
299. Sur l'inégalité lunaire à longue période due à l'action de Vénus, et dépendant de l'argument $l+16l'-8l''$. F. Tisserand. Compt. Rend. CXIII, 5.
300. Sur l'accélération séculaire de la Lune et sur la variabilité du jour sidéral. F. Tisserand. Compt. Rend. CXIII, 667.
Vergl. Geodäsie. Optik 517, 518.

B.

Bestimmte Integrale.

301. Sur le développement des intégrales en séries. Worontzoff. N. ann. math. Ser. 3, X, 158.
302. The Gaussian Interpolation-Theory formulae for $n=7$, 8 and 9. J. Perott. Quart. Journ. math. XXV, 200.
303. Sur les résidus des intégrales doubles Max. Marie. N. ann. math. Ser. 3, X, 77.
Vergl. Gammafunctionen. Kettenbrüche 427.

C.

Combinatorik.

304. Sur les permutations limitées. C. A. Laisant. Compt. Rend. CXII, 1047.

Complanation.

305. Quadrable Cylinderflächenstücke. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. X, 222.

D.

Determinanten.

306. Théorie des déterminants dans l'esprit de Grassmann. E. Carvallo. N. ann. math. Ser. 3, X, 219, 341.
307. Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires. H. v. Koch. Acta Math. XV, 53.
308. Sur les formes quadratiques et sur l'équation dite en s. H. Laurent. N. ann. math. Ser. 3, X, 503.

Differentialgleichungen.

309. Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaire. E. Picard. N. ann. math. Ser. 3, X, 197.
310. Ueber den Multiplicator der Differentialgleichungen erster Ordnung. A. Winckler. Wien. Akad. Ber. XCIX, 457, 875.
311. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles. H. Poincaré. Compt. Rend. CXII, 761. — Painlevé ibid. 1190.
312. Sur une classe d'équations différentielles linéaires ordinaires. J. Cels. Compt. Rend. CXII, 985. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 279.]

313. Sur les équations différentielles linéaires. A. Markoff. Compt. Rend. CXIII, 685, 790, 1024. — Painlevé ibid. 739.
314. On certain classes of invariants, associated with linear differential equations. C. Platts. Quart. Journ. math. XXV, 300.
315. Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène. G. Mittag-Leffler. Acta Math. XV, 1.
316. Ueber die allgemeine Form der eindeutigen Integrale der linearen homogenen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten. E. A. Stenberg. Acta Math. XV, 259.
317. Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-même par un changement de fonction et de variable. P. Appell. Acta Math. XV, 281. Compt. Rend. CXII, 34.
318. Sur la détermination des équations aux dérivées partielles du premier ordre. J. Collet. Compt. Rend. CXII, 1193.
319. Sur la réduction à une forme canonique des équations aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré. Elliot. Compt. Rend. CXIII, 495.
320. Sur les intégrales intermédiaires des équations aux dérivées partielles du second ordre. E. Goursat. Compt. Rend. CXII, 1117.
321. Sur l'application de transformations de contact à l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. J. Brill. N. ann. math. Ser. 3, X, 362.
322. Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. J. Horn Mathem. Annal. XXXIX, 391.
323. Ueber algebraische und durch Quadraturen algebraischer Functionen darstellbare Integrale partieller Differentialgleichungssysteme. L. Königsberger. Mathem. Annal. XXXIX, 285.
324. Sur un système d'équations aux dérivées partielles. E. Picard. Compt. Rend. CXII, 685.
325. Sur les invariants de deux équations aux dérivées partielles, obtenues l'une au moyen de l'autre. E. Grossetête. N. ann. math. Ser. 3, X, 208.

Vergl. Determinanten 307.

Differentialquotient.

326. Ableitungen von Identitäten. F. Rogel. Grun. Archiv 2. R. X, 209.
327. A theorem in the calculus of linear partial differential operations. P. A. MacMahon. Quart. Journ. math. XXIV, 246.

Differenzengleichung.

328. Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. H. J. Mellin. Acta Math. XV, 317.

Dreiecksgeometrie.

329. Ueber die einem Dreiecke ein- und angeschriebenen Kreise und Kegelschnitte. Andr. Müller. Grun. Archiv 2. R. X, 300. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 47 und 411.]
330. On the covariant geometry of the triangle. F. Morley. Quart. Journ. math. XXV, 186.
331. Dreiecksschaaren, Parabelschaaren und Kegelschnittbüschel, welche durch drei ähnliche Punktreihen oder durch drei projectivische Strahlenbüschel erzeugt werden. W. Stegemann. Grun. Archiv 2. R. X, 225.

E.

Elasticität.

332. On the longitudinal vibrations of aeolotropic bars with one axis of material symmetry. C. Chree. Quart. Journ. math. XXIV, 340. [Vergl. Bd. XXXV Nr. 411.]
333. Sur la théorie de l'élasticité. H. Poincaré. Compt. Rend. CXII, 914.
334. On the flexure of heavy beams subjected to continuons systems of load. K. Pearson. Quart. Journ. math. XXIV, 63.
335. Sur les expressions des pressions dans un corps élastique homogène. H. Resal. Compt. Rend. CXII, 911.

Elektricität.

336. Zur Construction der Niveaulinien. P. Czermak. Wien. Akad. Ber. XCIX, 511.
337. Sur la théorie des oscillations hertziennes. H. Poincaré. Compt. Rend. CXIII, 515.
338. Ueber elektrische Schwingungen in geraden Leitern. J. Stefan. Wien. Akad. Ber. XCIX, 319.
339. Sur la valeur de la tension électrostatique dans le diélectrique. L. de la Rive. Compt. Rend. CXIII, 429.
340. Ueber die Veränderung elektrostatischer Kraftwirkungen durch eine leitende Wand. G. Adler. Wien. Akad. Ber. XCIX, 61.
341. Théorème relatif au calcul de la résistance d'une dérivation. Ch. Ed. Guillaume. Compt. Rend. CXII, 223.
342. Ueber die Theorie der oscillatorischen Entladung. J. Stefan. Wien. Akad. Ber. XCIX, 534.
343. Variation de la force électromotrice des piles avec la pression. H. Gilbault. Compt. Rend. CXIII, 465.
344. Sur la théorie de la pile. P. Duhem. Compt. Rend. CXIII, 536.

Ellipse.

345. Ueber die Variation der Parallelprojection einer Ellipse mit der Richtung der projicirenden Strahlen und mit der Lage der Projectionsebene. Ph. Weinmeister. Grun. Archiv 2 R. X, 380.

Vergl. Maxima und Minima 449.

Elliptische Transcendenten.

346. Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. L. Kiepert. Mathem. Annal. XXXIX, 145.
347. A transformation in elliptic functions. A. Cayley. Quart. Journ. math. XXIV, 259.
348. Complément à un problème d'Abel. Bougaief. Compt. Rend. CXIII, 1025.
349. Sur les périodes des intégrales elliptiques. V. Jamet. N. ann. math. Ser. 3, X, 193.
350. Sur une classe d'équations modulaires. F. Brioschi. Compt. Rend. CXII, 28.

Vergl. Formen 354. Functionen 367.

F.

Formen.

351. Théorèmes arithmétiques. H. Minkowski. Compt. Rend. CXII, 209. [Vergl. Nr. 86.]
352. Sur les formes quadratiques à indéterminées conjuguées. E. Picard. Mathem. Annal. XXXIX, 142.
353. On binary quadratic forms with complex coefficients. G. B. Mathews. Quart. Journ. math. XXV, 289. [Vergl. Nr. 238.]
354. Weierstrassian formulae applied to the binary quartic and ternary cubic. H. F. Baker. Quart. Journ. math. XXIV, 1.
355. The associated concomitants of ternary forms. W. E. Brunyate. Quart. Journ. math. XXV, 155.
356. Die Invarianten dreier quaternären quadratischen Formen. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. XCIX, 367.

Vergl. Determinanten 308.

Functionen.

357. Ueber das Axiom des Archimedes. O. Stolz. Mathem. Annal. XXXIX, 107.
358. Sur la représentation approchée des fonctions. E. Picard. Compt. Rend. CXII, 183.
359. Sur une généralisation des équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. E. Picard. Compt. Rend. CXII, 1399.
360. Sur les fonctions périodiques de deux variables. P. Appell. Journ. Mathém. Ser. 4, VII, 157.
361. Ueber Functionen, welche gewissen Functionalgleichungen genügen. W. Wirtinger. Wien. Akad. Ber. XCIX, 918.
362. Ueber Functionen von zwei Veränderlichen und einem Satz des Herrn Nöther. A. Brill. Mathem. Annal. XXXIX, 129.
363. Sur une transcendante remarquable trouvée par Mr. Fredholm. G. Mittag-Leffler. Acta Math. XV, 279.

364. Ueber den Zusammenhang der Facultäten-Coefficienten mit den Bernoullischen und Euler'schen Zahlen. F. Rogel. Grun. Archiv 2. R. X, 318.
365. Sur les fonctions symétriques. Worontzoff. N. ann. math. Ser. 3, X, 325.
366. Déterminer un polynôme entier en x du septième degré $f(x)$, sachant que $f(x)+1$ est divisible par $(x-1)^4$ et $f(x)-1$ par $(x+1)^4$. Barisien. N. ann. math. Ser. 3, X, 212. — E. Rouché ibid. 214. — Ch. Brisse ibid. 215.
367. Ueber eine numerische Berechnung der Argumente der cyklischen, hyperbolischen und elliptischen Functionen. C. Runge. Acta Math. XV, 221.
368. Sur le nombre e. V. Jamet. N. ann. math. Ser. 3, X, 215.
369. On the doubly periodic functions arising out of the curve $x^3+y^3-3axy=1$. A. C. Dixon. Quart. Journ. math. XXIV, 167.

Vergl. Abbildung. Abel'sche Transcendenten. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Formen. Gammafunctionen. Gleichungen. Hyperelliptische Functionen. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Logarithmen. Maxima und Minima. Potential. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Topologie. Transformationsgruppen.

G.

Gammafunctionen.

370. Sur la formale de Stirling. Gomez Teixeira. N. ann. math. Ser. 3, X, 313. E. Rouché ibid. 315. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 344.]

Vergl. Differenzengleichungen.

Geodäsie.

371. Sur l'hypothèse du sphéroide et sur la formation de la croûte terrestre. H. Faye. Compt. Rend. CXII, 69.
372. De l'état actuel des travaux géodésiques et topographiques en Russie. Venukoff. Compt. Rend. CXIII, 844.
373. De la mesure du 52e parallèle en Europe. Venukoff. Compt. Rend. CXII, 512.

Vergl. Geschichte der Mathematik 390, 392. Metrologie.

Geometrie (descriptive).

374. Intersection d'une droite avec un hyperboloide de révolution. S. Ravier. N. ann. math. Ser. 3, X, 29.
375. Intersection de deux cônes. F. J. M. N. ann. math. Ser. 3, X, 33.

Geometrie (höhere).

376. Von den Bewegungen und Umlegungen. E. Study. Mathem. Annal. XXXIX, 441.
377. Ueber Cremona-Transformationen in der Ebene, welche eine Curve enthalten, die sich Punkt für Punkt selbst entspricht. K. Doehlemann. Mathem. Annal. XXXIX, 567.
378. Ueber eine algebraische Theorie der Schaaren nichtadjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören. W. Weiss. Wien. Akad. Ber. XCIX, 284.
379. Sur une classe particulière de congruences de droites. C. Guichard. Compt. Rend. CXII, 1424. A. Petot ibid. CXIII, 841.
380. Sur une propriété d'involution, commune à un groupe plan de 5 droites et à un système de 9 plans. P. Serret. Compt. Rend. CXIII, 326, 347.
381. Construction von Tangenten an einige höhere Curven mittelst Kegelschnitte. W. Rulf. Grun. Archiv. 2. R. X, 446.
382. Théorème de géométrie. Tarry. Compt. Rend. CXII, 984.
383. Sur les systèmes cycliques. A. Ribaucour. Compt. Rend. CXIII, 304, 324.
384. Einfache Constructionen für eine Reihe von Unicursalcurven dritter Ordnung. H. Willig. Grun. Archiv 2. R. X, 1.
385. On twisted cubics. A. C. Dixon. Quart. Journ. math. XXIV, 30.
386. On the identity of the nodes of a nodal curve of the fourth order with those of its quartic and sextic contravariants. H. M. Jeffery. Quart. Journ. math. XXIV, 250.
387. Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte 1. Em. Weyr. Wien. Akad. Ber. XCIX, 932.

Vergl. Imaginäres. Kegelschnitte. Mehrdimensionale Geometrie. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Topologie.

Geschichte der Mathematik.

388. Sur des manuscrits à figures interessant l'histoire de l'artillerie et des arts mécaniques vers la fin du moyen age. Berthelot. Compt. Rend. CXIII, 715.
389. Sur le jour de naissance (27. I. 1701) de La Condamine. A. Marre. Compt. Rend. CXIII, 333.
390. Sur les pyramides aux extrémites de la base du Pérou de 1740. G. de Vaux. Compt. Rend. CXII, 33.
391. Notice sur le général Ibañez † 29./I. 1891. J. Bertrand. Compt. Rend. CXII, 266.
392. Histoire de l'appareil Ibañez-Brunner. Rud. Wolf. Compt. Rend. CXII, 370.
393. Notice sur Wilhelm Weber † 23./VI. 1891. Mascart. Compt. Rend. CXIII, 105.
394. Notice sur P. P. Boileau † 11./IX. 1891. M. Lévy. Compt. Rend. CXIII, 409.

Vergl. Logarithmen 443. Metrologie.

Gleichungen.

395. Démonstration purement algébrique du théorème fondamental de la théorie des équations. E. Amigues. Compt. Rend. CXII, 212.
396. Démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations. E. Carvallo. N. ann. math. Ser. 3, X, 109.
397. Théorème fondamental pour la résolution numérique des équations. E. Carvallo. N. ann. math. Ser. 3, X, 429.
398. Sur les équations abéliennes. A. Pellet. Compt. Rend. CXII, 1196, 1249.
399. On the classification of symmetric functions. G. B. Mathews. Quart. Journ. math. XXV, 127.
400. Ueber einen Satz der höheren Algebra. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. XCIX, 907.
401. Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. E. Picard. Compt. Rend. CXIII, 356, 669, 1012. — L. Kronecker ibid. 1006.

Vergl. Functionen 365.

H.

Hydrodynamik.

402. Ueber den durch die Rotation der Erde bewirkten Seitendruck fliessender Gewässer. E. Oekinghaus Grun. Archiv 2. R. X, 95.
403. Sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide. H. Willotte. Journ. Mathém. Ser. 4, VII, 399.
404. Sur le mouvement d'un vortex rectiligne dans un liquide contenu dans un prisme rectangle de longueur indéfinie. Andrade. Compt. Rend. CXII, 418.
405. Essai de dynamique graphique pour l'étude des périodes de trouble dans les moteurs hydrauliques. H. Léauté. Compt. Rend. CXII, 1033.
406. Sur la manière dont les vitesses, dans un tube cylindrique de section circulaire, évasé à son entrée, se distribuent depuis cette entrée jusqu'aux endroits ou se trouve établi un régime uniforme. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXIII, 9.
407. Calcul de la moindre longueur que doit avoir un tube circulaire, évasé à son entrée, pour qu'un régime sensiblement uniforme s'y établisse, et de la dépense de charge qu'y entraîne l'établissement de ce régime. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXIII, 49.
408. Expériences sur les déversoirs. H. Bazin. Compt. Rend. CXIII, 122.

Hyperbel.

409. Dreitheilung jedes Winkels mittelst einer festen Hyperbel. W. Panzerbieter. Grun. Archiv. 2. R. X, 333, 441.
410. Sur les normales menées d'un point à une hyperbole. Barisien. N. ann. math. Ser. 3, X, 251.

Hyperelliptische Functionen.

411. Sur deux systèmes d'équations différentielles dont les fonctions hyperelliptiques de première espèce forment les intégrales. F. Caspary. Compt. Rend. CXII, 1305. [Vergl. Nr. 546, 547.]

I.

Imaginäres.

412. Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie. Max. Marie. N. ann. math. Ser. 3, X, 172, 276, 329, 373, 417, 459. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 402.]
413. Sur la représentation géométrique des points imaginaires dans l'espace. P. Molenbroch. N. ann. math. Ser. 3, X, 434. — Grun. Archiv 2. R. X, 261.
414. Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente. Fr. Schilling. Math. Annal. XXXIX, 598.
415. On orthomorphosis. A. Cayley. Quart. Journ. math. XXV, 203.

Vergl. Formen 353. Mechanik 457. Transformationsgruppen 555.

K.

Kegelschnitte.

416. Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leurs définitions. L. Maleix. N. ann. math. Ser. 3, X, 37, 91, 125, 163. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 408.]
417. Coniques inscrites dans un triangle donné et vues d'un point donné sous un angle droit. M. Liroux. N. ann. math. Ser. 3, X, 264. — Lemaire ibid. 267. — Marchand ibid. 269.
418. Coniques assujetties à diverses conditions. Barisien. N. ann. math. Ser. 3, X, 232.
419. Cordes d'intersection d'une conique et d'une circonférence, dont le centre se trouve sur une axe de la conique. T. Clugnet. N. ann. math. Ser. 3, X, 153.
420. Sur un cercle remarquable qui passe par deux points fixes d'une conique. Genese. N. ann. math. Ser. 3, X, 318.
421. Les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique fixe coupent orthogonalement un cercle fixe, concentrique à la conique. E. Duporcq. N. ann. math. Ser. 3, X, 140.
422. Tangentes communes à deux coniques. J. S. Collin. N. ann. math. Ser. 3, X, 302.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 278. Dreieckgeometrie. Ellipse. Geometrie (höhere) 381. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

423. Sur la convergence des fractions continues simples. H. Padé. Compt. Rend. CXII, 988.
424. Sur quelques fractions continues. Stieltjes. Quart. Journ. math. XXV, 198.
425. Sur le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue. J. Dolbnia. N. ann. math. Ser. 3, X, 134.
426. Sur les fractions continues régulières relatives à e^x. H. Padé. Compt. Rend. CXII, 712.
427. Sur quelques intégrales définies et leur développement en fractions continues. T. J. Stieltjes. Quart. Journ. math. XXIV, 370.

Kinematik.

428. Remarques sur le déplacement d'une figure de forme invariable dont tous les plans passent par des points fixes. A. Mannheim. Compt. Rend. CXII, 283. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 422.]
429. Transformation de démonstration. A. Mannheim. Compt. Rend. CXII, 475. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 422 u. 423.]
430. On the kinematics of a triangle of constant shape but varying size. F. Morley. Quart. Journ. math. XXIV, 359, 386.

Kreis.

431. Die Mascheroni'schen Constructionen. Aug. Adler. Wien. Akad. Ber. XCIX, 910 [Vergl. Nr. 522.]
432. Application of Grassmann's Ausdehnungslehre to properties of circles. Homersham Cox. Quart. Journ. math. XXV, 1.

433. On the problem of tactions. A. Cayley. Quart. Journ. math. XXV, 104.
434. Cercle tangent à trois cercles donnés. V. Hioux. N. ann. math. Ser. 3, X, 399.
435. Sur l'angle sons lequel se coupent deux circonférences tangentes à une même droite. E. Grossetête. N. ann. math. Ser. 3, X, 201.

Vergl. Dreiecksgeometrie. Kegelschnitte 419, 420, 421.

Krümmung.

436. Construction géométrique du centre de courbure en un point d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires. Husquin de Rhéville. N. ann. math. Ser. 3, X, 411.
437. Sur le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche et sur les courbes gauches à courbure constante. P. Adam. N. ann. math. Ser. 3, X, 142.
438. Zur Theorie der Krümmung der Flächen. A. Voss. Math. Annal. XXXIX, 179.
439. Sur la courbure des surfaces. E. Catalan. Acta Math. XV, 191.

Kugelfunctionen.

440. On Legendre's coefficients. H. J. Sharpe. Quart. Journ. math. XXIV, 383.

L.

Logarithmen.

441. Sur les approximations dans le calcul logarithmique. Vlad. Puchewicz. N. ann. math. Ser. 3, X, 393.
442. Calculation of the hyperbolic logarithme of π to thirty decimal places. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXV, 362, 384.
443. Sur une Table de logarithmes centésimaux à 8 décimales. Derrécagaix. Compt. Rend. CXII, 277.
444. Errata aux tables de logarithmes de Schrön. N. ann. math. Ser. 3, X, 102, 189.

M.

Magnetismus.

445. Ueber eine Consequenz der Poisson-Mosotti'schen Theorie. G. Adler. Wien. Akad. Ber. XCIX, 1044.
446. Sur les pressions à l'interieur des milieux magnétiques ou diélectriques. P. Duhem. Compt. Rend. CXII, 657.

Maxima und Minima.

447. Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen. O. Stolz. Wien. Akad. Ber. XCIX, 495.
448. Relation der Flächenwinkel des Tetraeders. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. X, 102, 111, 220.
449. Ueber die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte. V. v. Dantscher. Wien. Akad. Ber. XCIX, 10.
450. Sur les surfaces minima limitées par quatre crêtes d'un quadrilatère gauche. A. Schoenflies. Compt. Rend. CXII, 478.
451. Sur les équations de deux surfaces minima périodiques, possédant la symétrie de l'octaèdre. A. Schoenflies. Compt. Rend. CXII, 515.

Vergl. Mechanik 455.

Mechanik.

452. Généralisation d'un théorème sur l'équilibre des surfaces fermées. Ch. Robert. N. ann. math. Ser. 3, X, 180.
453. Sur le principe d'Huygens. A. Potier. Compt. Rend. CXII, 220.
454. Sur un problème d'analyse qui se rattache aux équations de la dynamique. R. Liouville. Compt. Rend CXII, 710.
455. Die Resultirende als Maxima der Projectionen der Seitenkräfte. V. Thallmayer. Grun. Archiv 2. R. X, 310.
456. Sur les intégrales du second degré dans les problèmes de mécanique. R. Liouville. Compt. Rend. CXIII, 838.
457. Sur les mouvements plans. L. Lecornu. N. ann. math. Ser. 3, X, 5.
458. Le centre d'inertie et les moments d'inertie du corps épicycloidal. Svechnikoff. N. ann. math. Ser. 3, X, 385, 473.
459. Sur les petites oscillations d'un système soumis à des forces perturbatrices périodiques. E. Vicaire. Compt. Rend. CXII, 82.

460. Déformations homogènes finies. Énergie d'un corps isotrope. M. Brillouin. Compt. Rend. CXII, 1500.
461. Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Roberjot. N. ann. math. Ser. 3, X, 365.
462. Sur un problème de mouvement relatif. Marchand. N. ann. math. Ser. 3, X, 321. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 447.]
463. Mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur un paraboloide ayant lui même un mouvement de rotation. De Saint Germain. N. ann. math. Ser. 3, X, 516.
464. Der freie Fall, berechnet aus dem Gravitationsgesetze. Al. Walter. Wien. Akad. Ber. XCIX, 521.
465. Sur le mouvement d'un double cône qui roule sur deux droites. A. de Saint-Germain. Compt. Rend. CXII, 215. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 424.]
466. Pendule isochrone. Phillips. Compt. Rend. CXII, 177.
467. Sur un mémoire de M. de Sparre: Sur le pendule de Foucault: Resal. Compt. Rend. CXII, 769. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 453.]
468. Nouvel appareil gyroscopique. G. Sire. Compt. Rend. CXII, 638.
469. Note sur les poulies-volants. H. Léauté. Compt. Rend. CXII, 75.
470. Le vol des insectes étudié par la photochronographie. Marey. Compt. Rend. CXIII, 15.
471. Emploi de la chronophotographie pour l'étude des appareils destinés à la locomotion aérienne. Marey. Compt. Rend. CXIII, 615.
472. De la forme extérieure vérifiéc par la chronophotographie des muscles de l'homme, dans ses rapports avec les mouvements exécutés. G. Demeny. Compt. Rend. CXIII, 657.

Vergl. Akustik. Astronomie. Elasticität. Elektricität. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Molekularphysik. Nautik. Optik. Potential. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

473. Ueber die verschiedenen Formen von Gruppen, welche r beliebige Punkte im n-dimensionalen Raume bilden können. V. Schlegel. Grun. Archiv 2. R. X, 283.
474. Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen. W. Killing. Mathem. Annal. XXXIX, 257.

Metrologie.

475. Comparaison du mètre international avec le prototype des Archives. Bosscha. Compt. Rend. CXIII, 344. — W. Förster ibid. 413.

Molecularphysik.

476. Sur l'explication physique de la fluidité. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXII, 1099.
477. Théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides. M. Brillouin. Compt. Rend. CXII, 1054.
478. Lois des chocs moléculaires. Cellerier. Journ. Mathém. Ser. 4, VII, 109.
479. Sur quelques effets des tremblements de terre. Cellerier. Journ. Mathém. Ser. 4, VII, 271.

N.

Nautik.

480. Sur le rendement des machines marines et celui des hélices. Methóde géométrique pour calcules le premier de ces rendements sans dynamomètre. A. Ledieu. Compt. Rend. CXII, 926.

O.

Oberflächen.

481. Ueber die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamentalgleichungen. J. Knoblauch. Acta Math. XV, 249.
482. Sur la théorie générale des surfaces courbes. A. Ribaucour. Journ. Math. Ser. 4, VII, 5, 219.
483. Sur la théorie des surfaces applicables. J. Weingarten. Compt. Rend. CXII, 607, 706. — E. Goursat ibid. 707.

484. Sur les surfaces de révolution applicables sur d'autres surfaces. A. Adam. N. ann. math. Ser. 3, X, 18.
485. Ueber die sphärische Darstellung der asymptotischen Linien einer Fläche. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. X, 443.
486. Sur les systèmes conjugués et sur la déformation des surfaces. E. Cosserat. Compt. Rend. CXIII, 460.
487. Sur les systèmes cycliques et sur la déformation des surfaces. E. Cosserat. Compt. Rend. CXIII, 498.
488. Sur les systèmes conjugués à invariants égaux. G. Koenigs. Compt. Rend. CXIII, 1022.
489. Sur une classe de surfaces harmoniques. L. Raffy. Compt. Rend. CXII, 424.
490. Sur la déformation des surfaces spirales. L. Raffy. Compt. Rend. CXII, 850.
491. Sur la détermination des surfaces spirales d'après leur élément linéaire. L. Raffy. Compt. Rend. CXII, 1421.
492. Sur les surfaces à génératrices rationnelles. Lelieuvre. Compt. Rend. CXIII, 635.
493. Des surfaces qui possèdent la symétrie courbe des systèmes de plans. S. Mangeot. Compt. Rend. CXII, 1497.
494. Eine Gattung windschiefer Flächen. A. Sucharda. Wien. Akad. Ber. XCIX, 549.
495. Ueber Berührungscurven und Hülltorsen der windschiefen Helikoide und ein dabei auftretendes zwei zweideutiges Nullsystem. Th. Schmid. Wien. Akad. Ber. XCIX, 952.
496. Quelques théorèmes de géométrie élémentaire. G. Lechalas. N. ann. math. Ser. 3, X, 527.
497. Démonstration d'un théorème sur les normalies. H. Ader. N. ann. math. Ser. 3, X, 225.
498. Ueber eine neue Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. XCIX, 683.
499. Sur la surface desmique du quatrième ordre. G. Humbert. Journ. Mathém. Ser. 4, VII, 353.
500. Ueber die Entstehung organischer Cylindergebilde. K. Fuchs. Wien. Akad. Ber. XCIX, 967.

Vergl. Complanation. Krümmung. Maxima und Minima 450, 451. Singularitäten. Thetafunctionen 547.

Oberflächen zweiter Ordnung.

501. Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques et sur une génération mécanique des quadriques. S. L. Ravier. N. ann. math. Ser. 3, X, 371.
502. Sur les quadriques inscrites dans un cône du second degré. Genty. N. ann. math. Ser. 3, X, 204.
503. Surfaces de symétrie du troisième ordre d'une quadrique. S. Mangeot. N. ann. math. Ser. 3, X, 235.
504. Intersection de deux quadriques. L. Lévy. N. ann. math. Ser. 3, X, 65. [Vergl. Bd. XXXVI, Nr. 496.]

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 287. Geometrie (descriptive). Sphärik.

Optik.

505. Sur la théorie de la lumière. C. Raveau. Compt. Rend. CXII, 853.
506. Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche. U. Bigler. Grun. Archiv 2. R. X, 113.
507. Extension aux pseudo-surfaces du théorème de Malus relatif à la marche des rayons lumineux. Issaly. N. ann. math. Ser. 3, X, 190.
508. Eine allgemeine Linsengleichung. M. Mandl. Wien. Akad. Ber. XCIX, 574.
509. Sur la surface d'onde dans les cristaux. C. Raveau. Compt. Rend. CXII, 1056.
510. Ueber Mac-Cullagh's Differentialgleichungen für Lichtschwingungen in zweiachsigen Crystallen und deren Verallgemeinerung. E. Kobold. Wien. Akad. Ber. XCIX, 826.
511. On the magnitudes of conjugate ray velocities in a biaxis crystal and their inclination to each other. W. Walton. Quart. Journ. math. XXV, 182.
512. Compatibilité des lois de la dispersion et de la double réfraction. E. Carvallo. Compt. Rend. CXII, 521.
513. Sur les anneaux colorés. Mascart. Compt. Rend. CXII, 407.
514. Sur une expérience récente, déterminant la direction de la vibration dans la lumière polarisée. A. Cornu. Compt. Rend. CXII, 186, 365. — H. Poincaré ibid. 325, 456. — A. Potier ibid. 383. — E. Carvallo ibid. 431.

515. Sur la polarisation rotatoire. E. Carvallo. Compt. Rend. CXIII, 846.
516. Zur Theorie der Halbschattenpolarimeter. F. Lippich. Wien. Akad. Ber. XCIX, 695.
517. Sur l'aberration. Mascart. Compt. Rend. CXIII, 571.
518. Détermination de la constante de l'aberration. Loewy & Puiseux. Compt. Rend. CXII, 549, 1089.

Vergl. Electricität 337.

P.

Parabel.

519. Théorème sur la parabole. Barisien. N. ann. math. Ser. 3, X, 246.
520. Paraboles tangentes à des droites variables dans des points fixes. Barisien. N. ann. math. Ser. 3, X, 243.
521. Sur le faisceau des paraboles qui passent par un point donné et qui ont une droite donnée pour directrice. Barisien. N. ann. math. Ser. 3, X, 228.

Vergl. Dreiecksgeometrie 331.

Planimetrie.

522. Ueber die zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben zweiten Grades nothwendigen Hilfsmittel. Aug. Adler. Wien. Akad. Ber. XCIX, 846. [Vergl. Nr. 431.]

Potential.

523. The potentials of ellipsoids of variable densities. F. W. Dyson. Quart. Journ. math. XXV, 259.
524. Sur un problème de Mr. Bruns. Soph. Kowalevski. Acta Math. XV, 45.

R.

Rectification.

525. Sur une courbe définie par la loi de sa rectification. M. d' Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, X, 82.

Reihen.

526. Zur Theorie der sogenannten Convergenz-Kriterien zweiter Art. A. Pringsheim. Mathem. Annal. XXXIX, 125. [Vergl. Bd. XXXV, Nr. 680.]
527. Sur la convergence de quelques séries. E. Cahen. N. ann. math. Ser. 3, X, 453.
528. Sur un développement des quantités numériques qui présente quelque analogie avec celui en fractions continues. E. Cahen. N. ann. math. Ser. 3, X, 508.
529. Sur la série $\sum_1^\infty n^s u^n$. E. Cahen. N. ann. math. Ser. 3, X, 476.
530. Formule des différences et formule de Taylor. E. Carvallo. N. ann. math. Ser. 3, X, 24.
531. Eine bemerkenswerthe Identität. F. Rogel. Grun. Archiv 2. R. X, 110.
532. Ueber die Reihenumkehrung. O. Ježek. Wien. Akad. Ber. XCIX, 191.
533. Expansion in a series of $(1+x)^{\frac{1}{x}}$. E. C. Hudson. Quart. Journ. math. XXIV, 233.
534. Transformationen der Potenzreihen ganzer und reciproker Zahlen. F. Rogel. Grun. Archiv 2 R. X, 169.
535. Expression du nombre π par une série très convergente. F. Lucas. Compt. Rend. CXII, 1050.
536. On the sum of the inverse prime numbers. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXV, 369.
537. On the sums of the inverse powers of the prime numbers. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXV, 347.
538. On the series $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\ldots$ J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXV, 375.

Vergl. Astronomie 290, 291. Bestimmte Integrale 301. Zahlentheorie 576.

S.

Singularitäten.

539. The theory of the singularities of surfaces of revolution. W. P. Workman. Quart. Journ. math. XXV, 89.

Vergl. Geometrie (höhere) 378, 384, 386.

Sphärik.

540. Sur une sphère variable touchant deux sphères données. Marchand. N. ann. math. Ser. 3, X, 322.
    Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 286.

Stereometrie.

541. Ueber congruente Raumtheilungen. V. Schlegel. Grun. Archiv 2. R. X, 154.

Substitutionen.

542. Weitere Untersuchungen über automorphe Gruppen solcher linearen Substitutionen einer Variabeln, deren Coefficienten Quadratwurzeln ganzer Zahlen enthalten. R. Fricke. Mathem. Annal. XXXIX, 62. [Vergl. Nr. 237.]
543. On possible groups of substitutions that can be formed with three, four, five, six and seven letters respectively. E. H. Askwith. Quart. Journ. math. XXIV, 111.
544. On groups of substitutions that can be formed with eight letters. E. H. Askwith. Quart. Journ. math. XXIV, 263.
545. On the substitution groups for two, three, four, five, six, seven, and eight letters. A. Cayley. Quart. Journ. math. XXV, 71, 137.

T.

Thetafunctionen.

546. Sur une méthode élémentaire pour établir les équations différentielles dont les fonctions thêta forment les intégrales. F. Caspary. Compt. Rend. CXII, 1120.
547. Sur les deux formes sous lesquelles s'expriment, au moyen des fonctions thêta de deux arguments, les coordonnées de la surface du quatrième degré, décrite pour les sommets des cônes du second ordre qui passent par six points donnés. F. Caspary. Compt. Rend. CXII, 1356.

Topologie.

548. Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XXXIX, 1.
549. Map-colour theorem. P. J. Heawood. Quart. Journ. math. XXIV, 332.
550. Die Theorie der regulären Graphs. Jul. Petersen. Acta Math. XV, 193.

Transformationsgruppen.

551. Ueber cotinuirliche Transformationsgruppen. L. Maurer. Mathem. Annal. XXXIX, 409.
552. Sur une application des groupes de M. Lie. L. Autonne. Compt. Rend. CXII, 570.
553. Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. L. Autonne. Compt. Rend. CXIII, 632.
554. Sur les équations différentielles linéaires. E. Vessiot. Compt. Rend. CXII, 778.
555. Zurückführung complexer Zahlen auf typische Formen. G. Scheffers. Mathem. Annal. XXXIX, 293.
    Vergl. Absolute Geometrie.

Trigonometrie.

556. On certain analogous properties of the circumscribed and inscribed quadrilateral and pentahedron. H. M. Jaffery. Quart. Journ. math. XXV, 336.
    Vergl. Imaginäres 404. Maxima und Minima 448.

W.

Wärmelehre.

557. Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie. V. v. Lang. Wien. Akad. Ber. XCIX, 899.
558. Ueber die Schwingungen periodisch erwärmter Luft. M. Margules. Wien. Akad. Ber. XCIX, 204.
559. Ueber eine allgemeine Form der Zustandsgleichung. E. Kobald. Wien. Akad. Ber. XCIX, 817.
560. Abaissement du plan d'eau dans un corps cylindrique horizontal. Haton de la Goupillière. Compt. Rend. CXII, 1036.

561. Zur Theorie der Dampfspannung. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. XCIX, 679.
562. Sur la durée de l'évaporation dans les générateurs. Haton de la Goupillière. Compt. Rend. CXII, 977.
563. Ueber die Abhängigkeit des specifischen Volumens gesättigter Dämpfe von dem specifischen Volumen der zugehörigen Flüssigkeiten und der Temperatur. Gust. Jäger. Wien. Akad. Ber. XCIX, 1028.
564. Sur une représentation géométrique et une formule de la loi d'écoulement des gaz parfaits à travers les orifices. H. Parenty. Compt. Rend. CXIII, 184.
565. Sur les dimensions et la forme de la section d'une veine gazeuse, où règne la contrepression limite pendant le débit-limite. Parenty. Compt. Rend. CXIII, 594.
566. Sur les modifications de l'adiabatisme d'une veine gazeuse contractée. H. Parenty. Compt. Rend. CXIII, 791.

Wurzelgrössen.

567. Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XXXIX, 279.
568. Angenäherte Berechnung von Wurzelgrössen nebst Anwendungen. V. Thallmayer. Grun. Archiv 2. R. X, 32.
569. Zum Rationalmachen der Nenner. Ed. Janisch. Grun. Archiv 2. R. X, 420.

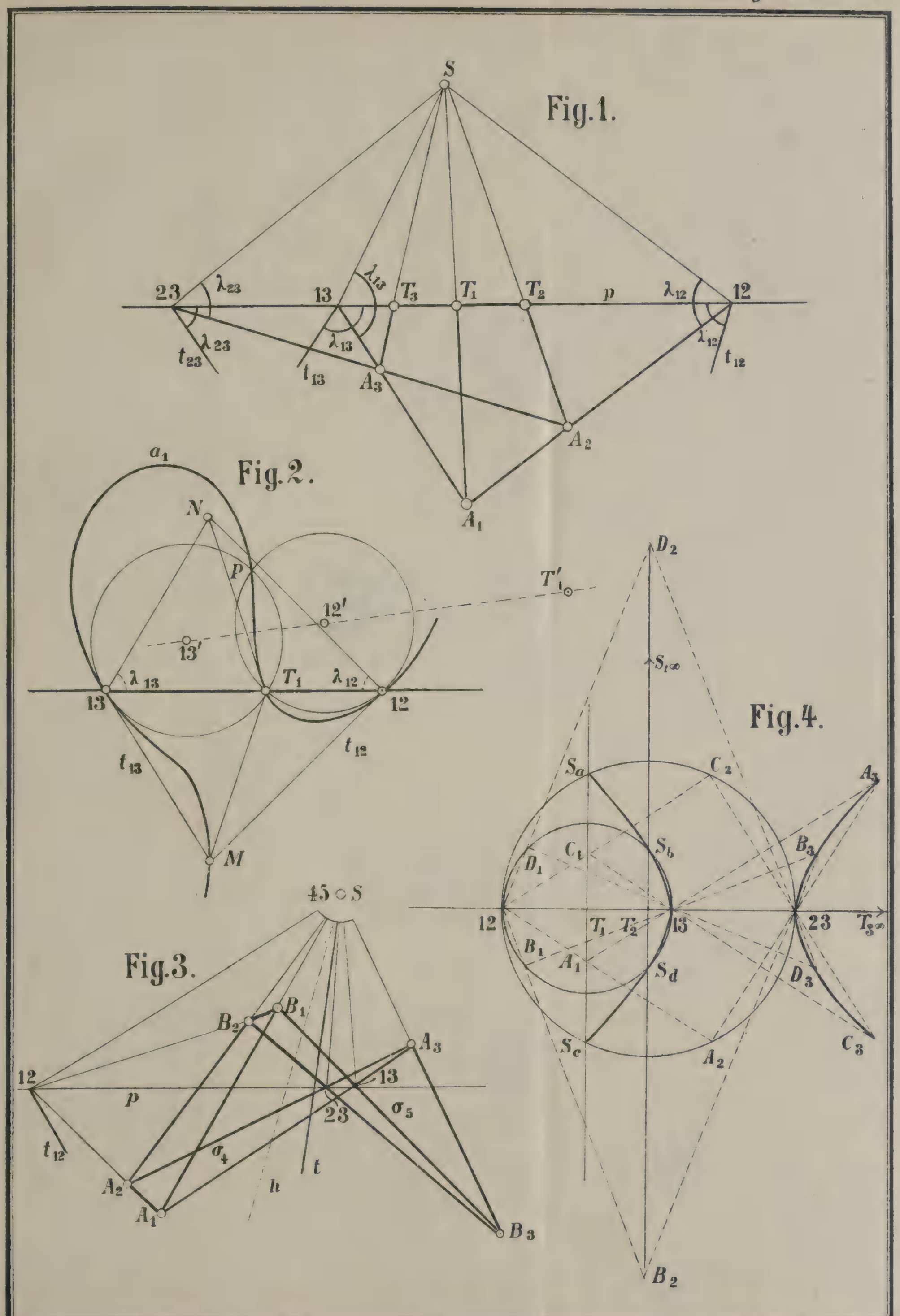
Vergl. Kettenbrüche 425.

Z.

Zahlentheorie.

570. Sur la distribution des nombres premiers. H. Poincaré Compt. Rend. CXIII, 819.
571. Zur Theorie der Congruenzen mit mehreren Unbekannten. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. XCIX, 790.
572. Zur Theorie der höheren Congruenzen. F. Rogel. Grun. Archiv 2. R. X, 84.
573. Sur une classe de nombres complexes. A. Markoff. Compt. Rend. CXII, 780, 1049, 1123.
574. On the generalisation of a theorem of Gauss and its application. M. Mandl. Quart. Journ. math. XXV, 227.
575. Ueber einen arithmetischen Satz von Hermite. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. XCIX, 387.
576. Darstellung zahlentheoretischer Functionen durch trigonometrische Reihen. F. Rogel. Grun. Archiv 2. R. X, 62.

Vergl. Formen.


Fig. 1.
S
23
13
T_3
T_1
T_2
p
12
λ_{23}
λ_{13}
λ_{12}
t_{23}
t_{13}
t_{12}
A_3
A_2
A_1
Fig. 2.
a_1
N
P
T'_1
12'
13'
λ_{13}
T_1
λ_{12}
13
12
t_{13}
t_{12}
M
Fig. 3.
45 S
B_2
B_1
A_3
12
13
p
23
σ_5
σ_4
t_{12}
A_2
A_1
h
t
B_3
Fig. 4.
D_2
$S_{1\infty}$
S_a
C_2
A_3
S_b
C_1
B_3
D_1
12
T_1
T_2
13
23
$T_{3\infty}$
B_1
A_1
S_d
D_3
S_c
A_2
C_3
B_2

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Siebenunddreissigster Jahrgang.

Supplement.

Mit einer lithographierten Tafel.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1892.

DAS MATHEMATIKER-VERZEICHNISS IM FIHRIST DES IBN ABÎ JAʿḲÛB AN-NADÎM.

ZUM ERSTEN MAL VOLLSTÄNDIG INS DEUTSCHE ÜBERSETZT UND MIT ANMERKUNGEN VERSEHEN

VON

Dr. HEINRICH SUTER,

PROF. IN ZÜRICH.

Vorwort.

In den Jahren 1871 und 1872 erschien zu Leipzig in 2 Bänden (der 2. Band enthält Anmerkungen und Register) das bio- und bibliographische Handbuch des Abû'l-Faradsch Muhammed ben Ishâk, bekannt unter dem Namen Ibn Abî Ja'kûb an-Nadîm (seine Lebenszeit ist nicht sicher anzugeben, er schrieb den Haupttheil seines Buches im Jahre d. H. 377 (987 p. Ch.)), betitelt: Kitâb al-Fihrist (Buch des Verzeichnisses), herausgegeben von Gustav Flügel: nach dessen Tode besorgt von Joh. Rödiger und August Müller. Dieses Buch enthält biographische (diese meistens sehr kurz) und bibliographische Notizen über eine grosse Zahl von Autoren der verschiedensten Wissensgebiete und Nationalitäten (Inder, Babylonier, Perser, Griechen, Araber etc.) und ist in 10 Hauptabtheilungen, jede mit mehreren (2—8) Unterabtheilungen, nach den verschiedenen Wissenszweigen geordnet, getheilt. Was den Inhalt der einzelnen Abtheilungen anbetrifft, so muss ich den Leser auf Flügels Besprechung des Fihrist in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft (Bd. 13 p. 559—650) verweisen; für uns kommt hier nur die 7. Hauptabtheilung mit drei Unterabtheilungen in Betracht, von denen die erste die Logiker und Naturphilosophen, die zweite die Mathematiker, Astronomen, Mechaniker etc., und die dritte die Aerzte behandelt. — Dieses Werk ist desshalb von so grosser Wichtigkeit für die Literatur- und Culturgeschichte der Araber, weil es die älteste Quelle dieser Art ist (Ibn Kutaibas Handbuch der Geschichte ist circa 100 Jahre älter, enthält aber nur wenige literarische Angaben) und alle späteren Literarhistoriker der Araber, wie Ibn al-Kuftî, Ibn Challikân, Nawawî, Ibn Abî 'Uṣaibia, Ḥâdschî Chalfa und Andere mehr oder weniger aus ihm geschöpft haben. Neben Flügel haben bis auf diese Zeit schon eine Reihe von Gelehrten diese wichtige Quelle vor und nach ihrer Drucklegung zu historischen Studien benutzt, so de Sacy, Quatremère, Reinaud, Woepke, Hammer-Purgstall, Chwolsohn, Steinschneider etc. Andere wieder, wie Hankel, bedauerten, dasselbe wegen Unkenntniss der arabischen Sprache nicht benutzt haben zu können, und Letzterer drückt den Wunsch aus,

seine Darstellung möchte eine vollständige Uebersetzung der betreffenden Theile desselben veranlassen.*)

Dem Verfasser dieser Abhandlung war es erst seit seinem Aufenthalte in Zürich (seit 1886) vergönnt, sich dem Studium des Arabischen eingehender zu widmen, und derselbe fühlte sich nun in der Kenntniss der Sprache soweit erstarkt, dass er mit der Uebersetzung der auf die mathematischen Wissenschaften sich beziehenden Partien des Werkes nicht mehr länger zurückhalten zu müssen glaubte.

Gemäfs den drei Unterabtheilungen des 7. Buches des Fihrist zerfällt meine Uebersetzung ebenfalls in drei Theile; da aber sowohl unter den Logikern und Naturphilosophen der ersten, wie auch unter den Aerzten der dritten Unterabtheilung sich nur wenige Autoren befinden, von denen mathematische (im weiteren Sinne des Wortes) Werke angeführt werden, so sind diese beiden Theile nicht vollständig übersetzt, sondern jeweilen nur diejenigen Stellen wiedergegeben worden, die für unsern Zweck von Interesse sind.**) Dagegen ist die zweite Unterabtheilung vollständig und soweit es, ohne der Sprache allzuviel Zwang anzuthun, angieng, wörtlich übersetzt. Das Wort كتاب „Buch", das im Texte vor jedem aufgeführten Werke eines Autors steht, habe ich der Kürze halber meistens weggelassen. Sachliche, auf die Autoren und ihre Werke bezügliche Zusätze, Berichtigungen etc. habe ich in einem Schlusstheil, „Anmerkungen" betitelt, zusammengestellt.

Was die Transscription der Eigennamen anbetrifft, so habe ich im Allgemeinen diejenige Flügels in der citierten Abhandlung über den Fihrist adoptiert, nur schreibe ich, wie es gebräuchlich ist: Muḥammed statt Muḥammad, ʿOmar statt ʿUmar, Aḥmed statt Aḥmad, Bekr statt Bakr, ben statt bin. Ferner gebe ich, um die vielen unterscheidenden, für den Drucker und Leser unangenehmen Zeichen zu reducieren, ش durch sch, ج durch dsch, خ durch ch wieder, was auch der gewöhnlichen Aussprache entspricht. Ueber die anderen Consonanten merke man sich: ح = ḥ ist ein scharfes h; ذ = ḏ das weiche englische th; ث = ṯ das harte englische th; ز = z ein weiches s; س = s ein scharfes s; ص = ṣ noch schärferes emphatisches s;

---

*) Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874. p. 223 u. 224.

**) Was in diesen beiden Abschnitten nicht wörtliche Uebersetzung ist, sondern von mir hinzugefügt, oder im Auszug wiedergegeben wurde, ist in eckige Klammern geschlossen. In allen drei Abschnitten sind von mir hinzugefügte Wörter, die einen Begriff näher bezeichnen oder erklären sollen, in runde Klammern eingeschlossen.

ط = ẓ ein französisches z des oberen Gaumens mit Nachdruck auszusprechen; ع = ʿ ist ein Guttural, der für uns im Anfang und am Ende eines Wortes ohne Bedeutung ist, zwischen zwei Silben aber anzeigt, dass dieselben scharf getrennt ausgesprochen werden.

Der französische Circumflex (^) über einem Vocal deutet seine Länge an. Was die Betonung anbetrifft, so merke man sich, dass, wenn ein Wort eine Silbe mit langem Vocal oder eine durch Position lange Silbe hat, der Ton auf dieser ruht, doch hat der lange Vocal im Auslaut nie den Ton; also liegt der Accent in Chaṣîb auf dem i, in ʿUṭârid auf dem a, in Muḥammed auf dem a; dagegen in Abû, ʿAlî, Jaḥjâ etc. auf der ersten Silbe.*) Hat ein Wort mehrere lange Vocale, oder solche und Positionslängen, so liegt der Ton auf der letzten Länge, so in Chowârezmî auf dem e, in Nûbacht auf dem a, in Manṣûr auf dem u, in Naṣrânî auf dem â. Hat das Wort gar keine lange Silbe, so rückt der Ton im Allgemeinen so weit nach vorn als möglich, also bei dreisilbigen auf die erste Silbe.

Was die Anmerkungen anbetrifft, so hielt ich es für zweckmässig, von der Hinweisung auf die vorhandenen lateinischen Uebersetzungen arabischer Werke Umgang zu nehmen (mit wenigen Ausnahmen), denn das Material für die Anmerkungen wäre dadurch zu einem schwer zu bewältigenden angewachsen; ich verweise den Leser hiefür auf die Schriften Wenrichs, Wüstenfelds und Steinschneiders.

Zum Schlusse will ich nicht unterlassen, Hrn. Dr. phil. Hausheer in Zürich meinen besten Dank auszusprechen für die Hülfe, die er mir bei der Erklärung einiger sprachlich schwieriger Stellen entgegengebracht hat. Trotz sorgfältiger Arbeit aber war es nicht zu vermeiden, dass der Leser hie und da noch auf ein Fragezeichen stossen, oder in den Anmerkungen unsichere Conjecturen treffen wird; es bezieht sich dies einerseits auf Namen von Autoren, deren richtige Transscription nicht festzustellen ist, und andrerseits auf Büchertitel, aus denen kein Schluss auf den Inhalt zu ziehen ist, oder die keinen verständlichen Sinn ergeben; doch darf ich hinzufügen, dass ich, was das erstere anbetrifft, die Fragezeichen des Herausgebers um keine neuen vermehrt habe, dass ich aber in Bezug auf das letztere vielleicht da und dort einiges Licht in unklare Stellen hineingebracht habe, die Denjenigen Verlegenheiten bereiten mussten, die mit dem wissenschaftlichen Stoff, um den es sich handelt, nicht genügend vertraut waren.

---

*) Eine scheinbare Ausnahme von dieser Regel machen Wafâ und ʿAlâ, die den Accent auf der Schlusssilbe haben, weil sie im Arabischen mit dem Consonanten (Spiritus lenis) Hamza schliessen, der in der Transscription weggelassen wird.

Verzeichniss der gebrauchten Abkürzungen.

Abulphar. = Abulpharajii Historia dynastiarum, edid. arab. et lat. vert. Ed. Pocockius. Oxon. 1672.

Casiri = Bibliotheca arabico-hispana escurial. Edid. Casiri, Matriti 1760—1770.

Dorn = Drei in der k. Bibl. zu St. Petersburg befindliche astronomische Instrumente mit arabischen Inschriften von B. Dorn. (Mém. de l'acad. impér. de St. Pétersb. Tome IX No. 1.)

Flügel, A. od. Fihrist, A. = Zweiter Band von Flügels Ausgabe des Fihrist, welcher die Anmerkungen und Register enthält.

H. Ch. = Lexicon bibliogr. et encyclop. a Haji Khalfa (Ḥâdschî Chalfa) compositum. Edid. et lat. vert. G. Flügel. Leipzig 1835—58.

Ibn al-K. = Târîch al-Ḥukamâ (Chronik der Gelehrten) von Ibn al-Ḳuftî (noch nicht herausgegeben, ich citiere nach Flügel die Wiener Handschrift No. 1161).

Reinaud = Mémoire géograph. histor. et scientifique sur l'Inde, par M. Reinaud. Paris 1849.

Wenrich = Wenrich, de auctorum graecor. versionibus et commentar. syr. arab. etc. commentatio. Lips. 1842.

Wüstenfeld = Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher, von Ferd. Wüstenfeld. Göttg. 1840.

Z. D. M. G. = Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft.

Z. f. M. Ph. = Zeitschrift für Mathematik und Physik, von Schlömilch, Kahl und Cantor; hist.-literar. Abtheilung.

Das siebente Buch des Fihrist.

Es enthält die Geschichten der Philosophen und der alten Wissenschaften*), und die Schriften, die auf diesen Gebieten verfasst worden sind, und zerfällt in drei Unterabtheilungen.

I. Unterabtheilung.

Ueber die Naturphilosophen und Logiker, die Titel ihrer Schriften, deren Uebersetzungen und Commentare, über das was noch von ihnen vorhanden ist, was von ihnen erwähnt wird, aber nicht mehr vorhanden ist, und was einmal vorhanden war, dann aber verloren gegangen ist.

[Nach einigen einleitenden Capiteln über die Verschiedenartigkeit der Wissenschaften, woher dieselben zuerst gekommen seien, wie sie sich verbreitet haben, durch wen sie im Islam hauptsächlich Eingang fanden, über die Uebersetzer aus verschiedenen Sprachen ins Arabische etc., kommt er zum eigentlichen Gegenstand mit dem Capitel]:

Der Erste, welcher sich mit Philosophie beschäftigt hat

[Dieser war nach den Einen Thales, nach den Andern Pythagoras, der Verfasser der goldenen Sprüche, so genannt, weil Galenos aus Hochschätzung für sie dieselben mit Gold niedergeschrieben habe. — Dann kommt eine grössere Abhandlung über]:

Platon.

[Am Schlusse derselben wird von ihm angeführt]: Das Buch über die Elemente der Geometrie, übersetzt von Ḳusṭâ.**)

---

*) Darunter sind diejenigen verstanden, mit denen sich schon die alten Völker, insbesondere die Griechen, beschäftigt haben, nämlich Mathematik, Astronomie (Astrologie und Alchemie) und Medicin.

**) Hier liegt wohl eine Verwechslung des Verfassers des Fihrist vor: Ḳusṭâ hat, wie in der III. Unterabtheilung (Aerzte) zu lesen ist, eine eigene Abhandlung unter diesem Titel geschrieben.

Aristoteles.

[Nachdem sein Leben und die logischen Schriften behandelt sind, geht der Verfasser zu Folgenden über]: Die Physik (auscultationes physicae), mit dem Commentar Alexanders (von Aphrodisias), enthält acht Bücher. Muḥammed ben Isḥâḳ sagt: Von dem Commentar Alexanders zum ersten Buch des Aristoteles seien zwei Bücher vorhanden, das zweite jedoch nur zum Theil, diese wurden übersetzt von Abû Rauḥ, dem Ṣabier, welche Uebersetzung verbessert wurde von Jaḥjâ ben ʿAdî; vom Commentar zum zweiten Buche existiert ein Buch, welches von Ḥunain aus dem Griechischen ins Syrische übersetzt worden ist, und aus dem Syrischen ins Arabische von Jaḥjâ ben ʿAdî; zum dritten Buche findet sich kein Commentar vor, dagegen drei Bücher des Commentars zum vierten Buche, jedoch das dritte nur unvollständig bis zu den Worten „über die Zeit"; diese wurden übersetzt von Ḳusṭâ, die bekanntere existierende Uebersetzung aber ist diejenige von ad-Dimischḳî; zum fünften Buche der Physik schrieb Alexander einen Commentar in einem Buche, übersetzt von Ḳusṭâ ben Lûḳâ; zum sechsten Buche schrieb er einen Commentar in einem Buche, der etwas mehr als zur Hälfte vorhanden ist; ebenso existiert ein Commentar zum siebenten Buche in einem Buche, übersetzt von Ḳusṭâ; von einem solchen zum achten Buche sind nur wenige Blätter vorhanden.

Die Physik wurde auch commentiert von Johannes dem Grammatiker (Philoponos) aus Alexandria. Muḥammed ben Isḥâḳ sagt: Was von diesem Werke Ḳusṭâ übersetzt hat, ist in unterrichtender (belehrender) Form[a], und was ʿAbdalmasiḥ ben Nâʿima übersetzt hat, ist nicht in dieser Form; Ḳusṭâ übersetzte die vier ersten Bücher, und Ibn Nâʿima die vier letzten.

Die Physik wurde noch von verschiedenen anderen Philosophen commentiert. Es existiert ein Commentar des Porphyrios zu den vier ersten Büchern, übersetzt von Basilios (?). Einen Commentar des Themistios übersetzte Abû Bischr Mattâ ins Syrische, ein Theil des ersten Buches der Uebersetzung ist noch vorhanden. Abû Aḥmed ben Karnîb commentierte einen Theil des ersten Buches und einen Theil des vierten bis zu den Worten „über die Zeit". Ebenso commentierte Ṯâbit ben Ḳurra einen Theil des ersten Buches und Ibrâhîm ben aṣ-Ṣalt übersetzte das erste Buch: ich habe eine Abschrift dieser Uebersetzung von Jaḥjâ ben ʿAdî gesehen. Auch Abû'l-Faradsch Ḳadâma ben Dschaʿfar ben Ḳadâma commentierte einen Theil des ersten Buches der Physik.

Die Schrift über den Himmel und die Welt. Sie enthält vier Bücher und wurde übersetzt von Ibn al-Baṭrîḳ, welche Uebersetzung dann verbessert wurde von Ḥunain. Ebenso übersetzte Abû Bischr Mattâ einen

Theil des ersten Buches. Alexander von Aphrodisias commentierte von diesem Werke einen Theil des ersten Buches und Themistios das ganze Werk; diesen Commentar übersetzte oder verbesserte Jaḥjâ ben ʿAdî im Verein mit Ḥunain — von diesem sind die 16 Fragen (Quaestiones) —. Es existiert auch ein Commentar von Abû Zaid al-Balchî zum Anfang dieses Werkes, verfasst für (d. h. im Auftrag von ..., auch gewidmet dem ...) Abû Dschaʿfar al-Châzin.

Ueber die himmlischen Erscheinungen (Meteorologie). Hievon ist ein grosser Commentar vorhanden von Makidoros*), welcher übersetzt worden ist von Abû Bischr Mattâ, aus diesem hat aṭ-Ṭabarî einen Auszug gemacht. Alexander von Aphrodisias schrieb ebenfalls einen Commentar, der zuerst direct ins Arabische übersetzt, und erst später durch Jaḥjâ ben ʿAdî aus dem Syrischen ins Arabische übertragen worden ist.

Das Buch über den Spiegel**), übersetzt von al-Ḥidschâdsch ben Maṭar.[1]

Theophrastos.

Er war einer der Schüler des Aristoteles und ein Sohn seiner Schwester, und einer von denen, welchen Aristoteles sein Erbe (geistiges) anvertraute, er folgte auch diesem nach dessen Tode auf dem Lehrstuhl. Er schrieb [unter Anderem]: Ein Buch über die Meteore.

Proklos Diadochos,

der Platoniker. Er schrieb [unter Anderem]: Ueber die Definitionen der Elemente der Physik.[2] Ueber den Theil, welcher nicht getheilt werden kann.[3] Das Buch der kleineren Elemente.[2]

Alexander von Aphrodisias.

Er schrieb [unter Anderem]: Widerlegung derjenigen, welche behaupten, dass Nichts aus Nichts entstehen könne (wörtlich: dass Nichts entstehe ausser aus Etwas). Ueber die Gesichtswahrnehmungen, dass diese nämlich nicht stattfinden können ohne Strahlen, die vom Auge ausgesandt (zerstreut) werden, und Widerlegung derjenigen, welche die Aussendung der Strahlen behaupten.[4]

Porphyrios.

Er lebte nach Alexander (v. Aphrod.) und Galenos und vor Ammonios, war aus Tyrus gebürtig; er commentierte die Schriften des Aristoteles und

---

*) Ist eine oft genannte, doch nicht sicher zu stellende Persönlichkeit, und heisst auch bisweilen Amkidoros.

**) Wahrscheinlich eine Verwechslung mit der Eukleidischen Optik oder Katoptrik (de speculis).

schrieb überdies [unter Anderem]: Ein Buch über die Elemente.[5] Ueber die Geschichten der Philosophen; ich sah von diesem Werk das vierte Buch in syrischer Sprache.

Theophroditos ?[6]

Was von seinen Schriften vorhanden ist, habe ich gelesen in einer Abschrift des Jaḥjâ ben ʿAdî, nämlich den Commentar zu der Abhandlung des Aristoteles über die Höfe und Regenbogen (ein Theil der Meteorologie), übersetzt von T̠âbit ben Ḳurra.

Jaḥjâ, der Grammatiker (Johannes Philoponos).

Er schrieb [unter Anderem]: Das Buch, welches darüber handelt, dass jeder Körper begrenzt (endlich) sei, und dass also auch seine Kraft (Wirkung) eine begrenzte sei.

[Der Verfasser erwähnt nun eine weitere Reihe von Naturphilosophen, theilweise die blossen Namen, unter diesen befindet sich unter Andern]:

Theon,

der Platoniker. Er schrieb ein Buch über die Anordnung des Lesens der Platonischen Schriften und die Namen (Titel) dessen, was er verfasst hat.[7]

Al-Kindî.[8]

Abû Jûsuf Jaʿḳûb ben Isḥâḳ ben aṣ-Ṣabbâḥ ben ʿImrân ben Ismâʿîl ben Muḥammed ben al-Aschʿat̠ ben Ḳais al-Kindî ben Maʿdî Karib ben Muʿawwija ben Dschabala ben ʿAdî ben Rabîʿa ben Muʿawwija ben al-Ḥârit̠ ben Muʿawwija ben Kinda ben T̠aur ben Murattiʿ ben ʿAdî ben al-Ḥârit̠ ben Murra ben Udad ben Zaid ben al-Hamaisaʿ ben Zaid ben Kahlân ben Sabâ ben Jaschdschub ben Jaʿrub.*) — Er war der Vortrefflichste seiner Zeit und einzig dastehend in der Kenntniss der alten Wissenschaften insgesammt; er wurde der Philosoph der Araber genannt; seine Schriften handeln über die verschiedensten Wissenszweige, wie die Logik, die Philosophie, die Geometrie, das Rechnen, die Arithmetik, die Musik, die Astronomie und Anderes. Er war geizig. Wir haben ihn unter die Naturphilosophen eingereiht, weil wir ihn wegen seiner bevorzugten Stellung in der Wissenschaft so früh als möglich erwähnen wollten, wir werden aber auch seine sämmtlichen Schriften in den übrigen Disciplinen anführen.

---

*) Ich habe mich in dieser Genealogie genau an den von Flügel veröffentlichten Text des Fihrist gehalten, in der Abhandlung Flügels über Al-Kindî (Abhandlg. f. d. Kunde des Morgenlandes, Bd. 1, Heft 2) kommen einige Abweichungen vor.

[Unter den zuerst angeführten philosophischen Schriften befindet sich]: Die Abhandlung darüber, dass die Kenntniss der Philosophie nur durch die mathematischen Wissenschaften erreicht werden kann.

Die arithmetischen Schriften.*)

Fünf Bücher Einleitung in die Arithmetik. Vier Bücher über den Gebrauch der indischen Rechnungsweise. Ueber die Erklärung der Zahlen, die Platon in seinem Buch vom Staate erwähnt. Ueber die Zusammensetzung der Zahlen. Ueber die Einheit mit Rücksicht auf die Zahl. Ueber die Auffindung des Verborgenen und Geheimen. Ueber die Weissagung aus dem Vogelflug und das Fâlstechen[9] mit Rücksicht auf die Zahl. Ueber die Linien und das Multiplicieren mit der Zahl der Gerstenkörner (?). Ueber die hinzugefügte (in Verbindung gebrachte)[10] Quantität. Ueber die zeitlichen Verhältnisse (Proportionen).[11] Ueber die Zahlenkunststücke und die Kunst, sie zu ersinnen (zu ergründen).[12]

Schriften über die Kugel.

Abhandlung darüber, dass die Welt und Alles was darin ist (d. h. die Himmelskörper) Kugelgestalt hat. Ueber die Erklärung (Erläuterung) des Satzes, dass alle primitiven Substanzen (Elemente, Atome) und die letzten Körper (d. h. die zusammengesetzten, grossen Weltkörper) nur kugelförmig sind. Abhandlung darüber, dass die Kugel die grösste der körperlichen, der Kreis die grösste der ebenen Figuren sei. Abhandlung darüber, dass die Oberfläche des Meeres sphärisch sei. Ueber die ebene Darstellung der Kugel (Planisphaerium). Ueber die sphärischen Figuren. Ueber die Construction des Zenithes (Poles) auf einer Kugel. Ueber die Construction und den Gebrauch der Armillarsphäre mit sechs Ringen.

Schriften über die Musik.

Eine grössere Abhandlung über die Composition. Ueber das System der Töne, welche die natürlichen Eigenschaften der höheren Individuen darthun und die Uebereinstimmung (Harmonie) der Composition. Ueber den Rhythmus. Einleitung in die musikalische Kunst. Ueber die Geschichte der Kunst der Composition. Ueber die Kunst der Poesie. Ueber die Geschichte der Kunst der Musik.

Astronomische Schriften.

Abhandlung darüber, dass die Erscheinungen des Mondes nicht genau, sondern nur angenähert festgesetzt werden können.[13] Abhandlung über

---

*) Hier macht der Verfasser keinen Unterschied mehr zwischen Rechnen und Arithmetik wie oben.

die Fragen, welche an ihn (Al-Kindî) gerichtet wurden über den Zustand der Sterne. Abhandlung über die Beantwortung physikalischer (naturphilosophischer) Fragen über die Eigenschaften der Gestirne. Ueber die Projection der Strahlen.[14] Ueber die beiden Jahreszeiten. Abhandlung darüber, welche Sternbilder (des Thierkreises) und welche Sterne (Planeten) jeder einzelnen Gegend zukommen. Abhandlung über die Fragen, die an ihn gestellt wurden über die Verschiedenheit, die sich in den Gestaltungen der Horoskope zeigt. Abhandlung über das, was von den Lebensaltern der Menschen in den früheren Zeiten erzählt wird, und ihre Verschiedenheit in der Gegenwart. Ueber die Verbesserung der Construction der Horoskope, und die Auffindung des Regenten der Geburtsstunde und des Regenten der ganzen Lebensdauer.[15] Ueber die Verdeutlichung der Ursache der rückläufigen Bewegung der Planeten. Ueber die Strahlen.[16] Ueber die grössere Schnelligkeit der Bewegung, wie sie an den Gestirnen wahrgenommen wird, wenn sie am Horizonte sind, und die Verlangsamung derselben, wenn sie in die Höhe steigen. Ueber die Erklärung der Verschiedenheit, welche sich an den Himmelskörpern zeigt. Ueber den Unterschied zwischen dem Laufe und der Wirkung der Strahlen. Ueber die Ursachen der Stellungen der Gestirne (Aspecten?). Abhandlung über das, was in Abhängigkeit steht von den beiden Himmelskörpern, genannt „Glück und Unglück" (Saturn und Mars). Ueber die Ursachen der Kräfte, die den Regen anzeigenden Himmelskörpern zukommen. Ueber die Ursachen der Erscheinungen der Atmosphäre. Ueber die Ursache, warum es an einigen Orten fast nie regnet.*)

Geometrische Schriften.

Ueber die Zwecke des Eukleidischen Buches. Ueber die Verbesserung des Eukleidischen Werkes. Ueber die Verschiedenheit der Bilder (Optik). Abhandlung darüber, wie die Alten jeden einzelnen der fünf (regelmässigen) Körper auf die Elemente bezogen haben (auf je ein bestimmtes Element). Ueber die nähere Prüfung der Angaben des Archimedes über das Mass des Durchmessers des Kreises aus seinem Umfange.[17] Ueber die Construction der Figur der beiden mittleren Proportionalen.[18] Ueber die angenäherte Bestimmung[19] der Sehne (sollte wohl „Sehnen" heissen) des Kreises. Ueber die angenäherte Bestimmung der Sehne (Seite) des Neunecks. Ueber die Ausmessung eines Saales (Säulenhalle). Ueber die Theilung[20] der Drei- und Vierecke und Constructionen hiezu. Ueber die Art und Weise der Construction eines Kreises, der gleich ist der Oberfläche eines gegebenen

*) Flügel (al-Kindî, p. 24) führt aus andern Manuscripten noch fünf weitere Abhandlungen an.

Cylinders. Ueber die geometrische Darstellung des Auf- und Untergangs der Gestirne. Ueber die Theilung des Kreises: drei Abschnitte (Capitel).[21] Ueber die Verbesserung des 14. und 15. Buches des Eukleides. Ueber die geometrischen Beweise zu den astronomischen Berechnungen. Ueber die Verbesserung der Arbeit des Hypsikles über die Aufgänge der Gestirne. Ueber die Verschiedenheit der Spiegelbilder.*)[22] Ueber die geometrische Construction des Astrolabiums. Ueber die geometrische Construction der Mittagslinie und der Gebetsrichtung (n. Mekka). Ueber die geometrische Construction der Sonnenuhren. Ueber die geometrische Auffindung (Construction) der Stunden auf einer Halbkugel. Ueber die Anzeichen aus dem Vogelfluge. Ueber die Construction von Sonnenuhren, die auf Platten errichtet sind, die auf einer zum Horizont parallelen Ebene senkrecht stehen, und die besser sind als die andern.**)

Schriften über die Himmelssphären.

Ueber die Unmöglichkeit der Messung (Berechnung) der äussersten Sphäre, welche die übrigen in Bewegung setzt (oder regiert). Ueber die Erscheinungen an der Himmelssphäre. Abhandlung darüber, dass die Natur der Himmelssphäre von derjenigen der vier Elemente verschieden sei, und dass sie ein fünftes Element sei.[23] Ueber die äusserste Welt (Sphäre). Ueber die Anbetung des Schöpfers durch den entferntesten Körper. Ueber die Widerlegung der Manichäer in Betreff der zehn Sätze über die Grundlagen der Himmelssphäre. Ueber die Sternbilder.[24] Abhandlung darüber, dass es unmöglich sei, dass der Weltkörper (wohl das Weltall gemeint) unendlich sei. Ueber die verschiedenen Anblicke des Himmels. Ueber die Unmöglichkeit, dass der entfernteste Körper gekrümmt sei(?)[25] Ueber des Ptolemaios künstliche Darstellung von Sphären.[26] Ueber die Endlichkeit des Weltkörpers. Ueber die gegebenen Grössen. Ueber das Wesen der Himmelssphäre und der ihr eigenen blauen Farbe, welche wahrgenommen wird an der Oberfläche des Himmels. Ueber das Wesen des Körpers (Weltkörpers?), dem die Farben (oder Formen) der vier Elemente eigen sind. Ueber den Beweis der Bewegung des Körpers (wohl Weltkörpers, Himmelsgewölbes) und das Wesen des Lichtes und der Finsterniss.***)

[Auf die medicinischen folgen neun rein astrologische Schriften, die ich weglasse.]

---

*) Ist wohl eine irrthümliche Wiederholung des im Anfang genannten Werkes.

**) Auch hier führt Flügel (al-Kindî p. 26—27) noch vier weitere Abhandlungen aus andern Manuscripten an.

***) Flügel (al-Kindî, p. 27—28) gibt noch fünf weitere Schriften aus andern Manuscripten an.

Meteorologische Schriften.

Ueber die Erklärung der Ursache, die unmittelbar das Werden und Vergehen in den vergänglichen Wesen bewirkt. Ueber die Ursache, wesshalb man sagt, dass das Feuer, die Luft, das Wasser, die Erde die Elemente aller vergänglichen Wesen seien, und dass sie und andere von einem Zustand in den andern übergehen können. Ueber die Verschiedenheit der Zeitperioden, in denen sich die Kräfte der vier ersten Qualitäten (der vier Elemente?) zeigen (zur Geltung kommen). Ueber die zeitlichen Verhältnisse.[27] Ueber die Ursache der Verschiedenheit der Eigenthümlichkeiten des Jahres. Ueber das Wesen der Zeit, der Epochen und der Ewigkeit (ewiger Kreislauf der Zeiten, unendliche Zeit). Ueber die Ursache, wesshalb die obere Luftschicht kalt, die näher an der Erde befindliche warm ist. Ueber die Lufterscheinungen. Ueber die glänzende Erscheinung, welche sich in der Luft zeigt und Stern (bedeutet hier wohl Sternschnuppe oder Meteor) genannt wird. Ueber den Kometen.[28] Ueber den Stern, welcher für einige Tage erschien und beobachtet wurde bis er verschwand. Ueber die Ursache der Kälte, die man Alt-Weiberkälte nennt.[29] Ueber die Ursache des Entstehens des Nebels und der von ihm während seiner Dauer hervorgebrachten Erscheinungen. Ueber die Beobachtung des im Jahre 222 d. H. erfolgten grossen Phänomens (vielleicht Komet oder Meteor).

Schriften über die Entfernungen.

Ueber die Ausdehnung der einzelnen Klimata. Ueber die bewohnten Gegenden (Orte). Die grosse Abhandlung über das bewohnte Viertel der Erde. Ueber das was berichtet wird von den Entfernungen der Körper (Himmelskörper?). Ueber die Auffindung der Entfernung des Mondcentrums von der Erde. Ueber die Erfindung und Construction eines Instrumentes, mit dessen Hülfe die Entfernungen der Körper gefunden werden. Ueber die Construction eines Instrumentes, mit welchem die Entfernungen der für uns sichtbaren Körper bestimmt werden. Ueber die Bestimmung der Entfernungen (Höhen?) der Berggipfel.[30]

[In der Abtheilung, welche die Schriften enthält, die sich mit den Arten der Dinge beschäftigen, befinden sich noch folgende Erwähnenswerthe]: Die grosse Abhandlung über die Körper, die im Wasser tauchen. Ueber die beiden im (am) Wasser wahrzunehmenden Phänomene (Ebbe und Fluth?). Ueber Fluth und Ebbe.[31] Ueber die fallenden Körper.[32] Ueber die Construction der Brennspiegel. Ueber die Gluth (vielleicht Brennpunkt?) des Spiegels. Ueber die Entstehung der Dünste im Innern der Erde, welche viele Erdbeben und Einstürze[33] erzeugen. Beantwortung von 14 physikalischen Fragen, die einer seiner Freunde (Genossen) an ihn gestellt hatte.

Ueber die Ursache des Donners, des Blitzes, des Schnees, des Hagels, der Donnerschläge und des Regens. Ueber die Nichtigkeit der Behauptungen derjenigen, die sich anmassen, die Kunst des Gold- und Silbermachens zu verstehen und über ihre Betrügereien.

Aḥmed ben aṭ-Ṭajjib.[34]

Sein voller Name ist Abû'l-ʿAbbâs Aḥmed ben Muḥammed ben Merwân as-Sarachsî; er war ein Schüler von Al-Kindî und Lehrer und Vertrauter des Chalifen al-Muʿtaḍid. Er schrieb [unter Anderem]: Das grosse Buch der Nester und der Rechenkunst.[35] Das kleine Buch des Nestes der Künste[36] und des Rechnens. Einleitung in die Astrologie. Das grosse Buch über die Musik, in zwei Theilen; es gibt keines, das ihm an Vortrefflichkeit gleichkommt. Das kleine Buch über Musik. Das Buch der Arithmetik, über die Zahlen und über die Algebra.[37] Einleitung in die Musik.

Ibn Karnîb.[38]

Abû Aḥmed al-Ḥusain ben Abî'l-Ḥusain Isḥâḳ ben Ibrâhîm ben Jazîd, der Schreiber, bekannt unter dem Namen Ibn Karnîb, ein bedeutender Naturphilosoph — sein Bruder Abû'l-ʿAlâ war Geometer — er schrieb: Widerlegung des Abû'l-Ḥasan Ṯâbit ben Ḳurra, betreffend seine Negation der Nothwendigkeit der Existenz von Ruhepunkten zwischen je zwei entgegengesetzten Bewegungen.[39]

Abû Jaḥjâ al-Merwazî[40]

war ein in Geometrie bewanderter Arzt. [Es werden keine Schriften von ihm angeführt.]

Mattâ ben Jûnus.[41]

Abû Bischr Mattâ ben Jûnus, ein Grieche, Uebersetzer aus dem Syrischen ins Arabische und erster Logiker seiner Zeit. Er übersetzte [unter Anderem] auch den Commentar des Alexander (von Aphrodisias) zum Buche des Aristoteles „über den Himmel", verbessert von Abû Zakarijjâ Jaḥjâ ben ʿAdî.

Ibn Zurʿa.

Abû ʿAlî ʿÎsâ ben Isḥâḳ ben Zurʿa ben Marḳus ben Zurʿa ben Jûḥannâ, war jakobitischer Christ und berühmter Logiker, Philosoph und Uebersetzer; er wurde geboren zu Bagdad im Jahre 331 (943)[42] und schrieb [unter Anderem]: Einen Auszug aus dem Buche des Aristoteles über die bewohnte Erde. Ueber die Bedeutung (oder über die Ideen) eines Theils des dritten Buches der Schrift des Aristoteles „über den Himmel".

Ibn al-Chammâr.

Abû'l-Chair al-Ḥasan ben Sawwâr ben Bâbâ ben Bihrâm, Logiker, geboren im Jahre 331 (943),[43] schrieb [unter Anderem]: Ein Buch über die Erscheinungen der Atmosphäre, die aus dem Wasserdampf entstehen und welche sind: die Höfe, der Regenbogen und der Nebel. Aus dem Syrischen ins Arabische übersetzte er das Buch über die Meteorologie (wahrscheinlich des Aristoteles).

II. Unterabtheilung.

Sie enthält die Geschichten der Geometer, der Arithmetiker, der Musiker, der Rechner, der Astronomen, der Verfertiger von Instrumenten und der Mechaniker.

Eukleides.

Ein Geometer; er war der Sohn des Naukrates, des Sohnes des Bereneikes (?); er lehrte die Geometrie und trat auf diesem Gebiete als Autor auf früher als Archimedes und Andere, er gehörte zu den exacten Philosophen.

Ueber sein Buch „Von den Elementen der Geometrie". Sein Titel ist *στοιχεῖα*[44] und dies bedeutet: Elemente der Geometrie. Es wurde übersetzt von al-Ḥidschâdsch ben Jûsuf ben Maṭar zwei Mal: die eine Uebersetzung ist bekannt unter dem Namen der Hârûnischen und diese ist die erste, die andere trägt den Namen der Mâmûnischen, diese ist die zuverlässigere (wörtlich: man vertraut, man verlässt sich auf sie). Ferner übersetzte Isḥâḳ ben Ḥunain das Werk, verbessert wurde diese Uebersetzung von Ṯâbit ben Ḳurra al-Ḥarrânî; auch übersetzte Abû ʿUṯmân ad-Dimischḳî einige Bücher desselben — ich sah das zehnte in Mossul, in der Bibliothek des ʿAlî ben Aḥmed al-ʿImrânî, einer seiner Diener war Abû'ṣ-Ṣaḳr al-Ḳabîṣî, und dieser las ihm den Almagest*) vor zu unserer Zeit. — Dieses Buch (die Elemente nämlich) commentierte dann, indem er seine Schwierigkeiten zu lösen suchte, Heron. Ferner commentierte es an-Nairîzî, ebenso al-Karâbîsî, dessen später noch Erwähnung gethan wird. Einen Commentar zum ganzen Buche von Anfang bis zu Ende schrieb ferner al-Dschauharî — er wird noch erwähnt werden. — Ein weiterer Commentar zum fünften Buche existiert von al-Mâhânî;**) es berichtete mir ferner Naẓîf der Arzt, dass er das zehnte Buch des Eukleides griechisch gesehen habe, dasselbe hatte 40 Sätze mehr als das, welches in den Händen

---

*) Wird auch allgemein für Astronomie gebraucht.

**) Das Ms. 952. 2 (Suppl. arabe) in Paris enthält einen Commentar dieses Autors zum 10. Buche; vergl. Woepke, Essai d'une restitution, etc. in Mém. prés. par div. Sav. à l'acad. Tom. XIV. Paris, 1856. p. 669.

der Leute war und dieses hatte 109 Sätze, und dass er sich entschlossen habe, dasselbe ins Arabische zu übertragen. Es erzählt auch Johannes al-Ḳass (d. h. der Priester), dass er den Satz, welchen Ṯâbit im ersten Buche für sich in Anspruch nahm, in dem ihm gehörenden griechischen Exemplar gesehen habe; es bestätigte auch Naẓîf, dass er (Joh. al-Ḳass) es ihm gezeigt habe. Auch Abû Dschaʿfar al-Châzin al-Chorâsânî — er wird später noch erwähnt werden — verfasste einen Commentar zu dem Buche des Eukleides, ebenso Abû'l-Wafâ, aber er vollendete ihn nicht; dann commentierte das zehnte Buch ein Mann, Namens Ibn Rahiwaih al-Ardschânî, ferner das ganze Werk Abû'l-Ḳâsim al-Anṭâḳî,*) nachdem es übersetzt worden war;[45] auch war es commentiert worden von Sind ben ʿAlî — es sah Abû ʿAlî neun Bücher desselben und einen Theil des zehnten — das zehnte commentierte auch Abû Jûsuf ar-Râzî, und zwar vortrefflich im Auftrage von Ibn al-ʿAmîd. Al-Kindî in seiner Abhandlung „über die Zwecke des Eukleidischen Buches“ erwähnt, dass dieses Buch von einem Manne Namens Apollonios(?),[46] dem Zimmermann, verfasst worden sei, und dass er es in 15 Abschnitten entwarf; zu der Zeit nun, da das Buch schon veraltet und verbesserungsbedürftig geworden war, entschloss sich einer der Könige von Alexandria zum Studium der Geometrie; nun lebte zu seiner Zeit Eukleides und diesen beauftragte er mit der Umarbeitung des Buches und seiner Commentierung; dies that er und so wird es auf ihn (als Verfasser) zurückgeführt. Später fand Hypsikles, ein Schüler des Eukleides, noch zwei Bücher, das vierzehnte und fünfzehnte, und brachte sie dem König und dieselben wurden dem Buche noch hinzugefügt — und dies geschah alles in Alexandria. — Zu den Schriften des Eukleides gehören ferner: Das Buch der (himmlischen) Erscheinungen.[47] Das Buch von der Verschiedenheit der Bilder (Optik). Das Buch der gegebenen Grössen (Data). Das Buch der Töne, bekannt unter dem Namen der Musik: unächt. Das Buch der Theilung,[48] verbessert von Ṯâbit. Das Buch der Nutzanwendungen (Porismen):[49] unächt. Das Buch des Kanon.[50] Das Buch vom Schweren und Leichten.[51] Das Buch der Zusammensetzung (Synthesis): unächt. Das Buch der Auflösung (Analysis): unächt.[52]

Archimedes.

Es erzählte mir der (ein) Vertrauenswürdige, dass die Griechen von Büchern des Archimedes 15 Lasten verbrannt hätten; die ausführliche Darlegung dieser Geschichte würde zu lange dauern, wir geben daher nur seine noch vorhandenen Schriften an: Zwei Bücher über die Kugel und

*) d. h. von Antiochia.

den Cylinder. Ein Buch über die Quadratur des Kreises.[53] Ein Buch über die Siebentheilung des Kreises.[54] Ein Buch über die sich berührenden Kreise. Ein Buch über die Dreiecke.[55] Ueber die parallelen Linien.[56] Das Buch der angenommenen Grössen (Assumptorum) für die Elemente der Geometrie.[57] Ein Buch über das Vorausgesetzte (Gegebene, Bestimmte).[58] Ein Buch über die Eigenschaften der rechtwinkligen Dreiecke.[59] Ein Buch über die Wasseruhren, welche Schleudersteine werfen. (?)[60]

Hypsikles.

Ein Buch über die Körper (Himmelskörper?) und die Entfernungen.[61] Ein Buch über die Aufgänge, d. h. über den Auf- und Untergang (der Gestirne). Er verbesserte (oder stellte wieder her) das 14. und 15. Buch der Elemente des Eukleides.[62]

Apollonios.

Er ist der Verfasser des Buches der Kegelschnitte. Es erwähnen die Söhne Mûsâs im Anfang (Einleitung) des Buches der Kegelschnitte (wahrscheinlich Uebersetzung und Commentar des Apollonischen Werkes), dass Apollonios aus Alexandria (gebürtig) war, und dass sein Buch über die Kegelschnitte verdorben war, erstens, weil das Manuscript schwierig[63] war, daher auch seine Commentierung vernachlässigt wurde, und zweitens, weil die Erinnerung an das Buch verwischt und verschwunden war; so kam es, dass ganz verschieden lautende Exemplare sich in den Händen der Leute befanden, bis ein Mann aus Askalon mit Namen Eutokios auftrat, der sehr bewandert war in der Geometrie — die Söhne Mûsâs behaupten, dass dieser Mann vortreffliche Bücher über Geometrie verfasst habe, dass aber gar nichts von denselben bis auf uns gekommen sei —; nachdem dieser von dem Buche gesammelt hatte, was er im Stande war, brachte er wieder vier Bücher in Ordnung — die Söhne Mûsâs sagen, das Werk habe acht Bücher gehabt und es seien von ihm noch sieben und ein Theil des achten vorhanden, die vier ersten Bücher seien unter der Leitung Aḥmed ben Mûsâs übersetzt worden von Hilâl ben Abî Hilâl al Ḥimṣî (aus Emesa), und die drei letzten von T̠âbit ben Ḳurra al- Ḥarrânî, und was vom achten Buche noch gefunden wurde, seien vier Sätze —. Also ist von Apollonios vorhanden das Buch der Kegelschnitte in sieben Büchern und einem Theil des achten. Er verfasste ferner: Zwei Bücher über den Schnitt der Linien nach (gegebenem) Verhältniss.[64] Zwei Bücher über das bestimmte Verhältniss:[65] das erste Buch verbesserte T̠âbit, und das zweite, obgleich ins Arabische übersetzt, ist nicht zu verstehen. Ein Buch über den Schnitt der Flächen nach (gegebenem) Verhältniss.[66] Ueber die sich berührenden

Kreise.[67] Noch wird von Ṯâbit ben Ḳurra erwähnt, dass von Apollonios eine Abhandlung herrühre über den Satz, dass zwei Linien (Gerade), die von einer dritten unter weniger als zwei rechten Winkeln ausgehen, sich schneiden.[68]

Hermes.[69]

Wir haben ihn schon früher erwähnt. Von astrologischen Schriften verfasste er: Ueber die Breite, erster Schlüssel der Gestirne. Ueber die Länge, zweiter Schlüssel der Gestirne. Ueber den Umlauf der Gestirne (Planeten?). Ueber die Gradeintheilung des Umlaufes (Umwälzung, Umdrehung)[70] der Jahre der Geburten. Das Buch über das Verborgene, d. h. über die Geheimnisse der Gestirne, auch genannt „die goldene Ruthe“.

Eutokios.

Er verfasste: Einen Commentar zum ersten Buche des Archimedes über die Kugel und den Cylinder. Das Buch über die zwei Linien; er bewies dies Alles (d. h. den ganzen Inhalt des Buches) mit Aussprüchen (Sätzen) der mathematischen Philosophen;[71] es wurde ins Arabische übersetzt von Ṯâbit und man fand es vortrefflich. Einen Commentar zum ersten Buch des Ptolemaios über das Urtheil aus den Gestirnen (de judiciis astrorum).[72]

Menelaos.

Er lebte vor Ptolemaios, denn dieser erwähnt ihn im Almagest. Er verfasste: Das Buch über die sphärischen Sätze (Sphaerik). Ueber die Kenntniss der Grösse und Eintheilung (Unterscheidung) der verschiedenen[73] Körper (Himmelskörper?), verfasst im Auftrag des Kaisers Domitianus.[74] Drei Bücher über die Elemente der Geometrie, (neu-) bearbeitet von Ṯâbit ben Ḳurra. Das Buch über die Dreiecke: einiges Wenige davon wurde ins Arabische übersetzt.

Ptolemaios.

Er ist der Verfasser des Almagestes und lebte zur Zeit von Hadrian und Antonin; zu dieser Zeit beobachtete er die Gestirne und für den einen derselben schrieb er den Almagest. Er war auch der erste, welcher ein sphärisches Astrolabium und (andere) astronomische Instrumente verfertigte, und Messungen und Beobachtungen machte. Es wird aber auch gesagt, dass schon vor ihm viele Andere die Sterne beobachtet hätten, zu denen auch Hipparchos gehörte, und dass dieser sein Lehrer war, von dem er (die Beobachtung) lernte; aber die Beobachtung ist nicht vollkommen ohne das Instrument, und der Anfänger im Beobachten wird ein Künstler mit Hülfe des Instrumentes.

Ueber den Almagest: Dieses Werk hat 13 Bücher; der erste, der um seine Commentierung und Uebersetzung ins Arabische besorgt war, war Jahjâ ben Châlid ben Barmak; an dieser Commentierung nun arbeiteten für ihn eine Menge von Leuten, die es aber nicht geschickt ausführten, so dass er damit nicht zufrieden war und zu einer andern Commentierung den Abû Ḥussân*) und den Salm (oder Salam), den Verfasser des Bait al-Ḥikma,**) aufforderte, welche es geschickt in Ordnung brachten und Anstrengungen zu seiner Verbesserung machten, indem sie gute Uebersetzer kommen liessen; als sie deren Uebersetzung geprüft hatten, waren sie erstaunt über ihre Klarheit und Vollkommenheit (Richtigkeit).

Es wurde schon gesagt,***) dass auch al-Ḥidschâdsch ben Maṭar dieses Werk übersetzt hat, welche Uebersetzung von an-Nairîzî umgearbeitet (commentiert) wurde. Auch Ṯâbit verbesserte das ganze Werk nach der ältern Uebersetzung; ferner übersetzte es Isḥâḳ (ben Ḥunain), und Ṯâbit verbesserte auch diese Uebersetzung, welche aber nicht befriedrigend war, also ist seine erste Verbesserung ausgezeichneter. — Ausser diesem schrieb er noch: Das Quadripartitum, (gerichtet) an Syros, seinen Schüler; es übersetzte dieses Buch Ibrâhîm ben aṣ-Ṣalt und verbesserte es Ḥunain ben Isḥâḳ; Eutokios commentierte das erste Buch, ebenso das ganze erste Buch Ṯâbit und erklärte seinen Sinn; ebenso wurde es commentiert von ʿOmar ben al-Farruchân, Ibrâhîm ben aṣ-Ṣalt, an-Nairîzî und al-Battânî. Das Buch der Geburten.[75] Das Buch vom Krieg und Kampf. Ueber die Auffindung der Loose.[76] Ueber den Umlauf der Jahre der Welt. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Ueber die Krankheiten und die heilenden Getränke. Ueber den Lauf der sieben (Planeten?).[77] Ueber die Gefangenen und Eingekerkerten. Ueber das Ansichziehen und Dienstbarmachen des Glückes (der Glücksterne). Ueber die beiden Prozessgegner, welcher von ihnen Erfolg habe. Ueber die Personen des Adels (der Würde). Das Buch bekannt unter dem Namen des „Siebenten“(?).[78] Das Buch über das Loos, in Tafeln geordnet. Das Buch über die Beschreibung der Stellungen der Gestirne (Planeten). Das Buch, betitelt die Frucht,[79] commentiert von Aḥmed ben Jûsuf al-Miṣrî, dem Geometer. Die Geographie: über das bewohnte Land, eine Beschreibung der Erde; dieses Buch enthält acht Abschnitte, für (oder von?) al-Kindî wurde davon eine schlechte Uebersetzung gemacht, nachher übersetzte es auch Ṯâbit und zwar vortrefflich; es existiert auch in syrischer Sprache.[80]

---

*) Casiri (I. p. 350) hat Abû Ḥijân.

**) Haus der Weisheit (Wissenschaft): grosses, wissenschaftliches Sammelwerk.

***) p. 244 des Fihrist, wo von den Uebersetzern gesprochen wird.

Autolykos.

Er schrieb: Ueber die sich bewegende Sphäre, verbessert von al-Kindî.[81] Drei Bücher über den Auf- und Untergang (der Gestirne).

Simplikios, der Grieche.[82]

Er verfasste: Einen Commentar zum Anfang des Buches des Eukleides, welcher eine Einleitung in die Geometrie bildet.[83] Einen Commentar zum vierten Buch der Kategorien des Aristoteles.[84]

Dorotheos.[85]

Er schrieb: Ein grosses Buch, welches eine Anzahl von Abhandlungen enthält und das Buch der Fünfe (πεντάτευχος) genannt wird; es wurde aber noch mehr hinzugefügt, wie ich sogleich erwähnen werde. Die erste Abhandlung handelt über die Geburten, die zweite über die Verheirathung (Paarung) und über die Nachkommen,[86] die dritte über den Regenten der Geburtsstunde und denjenigen der Lebenszeit, die vierte über den Umlauf der Geburtsjahre, die fünfte über den Beginn der Handlungen, die sechste ..... (Lücke), die siebente über die Fragen und die Geburten; von ihm ist auch die 16. Abhandlung über den Umlauf der Geburtsjahre;*) diese Abhandlungen wurden von ʿOmar ben al-Farruchân aṭ-Ṭabarî commentiert.[87]

Theon von Alexandria.

Er schrieb: Ueber den Gebrauch der Armillarsphären. Das Buch über die astronomischen Tafeln des Ptolemaios, bekannt unter dem Namen Ḳânôn al-Masîr.[88] Ueber den Gebrauch des Astrolabiums. Einleitung in den Almagest, ist in einer ältern Uebersetzung vorhanden.[89]

Valens, der Grieche.[90]

Er verfasste: Einleitung in die Kunst der Astrologie. Ueber die Geburten. Das Buch der Fragen. Das Buch az-Zabradsch(?)**), commentiert von Buzurdschmihr.[b] Das grosse Buch der Fragen jeder Art. Das Buch der unumschränkten Herrschaft (oder des Kaisers). Ueber den Regen. Ueber den Umlauf der Jahre der Welt. Das Buch der Könige.

Theodosios.[91]

Er schrieb: Drei Bücher über die Kugeln (Sphärik). Ein Buch über die Wohnungen (bewohnte Orte der Erde). Zwei Bücher über Tag und Nacht.

---

*) Scheint eine Wiederholung der vierten zu sein.

**) Vergl. Abû Maʿschar, Anmerkung 188.

Pappos, der Grieche.[92]

Seine Schriften sind: Ein Commentar zum Buche des Ptolemaios über die ebene Darstellung der Kugel (Planisphaerium), übersetzt von Ṯâbit ins Arabische. Ein Commentar zum zehnten Buche des Eukleides, in zwei Theilen.[93]

Heron.

Er schrieb: Das Buch der Erklärung (Auflösung) der Undeutlichkeiten bei Eukleides.[94] Ueber den Gebrauch des Astrolabiums. Vom Aufziehen der Lasten (Gewichte).[95] Ueber die durch Luft bewegten Maschinen (wörtlich: über die Luftkräfte).[96]

Hipparchos .... (Lücke) az-Zafanî?[97]

Er verfasste: Das Buch über die Kunst der Algebra, bekannt unter dem Namen: Die Regeln (Definitionen). Es wurde ins Arabische übersetzt, dann verbessert von Abû'l-Wafâ Muḥammed ben Muḥammed al-Ḥâsib (d. h. dem Rechner), dieser commentierte es auch und versah es mit geometrischen Beweisen. Das Buch über die Theilung der Zahlen.

Diophantos.

War ein Grieche aus Alexandria; er schrieb: Ueber die Kunst der Algebra.

Thadinos?[98]

Er schrieb: Ueber die Sündfluthen (allgemeines Sterben). Ueber die Kometen.

Nikomachos von Gerasa.

Er verfasste: Zwei Bücher über Arithmetik. Das grosse Buch über die Musik, von diesem existieren Auszüge (Compendien).

Badrogogia?[99]

Er verfasste: Das Buch über die Heraufziehung(?) des Wassers (wörtlich der Wasser),*) in drei Abschnitten: der erste enthält 39, der zweite 36 und der dritte 30 Capitel.

Tinkalos (oder Tinklos)? der Babylonier.[100]

Dieser war einer der sieben Gelehrten, auf welche aḍ-Ḍiḥâk die sieben Häuser zurückführt, die nach den Namen der sieben Planeten (benannt) erbaut worden sind. Er schrieb: Ueber die Dekane und die Planetenbezirke.[101]

Tinkaros (oder Tinkros)? der Babylonier.[100]

Dieser gehörte (auch) zu den sieben Aufsehern beim Tempeldienst der Häuser, und ich halte ihn für den Vorsteher des Hauses des Mars,

---

*) Könnte auch heissen: über das Auffinden von Wasser.

als welcher er mir auch in einigen Schriften begegnet ist. Er schrieb: Das Buch der Geburten nach den Dekanen und Planetenbezirken.

Muritos (auch Muristos)?[102]

Er verfasste: Das Buch über die tönenden Instrumente, genannt die Trompete und die Flöte (Pfeife). Ueber das tönende Instrument, welches auf 60 Meilen weit gehört wird.

Sâʿâtos?[103]

Er schrieb: Ueber das schreiende (?) Glöckchen.

Herkal (Herakles?) der Zimmermann.[104]

Er schrieb: Ueber die Kreise und die Wasserräder.[105]

Kitwar? der Babylonier.[106]

Er gehörte zu den sieben Tempelwächtern und schrieb: Ein Buch über die Astrologie.

Aristoxenos.[107]

Er gehörte zu den Musikern und schrieb: Ein Buch über den Rhythmus. Ein Buch über die Harmonie.

Mazâbâ.

Ich habe in einer Schrift von Abû Maʿschar gelesen, dass dieser der Astrolog Nebukadnezars war; er verfasste nach den Angaben Abû Maʿschars — gesehen habe ich es nicht — das Buch der Könige, der Dynastien (Schicksalswechsel), der Conjunctionen und des Umlaufes (der Jahre).

Aristarchos.

War ein Grieche aus Alexandria; er verfasste das Buch über die Sonne und den Mond.[108]

Apion? der Patriarch.[109]

Ich setze ihn um weniges vor Beginn des Islams, oder um ganz wenig nach demselben. Er schrieb: Ueber den Gebrauch des Planisphaeriums.

Kankah (auch Katkah) der Indier.[110]

Er schrieb: Das Buch „an-Nimûdâr“ über die Lebenszeiten.[111] Ueber die Geheimnisse der Geburten. Das grosse Buch über die Conjunctionen. Das kleine Buch über die Conjunctionen.

Dschûdar, der Indier.

Er schrieb: Das Buch der Geburten, es wurde ins Arabische übersetzt.

Sandschahl (oder Sandschahal) der Indier.

Er schrieb: Ueber die Geheimnisse der Fragen.

Nahak, der Indier.

Er schrieb: Das grosse Buch der Geburten.[112]

Zu den indischen Gelehrten, von denen Schriften über Astrologie und Medicin (kann auch heissen Magie) auf uns gekommen sind, gehören noch: Bâkhur, Râhah (auch Râdschah), Ṣukah (auch Ṣufah), Dâhir, Ânkû (auch Ânkar), Zankal, Arîkal, Dschabhar, Andî, Dschabârî (auch Dschârî oder Dschâdî).[113]

Es folgt eine Reihe von neueren Geometern, Mechanikern, Arithmetikern und Anderen.

Die Söhne Mûsâs.

Muḥammed, Aḥmed und Ḥasan waren die Söhne Mûsâ ben Schâkirs und es ist die Abstammung Mûsâ ben Schâkirs .... (Lücke) ... Diese Leute gehörten zu denjenigen, welche es im Erforschen der Wissenschaften der Alten zu einem hohen Ziele brachten, sie opferten ihren Reichthum und ihr ganzes Sein diesem Zwecke; sie sandten diejenigen, die für sie die Herbeischaffung jener Werke besorgen mussten, nach den griechischen Ländern und liessen aus den verschiedensten Gegenden Uebersetzer um schweres Geld herkommen; so wurden sie als Wunder der Gelehrsamkeit angesehen. Sie verlegten sich hauptsächlich auf Geometrie, Mechanik und Musik, weniger auf Astrologie.[114] Muḥammed ben Mûsâ starb im ersten Rebîʿ des Jahres 259 d. H. (873). Aḥmed hatte einen Sohn, Namens Muṭahhar,[115] von geringer Bildung, er (wahrscheinlich Aḥmed) gehörte zu den Genossen al-Muʿtaḍids. Die Schriften der Söhne Mûsâs sind: Das Buch über die Waage.[116] Die Mechanik (eigentlich die Kraft) von Aḥmed ben Mûsâ. Ueber die länglich-runde Figur von Ḥasan ben Mûsâ.[117] Ein Buch über die Bewegung der ersten Sphäre von Muḥammed. Das Buch der Kegelschnitte.[118] Das Buch (der) Drei (?) von Muḥammed.[119] Von der geometrischen Figur, deren Eigenschaften Galenos erklärt hat, von Muḥammed.[120] Ueber den Theil, von Muḥammed.[121] Das Buch, in welchem auf erklärendem[122] (auch belehrend, oder auch zeichnend) und geometrischem Wege dargethan wird, dass ausserhalb der Fixsternsphäre keine neunte Sphäre existiert, von Aḥmed ben Mûsâ. Ueber die Priorität der Welt (vielleicht auch „Anfang“), von Muḥammed. Ueber die Frage, welche Aḥmed ben Mûsâ dem Sind ben ʿAlî vorlegte. Ein Buch über das Wesen der Rede (Rhetorik, Metaphysik),[123] von Muḥammed. Ueber die Fragen, um

welche es sich ebenfalls zwischen Sind und Aḥmed handelte. Das Buch über die Ausmessung der Kugel, die Dreitheilung des Winkels und die Auffindung einer Grösse (sollte heissen „zweier Grössen") zwischen zwei (gegebenen) Grössen, so dass sie stetig aufeinanderfolgen nach einem und demselben Verhältniss.[124]

Al-Mâhânî.[125]

Abû ʿAbdallâh Muḥammed ben ʿÎsâ gehörte zu den in Arithmetik und Geometrie Gelehrten und verfasste: Eine Abhandlung über die Throne (?) der Gestirne.[126] Ueber das Verhältniss. Ueber 26 Sätze des ersten Buches des Eukleides, welche keinen Widerspruch herausfordern (d. h. Axiome und Definitionen?).[127]

Al-ʿAbbâs.[128]

Ibn Saʿîd al-Dschauharî gehörte zu den (astronomischen) Beobachtern, doch widmete er sich hauptsächlich der Geometrie. Er schrieb: Einen Commentar zu dem Buche des Eukleides. Das Buch der Sätze, die er zum ersten Buche des Eukleides hinzugefügt hat.

Ṯâbit ben Ḳurra und seine Nachkommen.

Abû'l-Ḥasan Ṯâbit ben Ḳurra ben Merwân ben Ṯâbit ben Karâjâ ben Ibrâhîm ben Karâjâ ben Marînos ben Salamujos (?) wurde geboren im Jahre 211 und starb im Jahre 288 d. H. und wurde also 77 Sonnenjahre alt.[129] Er war Wechsler in Ḥarân, dann nahm ihn Muḥammed ben Mûsâ, als er aus den griechischen Ländern zurückgekehrt war, zum Genossen (Mitarbeiter und Freund) an, weil er ihn als sprachgewandt erkannt hatte; und es wird erzählt, dass er im Hause Muḥammed ben Mûsâs von diesem in den Wissenschaften unterrichtet wurde, und dass dieser, da er ihn hiefür würdig erfunden hatte, ihn in Freundschaft mit (dem Chalifen) al-Muʿtaḍid verband und in den Kreis der Astronomen einführte. Ṯâbit begründete die Herrschaft der Ṣabier in diesen Gegenden und in der Residenz der Chalifen, ihre Macht befestigte sich immer mehr, ihr Ansehen hob sich und sie ragten (an Tugend und Wissen) hervor. — Ṯâbit schrieb: Ueber die (Zeit-) Rechnung nach den Neumonden. Ueber das Sonnenjahr. Ueber die Auflösung der geometrischen Aufgaben (Fragen). Ueber die Zahlen.*) Ueber die Figur (Satz) al-Ḳaṭṭâʿ (d. h. die Schneidende, Sekante).[130] Ueber den dem Sokrates zugeschriebenen Beweis. Ueber die Aufhebung der Bewegung im Thierkreis.[c] Ueber die in der Blase entstehenden Steine. Ueber Gelenkschmerz (Gicht) und Podagra. Ueber die Ursache, welche das Salzigsein des Meerwassers bewirkt. Ueber den Aus-

---

*) Vergl. Cantor, Vorlesungen I. p. 631.

satz, welcher am Leibe sich zeigt. Eine Abhandlung an Dânik (auch Zânik). Ein Auszug aus dem Buche des Galenos „über die einfachen Heilmittel.“ Ueber die Blattern und Masern (?)[131] Zu seinen Schülern gehört:

ʿÎsâ.

Ibn Usajjid an-Nasrânî, wurde von Tâbit hochgestellt und gelobt. Er machte Uebersetzungen aus dem Syrischen ins Arabische unter Leitung von Tâbit und schrieb (ausserdem): Die Antworten Tâbits auf die Fragen ʿÎsâ ben Usajjids.*)

Sinân ben Tâbit.

Er starb als Muslim (Gläubiger: hier im Gegensatz zu Sabier). Man wird seiner Erwähnung unter den Medicinern wiederbegegnen;[132] ebenso wird dort erwähnt werden sein Sohn Abû'l-Hasan.[133]

Abû'l-Hasan al-Harrânî.

Man findet ihn ebenfalls unter den Medicinern erwähnt.[134]

Ibrâhîm ben Sinân ben Tâbit.

Sein Beiname war Abû Ishâk; er starb schon früh und war ein vortrefflicher, hervorragender Geometer, so dass zu seiner Zeit Keiner gefunden wurde, der ihn an Scharfsinn übertroffen hätte; er starb im Jahre .... (Lücke).[135] Er schrieb: Einen Commentar zum ersten Buche der Kegelschnitte, der aber nicht vollständig ist. Ueber die Zwecke des Almagestes.[136]

Abû'l-Husain ben Karnîb und Abû'l-ʿAlâ, sein Sohn.[137]

Beide wurden schon unter den Naturphilosophen erwähnt im Artikel über Abû Ahmed ben Abî'l-Husain. Abû'l-Husain und Abû'l-ʿAlâ gehörten zu den Mathematikern (Zeichnern?) und Geometern, der erstere verfasste die Schrift: Wie erkennt man, wie viel Stunden des Tages vorüber sind mit Hülfe der bestimmten Höhe (der Sonne).

Abû Muhammed al-Hasan.[138]

Ibn ʿUbaidallâh ben Sulaimân ben Wahb. Er schrieb: Einen Commentar in einem Buche zu den schwierigen Partien des Eukleidischen Buches über das Verhältniss.[139]

*) Sollte wohl unter den Personen eine Umstellung stattfinden

Eine andere Klasse und zwar die Neueren.*)

Al-Fazârî.[140]

Abû Isḥâḳ Ibrâhîm ben Ḥabîb al-Fazârî gehörte zu den Nachkommen Samara ben Dschindabs; er war der erste Muslim, welcher ein Astrolabium verfertigte, ebenso construierte er ein Mubaṭṭaḥ[141] und ein Planisphaerium. Er schrieb: Ein Gedicht über die Astronomie. Ueber das Messinstrument für den wahren Mittag. Astronomische Tabellen nach den Jahren der Araber. Ueber den Gebrauch des Astrolabiums und zwar desjenigen mit Ringen (Armillarsphäre). Ueber den Gebrauch des Planisphaeriums.

ʿOmar ben al-Farruchân.**)[142]

Abû Ḥafṣ ʿOmar ben Ḥafṣ ist der Commentator des Quadripartitum des Ptolemaios, es übersetzte es für ihn der Patriarch Abû Jaḥjâ ben al-Baṭrîḳ. Er verfasste ferner: Das Buch der Vortheile (Vorzüge).[143] Ueber die Uebereinstimmung und die Uneinigkeit der Philosophen in Bezug auf die Bahnen der Planeten.[144]

Sein Sohn Abû Bekr.

Muḥammed ben ʿOmar ben Ḥafṣ ben al-Farruchân aṭ-Ṭabarî war ein vortrefflicher Astronom. Er schrieb: Ueber den Gnomon (Zeiger der Sonnenuhr).[145] Ueber die Geburten. Ueber den Gebrauch des Astrolabiums. Das Buch der Fragen (astrolog.). Das Buch der Einleitung (in?)[146] Ueber die Tagewählerei.[147] Das kleine Buch der Fragen. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Ueber die directiones.[148] Ueber die Neigungen(?)[149] Ueber den Umlauf der Jahre der Welt. Das Buch der directiones bei den Geburten.

Mâ-schâ-allâh.***)[150]

Ibn Aṯarî. Sein eigentlicher Name ist Mîschâ, welches „er wird sich vermehren" bedeutet.[151] Er war ein Jude und lebte zur Zeit al-Manṣûrs bis auf die Tage al-Mâmûns. Er war unübertroffen zu seiner Zeit in der Astrologie und schrieb: Das grosse Buch über die Geburten, es enthält 14 Abschnitte. Das Buch der 21 (Abschnitte?) über die Conjunctionen, die Secten und Religionen.[152] Ueber die Projection der

---

*) d. h. die muslimitischen Mathematiker; die vorangehenden (von den Söhnen Mûsâs an) waren Ungläubige (Ṣabier, Christen etc.).

**) Nach Flügel (Z. D. M. G. 13. Bd. p. 630); Casiri und Andere schreiben Ferchân.

***) d. h. „Was Gott will."

Strahlen. Das Buch der Bedeutungen (significationes in der Astrologie des Mittelalters). Ueber die Zusammensetzung der Astrolabien und den Gebrauch derselben. Ueber die Armillarsphären. Ueber Regen und Winde. Ueber die beiden Loose (das günstige und ungünstige). Das Buch, bekannt unter dem Namen „das siebenundzwanzigste": der erste Abschnitt handelt über den Beginn der Handlungen, der zweite über die Zurückweisung (Zerstörung) der Ordnung (?),[153] der dritte über die Fragen, der vierte über die Zeugnisse der Gestirne, der fünfte über die Ereignisse (Erscheinungen),[154] der sechste über die Bahnen von Sonne und Mond und das, was sie beweisen (was sich dabei zeigt). Ueber die Buchstaben.[155] Ueber die Herrschaft (Herrscher, Sultan). Ueber die Reisen.[156] Ueber die Preise. Ueber die Geburten. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Ueber das Schicksal und den Glauben. Ueber das Urtheilen nach den Conjunctionen und Oppositionen. Ueber die Kranken. Ueber die Sternbilder und das Urtheilen nach ihnen.

Abû Sahl al-Faḍl ben Nûbacht.[157]

War seiner Abstammung nach ein Perser; ich habe die Genealogie der Familie Nûbacht in dem Abschnitt über die Theologen (Metaphysiker) schon erwähnt und gründlich durchgeführt. Er war (angestellt) in der Chalifenbibliothek unter Hârûn ar-Raschîd und übersetzte für diesen Werke aus dem Persischen ins Arabische; er vertraute in seiner Wissenschaft auf die Bücher der Perser. Er schrieb: Das Buch an-Nahmaṭân:*) über die Geburten. Ueber das astrologische Weissagen.[158] Das Buch der Geburten: einzig in seiner Art (oder auch „selten"). Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Das Buch der Einleitung (in?). Ueber die Vergleichung und die Allegorie (?).[159] Das Buch der Citate aus den Sentenzen der Astrologen über die Prophezeiungen, Fragen, Geburten und Anderes.[160]

Sahl ben Bischr.[161]

Abû ʿOṯmân Sahl ben Bischr ben Hânî, wurde als Jude Hâjâ genannt; er diente zuerst dem Ṭâhir ben al-Ḥusain al-Aʿwar, hierauf dem al-Ḥasan ben Sahl; er war ein scharfsinniger und vortrefflicher Mann und schrieb: Die Schlüssel der Urtheile, oder das kleine Fragenbuch. Ueber die beiden Loose. Das grosse Buch der Geburten. Ueber den Umlauf der Jahre der Welt. Das kleine Buch der Einleitung. Das grosse Buch der Einleitung. Das Buch der Astronomie und des Rechnens. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Das kleine Buch der Geburten. Das grosse Fragenbuch. Ueber die Tagewählerei. Ueber die Jahreszeiten (auch Zeitperioden). Ueber den

*) Sollte wohl heissen: an-Nimûdâr. Vergl. Anmerkung 111 zu Kankah.

Schlüssel.[162] Ueber Regen und Winde. Ueber die Bedeutungen. Ueber den Regenten der Geburtsstunde und denjenigen der Lebenszeit. Ueber die Erwägungen (oder das Relative?)[163] Ueber die Verfinsterungen. Das Buch der Synthesis. Er verfasste auch ein grosses Buch, welches 13 Abschnitte enthält und das Wesentliche aus seinen Schriften in sich vereinigt, er nannte es „das zehnte“;[164] er verfasste es in Chorâsân und es wurde mir gesagt, dass die Rumäer es sehr schätzen. Er schrieb auch ein Buch über Algebra, welches sie ebenfalls loben.

Al-Chuwârazmî (oder Chowârezmî).

Muhammed ben Mûsâ, gebürtig aus Chowârezm, arbeitete auf der Chalifenbibliothek unter Mâmûn und gehörte zu den Astronomen.[165] Vor und nach der Zeit, wo Beobachtungen gemacht wurden, pflegten die Leute sich zu verlassen auf seine zwei Tafeln, die unter dem Namen Sind-Hind bekannt sind. Er verfasste: Das Buch der astronomischen Tafeln, in zwei Ausgaben: die erste und die zweite. Ueber die Sonnenuhr. Ueber den Gebrauch des Astrolabiums. Ueber die Construction des Astrolabiums. Das Buch der Zeitrechnung (auch Chronik).[166]

Sind ben ʿAlî, der Jude.

Sein Beiname war Abû'ṭ-Tajjib, er war zuerst Jude und ging dann unter Mâmûn zum Islam über und wurde unter seine Astronomen aufgenommen; er ist derjenige, welcher den Tempel (Observatorium) baute, der hinter dem Thor asch-Schamâsijja in der Residenz Bagdad steht; er arbeitete mit den astronomischen Beobachtern, ja war sogar ihr Vorstand. Er schrieb: Ueber die Apotomeen und die Medialen.[167] Ueber die Schneidenden (Sekanten?), in zwei Ausgaben.[168] Ueber die indische Rechnungsweise. Ueber die Vermehrung und die Verminderung. Das Buch der Algebra.[169]

Jahjâ ben Abî Manṣûr.[170]

Es wurde seiner schon eingehend an einer andern Stelle Erwähnung gethan; er war einer der Beobachter unter Mâmûn und starb im Lande der Rumäer. Er schrieb: Das Buch der erprobten Tafeln, in zwei Ausgaben, eine erste und eine zweite. Ueber die Bestimmung der Höhe des Sechstels einer Stunde für die Breite von Bagdad. Ein Buch, welches seine Beobachtungen enthält und Abhandlungen über eine Menge anderer Beobachtungen.

Ḥabasch ben ʿAbdallâh.

Al-Merwazî, der Rechner, war ebenfalls einer der Beobachter und wurde über 100 Jahre alt. Er schrieb: Das Buch der damascenischen Tafeln. Das Buch der mâmûnischen Tafeln.[171] Ueber die Entfernungen

und die Körper (Himmelskörper?). Ueber die Construction des Astrolabiums. Ueber die Sonnenuhren und die Gnomone. Ueber die drei sich berührenden Kreise und die Art und Weise der Verbindungen (unter sich). Ueber die Construction der horizontalen, senkrechten, geneigten und schiefen (?) Flächen.[172]

Ibn Ḥabasch.[173]

Abû Dschaʿfar ben Aḥmed ben ʿAbdallâh ben Ḥabasch verfasste ein Buch über das Planisphaerium.*)

Al-Abaḥḥ.

Al-Ḥasan ben Ibrâhîm lebte unter al-Mâmûn und schrieb: Ueber die Tagewählerei, für al-Mâmûn. Ueber den Regen. Ueber die Geburten.

Die Erzählung des Ibn al-Muktafî.[174]

Er sagt: Ich habe in einem Buche von Ibn al-Dschahm folgendes gelesen: Sind ben ʿAlî hatte ein Buch „Einleitung" geschrieben und schenkte es dem Abû Maʿschar, da schrieb sich dieser das Buch selbst zu; nun hat aber Abû Maʿschar die Astronomie erst im vorgerückten Alter studiert und sein Verstand reichte nicht aus für die Abfassung dieses Buches, ebenso wenig wie für die neun Abhandlungen über die Geburten und das Buch über die Conjunctionen, welches an Ibn-al-Bâzjâr gerichtet ist, alle diese sind von Sind ben ʿAlî verfasst.

Al-Ḥasan ben Sahl ben Nûbacht.[175]

Er schrieb: Ueber den helischen Untergang der Mondstationen.[d]

Ibn-al-Bâzjâr.[176]

Muḥammed ben ʿAbdallâh ben ʿOmar ben al-Bâzjâr, ein Schüler von Ḥabasch ben ʿAbdallâh und ein vorzüglicher Astronom, schrieb: Ueber die Atmosphäre, in 19 Theilen (nach anderen Codices auch nur sieben). Das Buch der astronomischen Tafeln. Ueber die Conjunctionen und den Umlauf der Jahre der Welt. Ueber die Geburten und den Umlauf der Geburtsjahre.

Churzâḏ ben Dârschâd.[177]

Der Rechner, ein Diener des Juden Sahl ben Bischr, schrieb: Ueber die Geburten. Ueber die Tagewählerei.

---

*) Befindet sich im Ms. 952. 2 (Suppl. arabe) Paris; vergl. Woepke, Essai d'une restitution etc. in Mém. prés. par div. Sav. à l'acad. Tom. XIV. 1856. p. 668.

Die Söhne aṣ-Ṣabbâḥs.[178]

Muḥammed, Ibrâhîm und al-Ḥasan, alle drei waren scharfsinnige Astronomen, besonders auf dem Gebiete der beobachtenden Astronomie und Astrologie bewandert. Sie schrieben: Das Buch der Beweise zu den Operationen mit dem Astrolabium, es wurde verfasst von Muḥammed, dieser vollendete es aber nicht, sondern Ibrâhîm. Ueber das Verfahren zur Bestimmung des Mittags mittelst einer einzigen geometrischen Messung, von Muḥammed begonnen und von al-Ḥasan beendigt. Die Abhandlung Muḥammeds über die Construction der Sonnenuhren.

Al-Ḥasan ben al-Chaṣîb.[179]

Er war sehr geschickt in der Kunst der Astrologie und schrieb: Das Buch, betitelt al-Kârimihtar,[180] es enthält vier Abschnitte, nämlich: Einleitung in die Astrologie, über den Umlauf der Jahre der Welt, über die Geburten, über den Umlauf der Geburtsjahre.

Al-Chajjâṭ.

Abû ʿAlî Jaḥjâ ben Gâlib, er wird auch genannt Ismâʿîl ben Muḥammed, war ein Schüler von Mâ-schâ-allâh und ein vorzüglicher Astronom, er schrieb: Das Buch der Einleitung. Ueber die Fragen. Ueber die Bedeutungen. Ueber die Geschicke (oder die Dynastien). Ueber die Geburten. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Das Buch des Zerstreuten (oder der Blumenlese?),[181] welches er für Jaḥjâ ben Châlid verfasste. Das Buch der goldenen Ruthe. Ueber den Umlauf der Jahre der Welt. Das Buch von den Anekdoten (treffende, oder auch vieldeutige Antworten: vielleicht ist letztere Bedeutung die passendste).

ʿOmar ben Muḥammed al-Marwarûḏî.[182]

Er gehörte zu den Beobachtern und war ein vortrefflicher Gelehrter. Er schrieb: Ueber die Gleichung der Planeten. Ueber die Construction des Planisphaeriums.

Al-Ḥasan ben aṣ-Ṣabbâḥ.[183]

Er gehörte zu den Astronomen, beschäftigte sich aber auch mit Geometrie und schrieb: Das Buch der Lehrsätze (Figuren) und der Ausmessungen. Ueber die Kugel. Ueber den Gebrauch der Armillarsphäre.

Abû Maʿschar.[184]

Abû Maʿschar Dschaʿfar ben Muḥammed al-Balchî, gehörte anfänglich zu den Historikern und wohnte im westlichen Theil (von Bagdad), beim Thore Chorâsân. Er hasste den al-Kindî und stachelte das Volk gegen ihn auf und schmähte ihn wegen seiner Philosophie; da schickte al-Kindî heimlich solche Leute hinter ihn, welche ihm das Studium der Arithmetik

und Geometrie angenehm zu machen wussten, und in Folge dessen wandte er sich diesen Gebieten zu, beendete aber die Studien hierin nicht, sondern ging zur Astrologie über. Jetzt beim Einblick in diese Wissenschaft hörten die Bosheiten gegen al-Kindî auf, denn er gehörte nun zu derselben Gelehrtenklasse. Es wird erzählt, dass er mit dem Studium der Astronomie erst nach seinem 47. Lebensjahre begonnen habe; er war von scharfer, treffender Urtheilskraft. Einst liess ihn al-Mustaʿîn peitschen, weil er in einer Prophezeiung das Richtige getroffen hatte, da sprach er: ich habe die Wahrheit gesagt und bin doch gestraft worden. Abû Maʿschar starb, als er schon über 100 Jahre alt war, in Wâsiṭ, am Mittwoch, zwei Nächte vor Schluss des Ramadân, im Jahre 272 d. H. (886). Er schrieb: Das grosse Buch der Einleitung: acht Abschnitte. Das kleine Buch der Einleitung. Das Buch der Tafeln al-Hazârât mit über 60 Capiteln.[185] Das grosse Buch der Geburten, unvollendet, aus welchem vielfach Auszüge gemacht wurden. Ueber die äussere Erscheinung der Himmelssphäre und die Verschiedenheit ihres Aufganges: fünf Abschnitte. Ueber den Regenten der Lebenszeit. Ueber den Regenten der Geburtsstunde. Ueber die Conjunctionen, an Ibn al-Bâzjâr gerichtet. Das Buch über den Umlauf der Jahre der Welt, betitelt „die treffenden Antworten".[186] Ueber die Tagewählerei nach den Mondstationen. Das Buch der Tausende: acht Abschnitte.[187] Das grosse Buch der Temperamente: fünf Theile, nach der Eintheilung von Abû Maʿschar. Ueber die beiden Loose, die Lebenszeiten der Könige und die Regierungen (Dynastien). Das Buch Zâïrdschât,[188] und über die Grenzen und die Horizontalkreise.[189] Ueber die Conjunction der beiden Unglückssterne (Saturn und Mars) im Hause des Krebses. Ueber die Sternbilder und das Weissagen nach ihnen. Ueber die Sternbilder und die Grade[190] und das Weissagen nach ihnen. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre: acht Abschnitte. Das Buch über die Temperamente, das selten (kostbar) war, später aber häufiger vorkam (gefunden wurde)(?). Ueber die helischen Untergänge der Mondstationen. Eine Sammlung von Fragen. Ueber die Sicherheit (Wahrheit) des astrologischen Wissens. Ein Buch, dessen Zusammenstellung er begann, aber nicht vollendete, er wollte ihm den Namen geben „das Vollständige oder die Fragen". Das Buch der Sammlung, in welchem er die Aussprüche der Menschen über die Geburten zusammenstellte. Das Buch der Elemente, welches Abû'l-ʿAnbas für sich in Anspruch nahm. Ueber die Auslegung der Träume aus den Gestirnen. Ueber die Urtheile nach den Regenten der Geburtsstunde. Das kleine Buch der Geburten: 2 Theile mit 13 Abschnitten. Tafeln der Conjunctionen und der Abweichungen(?).[191] Ueber die Jahreszeiten. Ueber die Jahreszeiten, nach den 12 Zeichen des Thierkreises. Ueber die Loose,

und zwar über die Loose der Lebensmittel, der Kleider, des Riechbaren (der duftenden Dinge), der Wohlfeilheit und der Theuerung und des Weissagens nach ihnen. Ueber Regen und Winde und die Veränderungen der Atmosphäre. Ueber die Natur der Länder und die Entstehung der Winde. Ueber die Schiefe (Neigung) (?)[192] im Umlauf der Geburtsjahre. Abû Maʿschar pflegte (in wissenschaftlichen Dingen) der Autorität der Barmakiden ʿAbdallâh ben Jaḥjâ und Muḥammed ben al-Dschahm zu folgen, und doch übertraf er sie im Wissen.

ʿAbdallâh ben Masrûr an-Naṣrânî (d. h. der Christ).[193]

War der Diener von Abû Maʿschar und schrieb: Ueber die Projection der Strahlen. Ueber den Umlauf der Jahre der Welt und das Weissagen nach diesem. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre.

ʿUṭârid ben Muḥammed.[194]

Der Rechner und Astronom, war ein vortrefflicher und gelehrter Mann und schrieb: Ueber die indische Wahrsagekunst (aus Kameelmembranen) und ihre Erklärung. Ueber den Gebrauch des Astrolabiums. Ueber den Gebrauch der Armillarsphäre. Ueber die Zusammensetzung der himmlischen Sphären. Ueber die Brennspiegel.

Jaʿḳûb ben Ṭâriḳ.[195]

Er gehörte zu den ausgezeichneten Astronomen und schrieb: Ueber die Theilung des Sinus.[196] Ueber das, was sich vom halben Tagebogen in die Höhe erhebt. Das Buch der Tafeln, dem Sind-Hind entnommen, von Grad zu Grad, in zwei Theilen: der erste für die Sphärik, der zweite für die Wissenschaft der Zeitperioden (Chronologie?)[197]

Abû'l-ʿAnbas.[198]

Aṣ-Ṣaimarî, wurde schon früher als eifriger Astrolog erwähnt, er schrieb: Ueber die Geburten. Einleitung in die Astrologie.

Ibn Sîmawaih.[199]

Ein Jude, sein Name war..... Er schrieb: Einleitung in die Astrologie. Ueber den Regen.

ʿAlî ben Dâûd.*)[200]

Er war ein vortrefflicher Mann und hervorragender Astrolog und schrieb: Ueber den Regen.

---

*) Auch Dâwud = David.

Ibn al-Aʿrâbî.

Abû'l-Ḥasan ʿAlî ben al-Aʿrâbî aus Kûfa war ebenfalls ein trefflicher Mann und hervorragend in seiner Kunst (Astrologie), und bekannt unter dem Namen asch-Schaibânî, weil er zu den Nachkommen (zum Stamme) Schaibâns gehörte. Er schrieb: Das Buch der Fragen und der Tagewählerei.

Ḥâriṯ, der Astrolog.[201]

War eng befreundet mit al-Ḥasan ben Sahl und ein vorzüglicher Gelehrter, den auch Abû Maʿschar als Autorität anführt. Er schrieb: Das Buch der Tafeln.

Al-Miṣṣîṣî.*)

Abû'l-Ḥasan ʿAlî ben al-Miṣṣîṣî schrieb: Ueber die Conjunctionen.

Ibn Abî Ḳurra.[202]

Sein Beiname war Abû ʿAlî, er war der Astrolog von al-ʿAlawî, (des Fürsten) von Baṣrâ, er schrieb: Ueber die Ursache der Verfinsterung von Sonne und Mond, für al-Muwaffaḳ verfasst.

Ibn Samʿân.

Muḥammed ben ʿAbdallâh, Diener des Abû Maʿschar, schrieb: Einleitung in die Astrologie.

Al-Farġânî.[203]

Muḥammed ben Kaṯîr, war ein vorzüglicher Mann und hervorragender Astronom, er verfasste: Das Buch der Elemente[204], Auszug aus dem Almagest. Ueber die Construction der Sonnenuhren.[205]

Ibn Abî Râfiʿ.

Sein Beiname war Abû'l-Ḥasan, ein vorzüglicher Gelehrter, er schrieb: Ueber die Verschiedenheit des Aufgangs (der Gestirne).

Sein Sohn Abû Muḥammed.

ʿAbdallâh ben Abî'l-Ḥasan ben Abî Râfiʿ, verfasste: Eine Abhandlung über die Geometrie.

Ibn Abî ʿAbbâd (oder ʿUbbâd).[206]

Muḥammed ben ʿÎsâ, mit dem Beinamen Abû'l-Ḥasan, nur unter diesem Namen bekannt, er schrieb: Ueber den Gebrauch des Astrolabiums mit den zwei Ringen[207] und anderer.

---

*) Sollte nach dem folgenden vollen Namen wohl Ibn al-Miṣṣîṣî heissen, oder dann ist das folgende ben überflüssig. Flügel macht hiezu keine Bemerkung.

An-Nairîzî.[208]

Abû'l-ʿAbbâs al-Faḍl ben Ḥâtim an-Nairîzî, gehörte zu denen, auf deren Autorität man sich gerne bezog in der Astronomie, namentlich in der beobachtenden. Er schrieb: Das grosse Buch der Tafeln. Das kleine Buch der Tafeln. Ueber die Gebetsrichtung (nach Mekka).*) Einen Commentar zum Quadripartitum des Ptolemaios.[209] Ueber die atmosphärischen Erscheinungen, für al-Muʿtaḍid verfasst. Das Buch der Beweise und der Herstellung von Instrumenten, mit welchen entfernte Gegenstände deutlich gemacht werden.

Al-Battânî.[210]

Abû ʿAbdallâh Muḥammed ben Dschâbir ben Sinân ar-Raḳḳî, stammte aus Ḥarrân und war (ursprünglich) Ṣabier. Der Anfang seiner astronomischen Beobachtungen fiel nach Dschaʿfar ben al-Muktafî, der ihn hierüber selbst befragt hatte, ins Jahr 264 und sie dauerten bis zum Jahre 306. Er gab in seinen Tafeln die Oerter der Fixsterne für das Jahr 299 an. Er kam mit den Söhnen az-Zajjâts aus Raḳḳa nach Bagdad wegen der Unterdrückungen, die ihnen dort zu Theil wurden, und starb auf der Rückkehr auf der Feste al-Dschaṣṣ im Jahre 317. Er schrieb: Das Buch der Tafeln, in zwei Ausgaben, die zweite ist ausgezeichneter als die erste. Ueber die Kenntniss der Aufgänge der Häuser nach den vier Quadranten des Thierkreises, auch bekannt als seine Abhandlung über die Verificierung der Wirkungen der Conjunctionen, die er für Abû'l-Ḥasan ben al-Farât verfasste.[211]

Ibn Amâdschûr.[212]

Abû'l-Ḳâsim ʿAbdallâh ben Amâdschûr war ein Nachkomme der Pharaonen und ein vorzüglicher Gelehrter. Er schrieb: Das Buch des Fragens?[213] Das Buch der Tafeln, bekannt unter dem Namen „die Reinen“ (Besten, Fehlerfreien). Das Buch, genannt der Reiseproviant. Das Buch der Tafeln, bekannt unter dem Namen „die Gegürteten“. Das Buch der Tafeln, genannt „die Wundervollen“. Das Buch der Tafeln des Sind-Hind. Das Buch der Tafeln der Zeitläufe. (?)[214]

Sein Sohn Abû'l-Ḥasan ʿAlî ben Abî'l-Ḳâsim[215] schrieb . . . . . (Lücke).

Al-Harûnî (auch al-Harawî).[216]

Jûsuf ben . . . . . schrieb: Ueber astrologische Betrügerei (Heuchelei), in circa 300 Blättern.[217]

---

*) Befindet sich in dem Ms. 952. 2 (Suppl. arabe) in Paris, vergl. Woepke, Essai d'une restitution, etc. in Mém. prés. à l'acad. par div. Sav. Tom XIV. Paris, 1856. p. 666.

Abû Zakarijjâ.

Dschannûn (auch Dschanûb) ben ʿAmr ben Jûḥannâ ben aṣ-Ṣalt schrieb: Das Buch des Beweises der Richtigkeit (Sicherheit) der Sterne (Astrologie) und der mit Hülfe derselben gemachten Prophezeiungen.

Aṣ-Ṣaidanânî.

ʿAbdallâh ben al-Ḥasan, der Rechner und Astronom, schrieb: Einen Commentar zur Algebra des Muḥammed ben Mûsâ al-Chowârezmî.[218] Einen Commentar zu seinem Buche über die Vermehrung und die Verminderung.[218] Ueber die verschiedenen Arten des Multiplicierens und Dividierens.

Ad-Dandânî (And. Ar-Randânî).

ʿAbdallâh ben ʿAlî an Naṣrânî, mit dem Beinamen Abû ʿAlî, schrieb: Das Buch der Sterndeutungskunst, dasselbe war schon alt, als ich es sah.

Eine andere Classe von neueren Astronomen und Geometern, deren Wohnorte (Heimath) unbekannt sind.

Al-Adamî.[219]

Abû ʿAlî al-Ḥusain ben Muḥammed schrieb: Ueber al-Harâfât[220] und die Fäden (am Astrolabium)?[221] und die Verfertigung der Uhren.

Al-Ḥajjânî (And. al-Dschanâbî, oder al-Ḥanâî).

Sein Beiname war Abû'l-Faḍl, und sein Name ...... er schrieb: Das Buch der geometrischen Tafeln.

Ibn Bâġân (And. Ibn Nâġâr).

Al-ʿAbbâs ben Bâġân ben ar-Rabîʿ, mit dem Beinamen Abû Rabîʿ, war Astronom und schrieb: Das Buch der Eintheilung der bewohnten Gegenden der Erde und der äussern Erscheinung (Form) der Welt.

Ibn Nâdschija (And. Nâḥija und Nâdschîm).[222]

Muḥammed ben ......, der Schreiber, verfasste ein Buch über die Feldmessung.

Abû ʿAbdallâh.

Muḥammed ben al-Ḥasan ben Achî Hischâm asch-Schaṭawî; er schrieb: Ueber die Construction der geneigten Sonnenuhr. Ueber die Construction der trommelförmigen Sonnenuhr[223], über die Verfertigung von Schleudermaschinen[224] und über die Bestimmung der Höhen und der Azimuthe.

Die neueren Rechner und Arithmetiker.[225]

ʿAbdalḥamîd.

Abû'l-Faḍl ʿAbdalḥamîd ben Wâsiʿ ben Turk al-Chuttalî (auch Dschabalî), der Rechner, — als sein Beiname wird auch Abû Muḥammed genannt — schrieb: Das Ganze der Rechenkunst in sechs Büchern. Das Buch über den Geschäftsverkehr (polit. Arithmetik).[226]

Abû Barza.

Al-Faḍl ben Muḥammed ben ʿAbdalḥamîd ben Turk ben Wâsiʿ[227] al-Chuttalî, schrieb: Das Buch über den Geschäftsverkehr. Das Buch über die Feldmessung.

Abû Kâmil.[228]

Abû Kâmil Schudschâʿ ben Aslam ben Muḥammed ben Schudschâʿ, der Rechner, aus Aegypten, war ein trefflicher und gelehrter Arithmetiker und schrieb: Das Buch des Glückes.[e] Das Buch des Schlüssels des Glückes.[e] Das Buch über die Algebra.[229] Das Buch des Ausgepressten (vielleicht Auszug?). Das Buch der Vorbedeutungen (aus dem Vogelflug). Ueber die Vermehrung und die Verminderung. Das Buch der beiden Fehler.[230] Das Buch der Feldmessung und der Geometrie. Das Buch des Genügenden.[231]

Sinân ben al-Fatḥ.[232]

Er war aus Ḥarrân gebürtig, ein hervorragender Rechner und Arithmetiker, und schrieb: Das Buch at-Taḥt, in der (über die) indischen Rechnungsweise.[233] Ueber die Vermehrung und die Verminderung. Einen Commentar zum Buche „über die Vermehrung und die Verminderung" (wahrscheinl. eines andern Autors). Ueber die Erbtheilungen. Ueber die Kubenrechnung (Kubikwurzelausziehung?).[234] Einen Commentar zur Algebra des Chowârezmî.

Abû Jûsuf al-Miṣṣîṣî.[235]

Jaʿḳûb ben Muḥammed, der Rechner, schrieb: Eine Algebra. Ueber die Erbtheilungen. Ueber die Verdoppelungen der Häuser (Felder) des Schachspiels. Das Universalbuch. Ueber das Verhältniss der Jahre. Das allumfassende Buch. Das Buch der beiden Fehler. Ueber die Testamentsrechnung.[236]

Ar-Râzî.[237]

Jaʿḳûb ben Muḥammed, mit dem Beinamen Abû Jûsuf, schrieb: Das Buch über das gesammte Rechnen. Das Buch at-Taḥt. Ueber die Rechnung mit den beiden Fehlern. Das Buch der dreissig seltenen (ungewöhnlichen, fremdartigen) Fragen (Probleme).

Muḥammed.[238]

Ibn Jaḥjâ ben Akṯam, der Richter, schrieb: Ueber Zahlenprobleme.

Al-Karâbîsî.[239]

Aḥmed ben ʿOmar gehörte zu den vorzüglichsten Geometern und Arithmetikern und schrieb: Einen Commentar zum Eukleides. Ueber die Testamentsrechnung. Ueber die Erbtheilungen. Ueber das Planisphaerium.[240] Das Buch des Indischen (Rechnens?).

Aḥmed ben Muḥammed.

Der Rechner — über seine Lebensverhältnisse ist nichts weiteres bekannt — schrieb: Das Buch an Muḥammed ben Mûsâ über das Erreichen (Vortheil?).[241] Eine Einleitung in die Astrologie. Ueber die Vermehrung und die Verminderung.

Al-Makkî.

Dschaʿfar ben ʿAlî ben Muḥammed al-Makkî, der Geometer, schrieb: Das Buch über die Geometrie. Abhandlung über den Kubus (die Kubikzahl).[242]

Al-Iṣṭachrî.[243]

Der Rechner, sein Name ..... schrieb: Das Buch über das gesammte Rechnen. Einen Commentar zur Algebra des Abû Kâmil.

Ein Mann, bekannt unter dem Namen Muḥammed ben Lurra (And. Ludda) der Rechner, aus Iṣfahân (Ispahan) schrieb: Ein Buch über das gesammte Rechnen.

Die neueren Geometer, Arithmetiker und Astronomen, deren Lebens- oder Sterbezeit nicht weit entfernt ist (d. h. von derjenigen des Verfassers des Fihrist, also kurz die Zeitgenossen).

Jûḥannâ al-Ḳass.

Jûḥannâ ben Jûsuf ben al-Ḥâriṯ ben al-Baṭrîḳ al-Ḳass (d. h. der Priester) gehörte zu denen, welche Vorlesungen hielten über die Elemente des Eukleides und andere geometrische Bücher; er machte auch Uebersetzungen aus dem Griechischen und war ein vorzüglicher Gelehrter, er starb im Jahr[244] ..... er schrieb: Einen Auszug aus (in) zwei Tafeln für Geometrie. Eine Abhandlung über den Beweis, dass, wenn eine gerade Linie zwei andere in einer Ebene gelegene Gerade schneidet, die beiden innern Winkel, welche auf der einen Seite liegen, weniger als zwei Rechte sind.

Ibn Rauḥ, der Ṣabier.[245]

Abû Dscha'far al-Châzin (d. h. der Schatzmeister oder Bibliothekar).[246]

Sein Name ..... Er schrieb: Ueber die Scheiben (des Astrolabiums).[247] Ueber die Zahlenprobleme.

'Alî ben Aḥmed al-'Imrânî.[248]

War aus Moṣul gebürtig und ein vorzüglicher Büchersammler, es kamen zu ihm Leute aus den entferntesten Gegenden, um seine Vorlesungen zu hören, er starb im Jahre 344 (955). Er verfasste einen Commentar zur Algebra des Abû Kâmil.[249]

Abû'l-Wafâ.

Muḥammed ben Muḥammed ben Jaḥjâ ben Ismâ'îl ben al-'Abbâs, wurde geboren zu Bûzdschân im Gebiete von Nîsâbûr im Jahre 328 (940), Mittwochs am Neumond des Monats Ramaḍân (10. Juni). Er erhielt Unterricht von seinem Oheim (väterl. Seits) Abû 'Amr al-Muġâzilî und seinem Oheim (mütterl. Seits) Abû 'Abdallâh Muḥammed ben 'Ambasa — Abû 'Amr selbst studierte die Geometrie unter Abû Jaḥjâ al-Mâwardî*) und Abû'l-'Alâ ben Karnîb.[250] — Abû'l-Wafâ wanderte im Jahre 348 (959) nach 'Irâḳ aus. Er schrieb: Das Buch über das, was die Geschäftsleute und die Schreiber (Secretäre) von der Rechenkunst gebrauchen; es enthält sieben Abschnitte, jeder mit sieben Capiteln: Der erste Abschnitt handelt über das Verhältniss, der zweite über Multiplication und Division, der dritte über die Operationen des Messens (der Flächen- und Körperberechnung), der vierte über die Steuerverhältnisse, der fünfte über die Theilungsgeschäfte, der sechste über die Wechselgeschäfte, der siebente über den Geschäftsverkehr der Kaufleute.[251] Einen Commentar zur Algebra des Chowârezmî. Einen Commentar zur Algebra des Diophantos. Einen Commentar zur Algebra des Hipparchos.[252] Ein Buch Einleitung in die Arithmetik. Das Buch über das was gelernt werden muss vor (dem Studium des Buches) der Arithmetik. Das Buch der Beweise zu den Sätzen, welche Diophantos in seinem Buche aufstellt (eig. gebraucht), und zu dem, was er (Abû'l-Wafâ) in seinem Commentar aufstellt. Eine Abhandlung über die Auffindung der Seite des Würfels, des Quadrates des Quadrates[253] und dessen was aus beiden zusammengesetzt ist. Ein Buch über die Kenntniss des Kreises aus der Sphäre.[254] Das vollständige (umfassende) Buch, es enthält drei Abschnitte: der erste handelt über die Dinge, die gelernt werden müssen vor der Bewegung der Himmelskörper (Gestirne); der zweite über die Bewegung der Himmelskörper; der dritte über das was sich bei der

---

*) Sollte vielleicht heissen Abû Jaḥjâ al-Merwazî s. p. 15.

Bewegung der Himmelskörper zeigt (ereignet, daraus resultiert). Das Buch der genauen (klaren, zweifellosen) Tafeln, in drei Abschnitten: der erste handelt über die Dinge, die gelernt werden müssen vor der Bewegung der Himmelskörper; der zweite über die Bewegung der Himmelskörper; der dritte über das was sich bei der Bewegung der Himmelskörper zeigt.[255] — Sein Oheim Abû Saʿîd schrieb ein aus ungefähr 600 Blättern bestehendes Buch über das Eindringen in die Wissenschaften (Erkenntnisse) für Schüler.

Al-Kûhî.[256]

Abû Sahl Wîdschan ben Rustam (oder Rustum) aus Kûh, d. h. den Bergen von Tabaristân gebürtig, schrieb: Das Buch über die Mittelpunkte der Kugeln[257], das er aber nicht vollendete. Das Buch der Elemente, nach demjenigen des Eukleides, und den aus ihm gemachten Auszügen.[258] Zwei Bücher über den vollkommenen Zirkel.[259] Zwei Bücher über die Construction (Kunst) des Astrolabiums mit Beweisen. Ueber die Auffindung der Punkte auf den Linien. (?)[260] Das Buch an die Logiker über die Aufeinanderfolge der beiden Bewegungen: zur Vertheidigung T̠âbit ben Ḳurras.[261] Ueber die Mittelpunkte der Kreise auf den Linien (gegebenen?) nach der Methode der Analysis ohne Synthesis.[262] Das Buch der Zusätze zum zweiten Buche des Archimedes (über die Kugel und den Cylinder?).[263] Abhandlung über die Auffindung der Siebeneckseite im Kreise.[264]

Ġulâm Zuḥal.[265]

Abû'l-Ḳâsim ʿAbdallâh ben al-Ḥasan, aus ...... Er schrieb: Ein Buch über die Profectiones oder Directiones.[266] Ein Buch über die Strahlen.[267] Ueber die Wahrsagung aus den Gestirnen. Ein grosses Buch über die Directiones und die Strahlen. Das Buch der grossen Zusammenstellung (oder das grosse, allumfassende Buch). Das Buch der erprobten[268] Elemente. Ueber die Tagewählerei. Ueber die Trennungen (Zertheilungen). (?)

Aṣ-Ṣûfî.

Abû'l-Ḥusain ʿAbdarraḥmân ben ʿOmar, gehörte zu den vortrefflichsten Astronomen; er war Diener des ʿAḍudaddaula[269] und lebte in Schâd̠ikûh (?), sein Geburtsort war ..... er starb im Jahr[270] ..... Er schrieb: Ueber die Gestirne, mit Figuren.

Al-Anṭâkî

mit dem Ehrennamen al-Mudschtabâ (der Auserwählte). Sein Name war[271] .... Er starb kurz vor Beginn des Jahres 376 (986—87).[272] Er schrieb: Das grosse Buch at-Taḥt über die indische Rechnungsweise.[273] Ueber das Rechnen nach (der Methode) at-Taḥt ohne Ausstreichen (der Ziffern). Einen Commentar zu

der Arithmetik (wessen?).[274] Ueber die Auffindung der Uebersetzer. (?)[275] Einen Commentar zum Eukleides. Ueber die Kuben.[276]

Al-Kalwadânî.[277]

Abû Naṣr Muḥammed ben ʿAbdallâh al-Kalwadânî gehört zu den vortrefflichsten Rechnern und lebt zu unserer Zeit (d. h. gegenwärtig noch).[278] Er schrieb: Das Buch at-Taḥt über die indische Rechnungsweise.

Al-Ḳaṣrânî,

sein Name war .....[279]

Abhandlung über die Instrumente (astronomische) und ihre Verfertiger.

Es waren die Astrolabien in der frühern Zeit eben (Planisphärien) und der Erste, der solche verfertigte, war Ptolemaios; es wird aber auch gesagt, dass vor ihm schon solche gemacht worden seien, aber dies lässt sich nicht mit Sicherheit behaupten; als der erste Verfertiger ebener Astrolabien (in neuerer Zeit) wird genannt Apion (?) der Patriarch. Diese Instrumente wurden (zuerst nur) in der Stadt Ḥarrân gemacht, später wurden sie (d. h. ihre Verfertigung) weiter verbreitet und mehr bekannt; jedoch vermehrten sie sich und erweiterte sich für die Künstler die Arbeit (erst recht) unter der Herrschaft der Abbasiden von den Tagen al-Mâmûns an bis auf unsere Zeit; denn als al-Mâmûn die Beobachtung zu unterstützen sich vornahm, wandte er sich an Ibn Chalaf al-Marwarûdî und dieser verfertigte für ihn die Armillarsphäre, und solche befinden sich nun im Besitze von einigen Gelehrten unseres Landes; auch hatte Marwarûdî früher schon Astrolabien construiert.

Die Namen der Künstler.

Ibn Chalaf al-Marwarûdî; al-Fazârî, dessen schon Erwähnung gethan wurde;[280] ʿAlî ben ʿÎsâ, Schüler*) von al-Marwarûdî;[281] Chafîf, Schüler von ʿAlî ben ʿÎsâ, ein geschickter und vortrefflicher Mann; Aḥmed ben Chalaf, Schüler von ʿAlî ben ʿÎsâ; Muḥammed ben Chalaf, ebenfalls Schüler von ʿAlî; Aḥmed ben Isḥâḳ al-Ḥarrânî; ar-Rabîʿ ben Farrâs al-Ḥarrânî; Ḳaṭasṭûlus (?)[282], Schüler von Chafîf; ʿAlî ben Aḥmed, der Geometer, Schüler von Chafîf; Muḥammed ben Schaddâd al-Baladî; ʿAlî ben Ṣurad al-Ḥarrânî; Schudschâʿ ben .... war mit Saif ad-Daula Schüler von Batûlus (?);[283] Ibn Salâm, Schüler von Batûlus; al-ʿAdschlâ, der Astrolabien-Verfertiger, Schüler von Ba-

---

*) Eigentlich Diener, hier wohl Lehrjunge, ich gebe es überall durch „Schüler“ wieder.

tûlus; al-ʿAdschlajja, seine Tochter, mit Saif ad-Daula Schülerin von Batûlus.

Zu den Schülern Aḥmeds und Muḥammeds, den Söhnen Chalafs gehörten:

Dschâbir ben Sinân al-Ḥarrânî;[284] Dschâbir ben Ḳurra al-Ḥarrânî;[285] Sinân ben Dschâbir al-Ḥarrânî;[285] Farrâs ben al-Ḥasan al-Ḥarrânî; Abû'r-Rabîʿ Ḥâmid ben ʿAlî, Schüler von ʿAlî ben Aḥmed, dem Geometer.

Zu den Schülern Ḥâmid ben ʿAlîs gehörten:

Ibn Nadschijja, sein Name war . . . . ; al-Bûḳî, sein Name war al-Ḥusain, statt seiner wird auch ʿAbdaṣṣamad genannt.

Zu den (unmittelbar) vorangehenden*) Instrumentenkünstlern gehören:

ʿAlî ben Jaʿḳûb ar-Raṣṣâṣ; ʿAlî ben Saʿîd, der Eukleidier; Aḥmed ben ʿAlî ben ʿÎsâ, aus der jüngsten Zeit.

Ḳurra ben Ḳamîṭâ al-Ḥarrânî.[286]

Dieser verfertigte einen Globus (wörtlich eine Darstellung der Welt), welchen T̲âbit ben Ḳurra für sich in Anspruch nahm; ich habe diesen Globus gesehen, aus rohem (ungebleichtem) Stoff aus Dabîḳ verfertigt, mit Farben (bemalt), doch waren dieselben schon verwischt.

Die Titel der Bücher, die über die Mechanik (eig. Bewegungen) geschrieben worden sind.

Ueber die Einrichtung des Instrumentes von Archimedes, mit welchem die Schleudersteine geworfen wurden.[287] Ueber die Kreise (runde Scheiben?) und die Wasserräder von Herḳal, dem Zimmermann.[288] Ueber die Dinge, die sich von selbst bewegen, von Heron.[289] Ueber die trompetenartige Pfeife. Ueber die blähende(?) Pfeife. Ueber die Wasserräder, von Mûritos.[290] Ueber die Orgel. Das Buch der Mechanik von den Söhnen Mûsâs, den Astronomen (wörtlich des Astronomen), es enthält eine grosse Zahl von mechanischen Kräften (wörtlich Bewegungen).[291]

[Der am Ende dieses Abschnittes stehende Abû Jaʿḳûb Isḥâḳ gehört zu den Aerzten und sollte also in der folgenden dritten Unterabtheilung stehen, wohin ihn auch einige Codices gesetzt haben.]

---

*) Kann auch heissen „hervorragenden".

III. Unterabtheilung.

Sie enthält die Geschichten der älteren und neueren Aerzte und die Titel der Bücher, die sie verfasst haben.

Galenos.

Er schrieb [unter Anderem: es werden von ihm 72 medicinische Schriften angeführt]: Das Buch darüber, dass das erste Bewegende (primus motor) selbst unbeweglich sei[292], übersetzt von Ḥunain, ʿÎsâ ben Jaḥjâ und Isḥâḳ (ben Ḥunain).

Ḥunain.[293]

Ḥunain ben Isḥâḳ al-ʿIbâdî, mit dem Beinamen Abû Zaid, war ein vortrefflicher Arzt, bewandert in der griechischen, arabischen und syrischen Sprache, und belesen in den Schriften der Alten. Er schrieb [unter Anderem]: Ueber Fluth und Ebbe. Ueber die Ursachen, warum das Meerwasser salzig wird. Ueber die Entstehung des Feuers zwischen (mit Hülfe von) zwei Steinen.[294]

Ḳusṭâ.[295]

Ḳusṭâ ben Lûḳâ aus Baʿalbek, hat eine grosse Zahl alter Werke ins Arabische übersetzt, und war sehr bewandert in vielen Wissenschaften, so in der Medicin, Philosophie, Geometrie, Arithmetik und Musik, gewandt in der griechischen Sprache und zeichnete sich durch vortrefflichen arabischen Styl aus; er starb am Hofe eines armenischen Königs.[296] Er schrieb [unter Anderem]: Ueber die Brennspiegel. Ueber die Gewichte und Masse. Ueber den Wind und seine Ursachen. Ueber die Waage. Ueber den Gebrauch des Himmelsglobus.[297] Einleitung in die Geometrie. Ueber die schwierigen Stellen des Eukleidischen Buches. Einleitung in die Astrologie. Abhandlung über die Auflösung von Zahlenaufgaben aus dem dritten Buche des Eukleides. Einen Commentar zu dreieinhalb Büchern des Diophantischen Werkes über arithmetische Aufgaben.

Ar-Râzî.[298]

Abû Bekr Muḥammed ben Zakarijjâ ar-Râzî, aus Raj in Chorasan gebürtig, einzig dastehend zu seiner Zeit als Kenner der Wissenschaften der Alten und besonders als Mediciner; er war sehr hochherzig und wohlthätig gegen die Armen, so dass er ihnen neben der Verpflegung noch Geld zu überreichen pflegte. Er wurde gegen das Ende seines Lebens blind;[299] er war ein Schüler Balchîs in der Philosophie. Nach seinem eigenen Bücherverzeichniss schrieb er [unter Anderem]: Zwei Bücher Beweise, das erste 17, das zweite 12 Capitel enthaltend. Das Buch von der

äussern Erscheinung der Welt. Das Buch der Widerlegung Derjenigen, welche die Bücher der Geometrie geringschätzen. Ueber das Leere und das Volle, oder über Zeit und Raum (Ort). Ueber die Ursache, wesshalb die Erde in der Mitte des Weltalls in Ruhe ist. Ueber die Ursache der Rotationsbewegung der Himmelssphäre. Das Buch darüber, dass die Bewegung nicht zweifelhaft, sondern gewiss ist. Das Buch darüber, dass der Körper (die Masse?) sich von selbst bewege, oder dass die Bewegung ursprünglich in seiner Natur begründet sei. Ueber die Diagonale des Quadrates. Ueber die Ursache der Anziehung des Magnetsteins. Ueber die Abkühlung des Wassers durch Schnee. Abhandlung über den Untergang der Sonne und der Sterne, und dass dieser nicht eine Folge der Bewegung der Erde, sondern derjenigen des Himmels sei. Abhandlung darüber, dass Derjenige, welcher nicht im Beweisen (logischen Schliessen) gewandt ist, sich nicht vorstellen kann, dass die Erde kugelförmig sei und rings herum auf derselben sich Menschen befinden. Ueber die Widerlegung der Meinung Derjenigen, welche glauben, dass die Sterne nicht an der äussersten Grenze der rotierenden Sphäre (der Rotationsbewegung) seien.[300] Abhandlung über die Streitfrage über die natürliche Beschaffenheit der Erde, ob diese nämlich aus Lehm oder Stein bestehe. Abhandlung über das Mass dessen, was durch die Weissagung aus den Sternen zu erkennen möglich ist, nach der Ansicht der Naturphilosophen und nach der Ansicht Derjenigen, welche verneinen, dass die Gestirne lebende Wesen seien.

Anmerkungen.

Aristoteles.

1) Andere mathematisch-physikalische Schriften, wie die mechanischen Probleme und über die untheilbaren Linien, die bei Ibn al-K. und H. Ch. angeführt sind, fehlen im Fihrist. H. Ch. führt überdies noch an: Ueber die Geheimnisse der Gestirne V. 40, über die Zahlen V. 46, über die fallenden Sterne (Meteore, Sternschnuppen) V. 166, 1000 Worte (Sätze, Aphorismen) über die Astrologie I. 407.

Proklos Diadochos.

2) Eines von den beiden Werken ist wahrscheinlich der Commentar zum ersten Buche der Elemente des Eukleides. Flügel, A., p. 116 hält das Letztere für die *στοιχείωσις φυσική*, als die kleinere im Gegensatz zur *στοιχείωσις θεολογική* als der grösseren; was ist dann aber das erste Werk? — 3) Also über die Atome? Wahrscheinlich steht dieser Titel in Verbindung mit einem Abschnitte aus irgend einem seiner philosophischen Werke; oder ist es etwa jene Definition des Punktes, mit der nach dem Prolog der Commentar zum ersten Buch der Elemente des Eukleides beginnt?

Alexander von Aphrodisias.

4) H. Ch. III. 619 schreibt ihm auch eine physica auscultatio zu, meint aber damit wahrscheinlich einen Commentar zum gleichnamigen Werke des Aristoteles.

Porphyrios.

5) Was dies für Elemente sind, ist unsicher. Nach Proklos' Commentar zu I. Eukl. scheint es allerdings wahrscheinlich, dass Porph. entweder Elemente der Geometrie verfasst, oder ebenfalls einen Commentar zu Eukl. geschrieben hat. Wenrich p. 281 hält sie für die von Suidas und Proklos (Theolog. Platon.) erwähnte Schrift des Porphyrios *περὶ ἀρχῶν* libri II.

Theophroditos.

6) In den arabischen Codices sind die Namen der Autoren, besonders der alten, oft so entstellt, dass die richtige Schreibweise nur schwer, oft gar nicht festzustellen ist; zu dieser Gattung gehört auch dieser Name, wir werden später noch andern solchen begegnen.

Theon (v. Smyrna).

7) Da auch die Titel der Werke oft entstellt sind, so könnte dies vielleicht die theilweise noch vorhandene Schrift Theons sein: Ueber das Mathematische, was zum Lesen der platonischen Schriften nützlich ist.

Al-Kindî.

8) Von den Schriften dieses berühmten Mannes, des „Philosophen der Araber", habe ich nur die auf die mathematischen Wissenschaften sich beziehenden angeführt, für das Uebrige verweise ich auf Flügels Abhandlung: Al-Kindî, genannt der Philosoph der Araber etc. Abhandlgn. f. d. Kunde des Morgenlandes. Bd. 1. Heft 2. 54 S. Ich hätte al-Kindî in Rücksicht auf diese umfassende Arbeit ganz auslassen können, allein ich wollte ein womöglich vollständiges Mathematikerverzeichniss aus dem Fihrist hier wiedergeben. Die Lebenszeit al-Kindîs fällt ungefähr in die Jahre 184—257 d. H. (800—870 p. Ch.). — 9) So übersetzt Flügel in der eben citierten Abhandlung p. 22 الفأل; es ist dies eine besondere Art des Weissagens, Ḥ. Ch. sagt IV. 346: Haec est ea doctrina, qua eventum aliquod futurum interposito orationis ex alio auditae genere aut Corano aut libris Sheikhorum aperiendis, cuiusmodi sunt Háfitzi Diwan, carmen Methnewi et alia, cognoscitur. Vergl. auch Anmerkg. 158. — 10) Flügel (ibid. p. 22) übersetzt „relative". — 11) Flügel (ibid. p. 23) übersetzt nach einer andern Lesart: „Ueber die äussern Erscheinungen der Proportionen und Zeiten" und vermuthet (wohl nicht unbegründet), es sollte statt خلق (äussere Erscheinungen, eig. Eigenschaften) خلف (Verschiedenheiten) stehen. — 12) Flügel (ibid.) übersetzt علم اضمارها mit: „Anweisung Andern das Geheime dieser Kunststücke nicht sichtbar werden zu lassen". — 13) Flügel (ibid. p. 24) übersetzt رؤية durch „Wandlungen", und denkt wohl damit an die Phasen, es könnten damit aber auch die Erscheinungen der verschiedenen Anomalien der Mondbewegung gemeint sein. — 14) مطرح الشعاع ist ein astrologischer Kunstausdruck, wörtlich: Ort der Strahlenwerfung (lat. projectio radiorum); es sind dies nach Woepke (über ein in der k. Bibliothek zu Berlin befindl. arab. Astrolab. in Abhandlg. der k. Akad. d. Wiss. z. Berlin, Jahrg. 1858, math. Theil p. 1—31) die Projectionen der sog. Positionskreise auf dem Astrolabium, d. h. derjenigen grössten Kreise der Sphäre, die durch den Nord- und Südpunkt des Horizontes gehen und deren Pole auf dem ersten Vertikal liegen; sie dienen zur Bestimmung der sog. Radiationen, d. h. derjenigen Punkte des Himmels, welche zu einem gegebenen Punkte (besonders dem Ascendens, d. h. dem aufgehenden Punkt der Ekliptik) im Gedritt-, Geviert- oder Gesechstschein stehen. — 15) Flügel (p. 24) übersetzt نمودارات المواليد mit „Modelle der Horoskope", Dorn (p. 97) النمودارات einfach mit „Horoskope"; es ist dies das persische Wort für diesen astrologischen Begriff (vergl. Vullers, Lexicon pers.-latin.). Wir geben, Flügel folgend, هيلاج durch „Regenten der Geburtsstunde" كدخداه (auch كتخوداه) durch „Regenten der ganzen Lebensdauer" wieder. Diese Ausdrücke kommen in den ins Lateinische übersetzten astrologischen Werken

meistens unübersetzt vor, z. B. Alchabitius, astronomiae iudic. principia, Lugduni s. a. fol. 55 steht: De significatione vitae. Hylech: id est locus vitae in nativitatibus. fol. 56: hylech, id est significator vitae in nativitatibus. fol. 57: alcochoden, qui est significator vitae, id est dominus annorum vel dans annos .... ibid. alcochoden, qui est dator annorum vitae. — 16) شعاعات kann nicht wohl „Strahlenbrechungen" heissen, wie es Flügel übersetzt, sondern einfach „Strahlen". — 17) Flügel p. 26 übersetzt فى تقريب قول ارشميدس فى قدر قطر الدائرة من محيطها mit: über das nähere Verständniss des Ausspruchs des Archimedes über die Bestimmung der den Kreis in zwei gleiche Hälften theilenden geraden Linie (Diameter) von seiner Peripherie aus?! — 18) Flügel (ibid.) übersetzt: Ueber die Beschreibung der Figur der Mediallinien (شكل الموسّطين). — 19) Flügel (ibid.) gibt تقريب hier und bei der folgenden Abhandlung durch „näheres Verständniss" wieder? — 20) Flügel (ibid.) schreibt „Eintheilung". — 21) Flügel (ibid.) übersetzt فى قسمة الدائرة ثلثة اقسام mit: Theilung des Kreises in drei Theile. Darüber hat wohl al-Kindî keine Abhandlung geschrieben, ich bin daher der Ansicht, dass meine Uebersetzung zutreffender sei, zumal قسم pl. اقسام für Theile eines Buches (statt مقالة oder باب) im Fihrist wiederholt vorkommt, so in der dritten Unterabtheilung (Aerzte), im Artikel über Galenos (Fihrist p. 289. Z. 3 v. u.) und im Artikel über ar-Râzî (ibid. p. 300. Z. 5 v. o.). Eine andere Möglichkeit wäre auch die, dass es statt دائرة = Kreis heissen sollte زاوية = Winkel, dann wäre die Flügel'sche Uebersetzung „in drei Theile" wohl richtig. — 22) Flügel (ibid.) übersetzt: Ueber die Parallaxen des Spiegels. — 23) Dieses fünfte Element wurde dann durch das Dodekaeder repräsentiert, während die vier andern, Erde, Wasser, Feuer, Luft, durch Hexaeder, Ikosaeder, Tetraeder und Oktaeder versinnlicht wurden. — 24) Flügel (p. 27) übersetzt صور durch „Gestalten (der Himmel)"; es bedeutet aber nichts anderes als „Sternbilder", vergl. Dorn, p. 144. — 25) So übersetzt Flügel; ich würde aber statt „gekrümmt sei" vorziehen zu übersetzen „einer Veränderung unterworfen sei" (استحالة), und unter dem entferntesten Körper die äusserste Sphäre verstehen. — 26) Flügel (ibid.) hat: Ueber des Ptolemaios künstliche Construction des Himmels (d. h. über seinen Almagest); ich bin der Ansicht, dass es sich hier um die Armillar- und Planisphärien handelt. — 27) Flügel (p. 32) übersetzt (was man aus dem Texte nicht herauslesen kann): Ueber die (nach den verschiedenen Jahreszeiten verschiedenen) Proportionen der Zeit. — 28) So übersetzt Flügel (ibid.) كوكب الذوابة, sonst heisst der Komet كوكب مذنب (geschwänzter Stern). — 29) So übersetzt Flügel (ibid.), weil عجوز = altes Weib. Wahrmund (arab. Wörterb.) hat: ايام العجوز = 5 Tage des Wintersolstitiums. — 30) Flügel (p. 33) schreibt in Klammern „Höhenmessung"; ابعاد heisst aber eben nur „Entfernungen" und würde besser für die gegenseitige Entfernung der Berggipfel als für ihre Höhe passen. — 31) Dies ist vielleicht nur eine durch Abschreiber hineingekommene Wiederholung der vorhergehenden Abhandlung, zu welcher ursprünglich als nähere Bezeichnung die beiden Worte „Ebbe und Fluth"

hinzugefügt waren, die später irrthümlich als eigene Abhandlung hingestellt wurden. — 32) Flügel übersetzt هابطة mit „untersinkend", es heisst aber ganz allgemein „herabfallend". — 33) Flügel hat (p. 34) nach einer andern Lesart „Furcht" (خوف) statt „Einstürze" (خسوف). — Noch andere Schriften al-Kindîs siehe bei H. Ch. I. 389, II. 296, III. 372, V. 152 und 274.

Aḥmed ben aṭ-Ṭajjib.

34) Starb nach Casiri (I. 407) im Jahre 286 (899). — 35) Was الاعشاش = die Nester bedeutet, habe ich nicht feststellen können; die beiden Bücher sind bei H. Ch. getrennt aufgeführt, das erstere V. 46, das letztere III. 66. — 36) Casiri (I. 407) hat: غش الصناعة statt عش الصناعات und übersetzt: Commentarius in artem sophisticam? — 37) Das Wort „Algebra" fehlt bei H. Ch. V. 38, die Algebra dieses Autors findet sich dann aber V. 67. — H. Ch. führt noch andere Schriften von Aḥmed ben aṭ-Ṭajjib an, die ich nicht alle citieren kann, ich verweise auf die Stellen: III. 385, V. 33, 58, 104, 128.

Ibn Karnîb.

38) Ueber dessen Lebenszeit habe ich keine directen Angaben gefunden, doch berichtet Casiri (I. 433) nach der Bibl. philos. arab., dass sein Bruder Abû'l-ʿAlâ ums Jahr 348 (959) der Lehrer Abû'l-Wafâs in ʿIrâḳ war. — 39) Andere Codices haben „gleichen" statt „entgegengesetzten". Wüstenfeld (p. 38) hat nach Casiri (I. 387): De quiete inter utrumque arteriae motum. Ibn al-K. führt von ihm noch an: Wie man mittelst der Höhe erkennen kann, wie viel Stunden des Tages verflossen sind (Fihrist. A. 263. 3).

Abû Jaḥjâ al-Merwazî.

40) Lebte nach Ibn al-K. und Ibn Abî Uṣaibiʿa in Bagdad (Fihrist. A. 263. 6); die Lebenszeit ist unbestimmt, wahrscheinlich Ende des 9. und Anfang des 10. Jahrhunderts.

Mattâ ben Jûnus.

41) War ein berühmter Arzt und Philosoph zu Bagdad zwischen 320 und 330 (932—942) (Abulph. 304). Nach Wüstenfeld (p. 53) starb er im Jahre 329 (941).

Ibn Zurʿa.

42) Er starb nach Abulph. (p. 338) im Jahre 398 (1008) in Bagdad.

Ibn al-Chammâr.

43) Er starb nach Wüstenfeld (p. 58) im Jahre 381 (991).

Eukleides.

44) Flügels Ausgabe des Fihrist hat اسطروشيا (Istrûschijâ), andere Autoren haben besser اسطوخيا (Istûchijâ) oder اسطقسات (Istuḳisât) für *στοιχεῖα*. — 45) Die Worte وقد خرج sind unklar, vielleicht ist darunter

verstanden, „welcher (der Commentar) soeben veröffentlicht worden ist". Steinschneider (Eukl. bei d. Arab. Z. f. M. Ph. 31. Jahrg. p. 90) hat nur: „der veröffentlicht worden ist"; ich glaube aber, قد habe hier die Bedeutung von „soeben, vor Kurzem"; in der That starb al-Anṭâkî, der später (p. 40) als selbstständiger Autor genannt wird, im Jahre 376, also kurz vor der Abfassung des Fihrist. — 46) Der arabische Name ist kaum anders zu lesen, wird aber wohl anfänglich anders gelautet haben, wenigstens wird im Artikel über Apollonios seiner Abfassung der Elemente nicht Erwähnung gethan. Wir führen hier schon anticipierend an, dass verschiedene Autoren, wie H. Ch. (V. 148), Ibn al-K. und nach ihm Casiri (I. 384), Abulph. (p. 64) den Apollonios, den Verfasser der Kegelschnitte, der Zeit nach vor Eukleides setzen; die älteste Quelle, der Fihrist, thut dies nicht, sagt, wie schon erwähnt, unter „Apollonios" nichts von Eukleides und seinen Elementen und bringt die drei grossen Mathematiker Eukleides, Archimedes, Apollonios in richtiger chronologischer Reihenfolge. Ferner ist die Schreibweise, worauf wir freilich kein zu grosses Gewicht legen wollen, nicht ganz dieselbe: Apollonios der Zimmermann, im Artikel „Eukleides" ist geschrieben أبلنس, und der Verfasser der Kegelschnitte im Artikel „Apollonios" أبلونيوس; der erstere hat den Zunamen النجّار = der Zimmermann, der zweite nicht — alles dies rechtfertigt doch wohl die Vermuthung, der Verfasser des Fihrist habe die Beiden, wenn ihm auch, was gar nicht sicher ist, derselbe Name vorgelegen haben sollte, nicht für eine und dieselbe Persönlichkeit gehalten. Vergl. hierüber auch Wenrich (p. 198) und Gartz (de interpretibus et explan. Euclid. arab. Halae 1823, p. 7). Dass übrigens schon al-Kindî durch Stellen des Proklos und die bekannte Vorrede des Hypsikles zum 14. Buche in seinem Bericht über die Elemente irregeleitet worden sein mag, wollen wir nicht bestreiten. — 47) Im Fihrist und bei Casiri (I. 340) fehlt الفلكي, das bei anderen Autoren sich vorfindet, nach ظاهرات; doch ist hier kein anderes Werk als die *φαινόμενα* gemeint, und nicht wohl zu begreifen, wie Casiri übersetzen konnte: Loca ad superficiem. — 48) Sehr wahrscheinlich das in griechischer Sprache verloren gegangene Werk Euklids de divisionibus superficierum, das arabisch als Bruchstück von Woepke aufgefunden und übersetzt worden ist (Journal asiat. 1851), und von dem eine Bearbeitung durch einen gewissen Muḥammed Bagdadinus von John Dee schon 1570 in lateinischer Uebersetzung herausgegeben und später verschiedenen Euklidausgaben beigefügt worden ist. Vergl. Cantor, Vorlesg. I. p. 247. — 49) Casiri (I. 430) und Wenrich (p. 184) übersetzen الفوائد mit utilitas (Wenrich fügt unter d. Addenda und Corrig. hinzu: lege „utilia"), und in der That ist die nächste Bedeutung von فائدة pl. فوائد, wie diejenige von *πόρισμα* = Nutzen, Gewinn; eine weitere Bedeutung beider Wörter, des arabischen wie des griechischen, ist auch Erklärung, Anmerkung, Zusatz (ein Gewinn, eine Nutzanwendung aus etwas Vorhergegangenem). Dass also unzweifelhaft mit diesem Buche die Porismen Eukl. gemeint sind, hätten wohl schon Casiri und Wenrich, noch eher Gartz (der im oben citierten Werke p. 5 übersetzt: de reditibus), gewiss aber Heiberg herausfinden sollen, welch'

letzterer (Literargesch. Stud. über Eukl. p. 7—8), nachdem er aus dem Casirischen Verzeichniss der Eukl. Schriften angeführt hat: liber de utilitate, weiter unten fortfährt: „Es fehlen hier folgende, uns aus griechischen Quellen bekannte Werke: *πορίσματα* etc.“ Was soll man aber gar von Steinschneider denken, der in seiner Abhandlung „Euklid bei den Arabern“ (Z. f. M. Ph. 31. Jahrg. p. 81—110.) dieses Werk des Eukl. gar nicht berücksichtigt, obgleich es in dem wesentlich von ihm benutzten Fihrist deutlich steht?! Wir wollen annehmen, dasselbe sei von Herrn Steinschneider übersehen worden. — 50) Jedenfalls das musikalische Werk *κατατομὴ κανόνος*, wie auch Casiri und Wenrich (l. c.) richtig vermuthen. — 51) Ein Fragment dieser Schrift ist bekanntlich verschiedenen Euklidausgaben beigefügt, so denen von 1537 und 1546 (Basel) und 1703 (Oxford). — 52) Diese beiden Schriften über die Synthesis und Analysis sind vielleicht Theile der Data oder Porismen oder weitere Ausführungen derselben (vergl. Heiberg, literar. Stud. p. 39), oder beziehen sich auf die wenigen Sätze des 13. Buches der Elemente, deren Beweise in eine Analysis und eine Synthesis zerfallen, die man dem Eudoxos zuschreibt, und die nach Klamroth (Ueber den arab. Euclid, Z. D. M. G. Bd. 35. p. 314 u. 326) ziemlich späte Einschiebungen sein sollen, da sie in den ältesten arabischen Euklidübersetzungen nicht vorkommen.

Archimedes.

53) Damit ist wohl das Buch „de dimensione circuli“ gemeint, welches aber arabisch eher heissen sollte: مساحة الدائرة; und in der That führt Casiri (I. 384) ein solches an, daneben aber auch noch eine „Quadratur (تربيع) des Kreises.“ Auch H. Ch. nennt zwei Werke: V. 60 de quadratura circuli und V. 150 de dimensione circuli ejusque computatione (وتكسيرها). Vergl. Wenrich p. 191. — 54) Casiri (l. c.) und H. Ch. (V. 151) haben: de septangulo (مسبّع) in circulo. — 55) Casiri (l. c.) übersetzt المثلثات mit: de figuris conoidibus, was eine unglaubliche Freiheit der Uebersetzung verräth (dieses Werk fehlt nämlich bei allen arabischen Autoren und sollte nach Casiris Meinung doch da sein!). — 56) Casiri übersetzt wieder sehr kühn: الخطوط المتوازية mit „de lineis spiralibus“; vielleicht ist dieses Werk gemeint, dann ist aber ursprünglich statt المتوازية ein anderes Wort dagestanden: spiralig, schraubenförmig heisst im Arabischen لولبى; Casiri selbst führt (I. 382) ein Werk eines gewissen Simmeadis (er fügt hinzu: id est Samii) an, betitelt فى الخطوط اللولبية = de lineis spiralibus. Es ist dies wahrscheinlich das Archimedische Werk, als dessen Verfasser die Araber Konon, den Samier, gehalten haben mögen. — 57) H. Ch. sagt V. 351: sunt (assumpta sive lemmata) quindecim figurae et recentiores hoc opus numero librorum intermediorum adjecerunt, qui inter Euclidem et Almagestum legendi essent. — 58) Dieses Werk wird von H. Ch. (V. 154) und Casiri (l. c.) auch angeführt und sein Titel ist der Bedeutung nach von dem des vorigen nicht wesentlich verschieden. — 59) Casiri (l. c.) übersetzt falsch: de anguli rectilinei trisectione et

proprietatibus. — 60) Dies ist die wörtliche Uebersetzung von آلة ساعات الماءُ التى ترمى بالبنادق; Casiri (l. c.) übersetzt falsch und Wenrich (p. 194), welcher einfach sagt „de clepsydris“, unvollständig, indem er den Nachsatz weglässt; Flügel übersetzt im H. Ch. (V. 93) den ganz gleichen Text, wie er im Fihrist steht, mit: de clepsydris, ubi aqua per canales tollitur?

Hypsikles.

61) Casiri (I. 346) übersetzt فى الاجرام والابعاد mit: de corporum coelestium magnitudine et distantia; es heisst aber wörtlich nichts anderes als „über die Körper und die Entfernungen.“ — 62) Es heisst im Text das vierte und fünfte Buch; عشر = zehn ist durch die Abschreiber weggelassen worden: Flügel vergisst, dies zu erwähnen.

Apollonios.

63) Es ist wohl gemeint „schwierig zu verstehen.“ — 64) Es sind dies die zwei Bücher über den Verhältnissschnitt (de sectione rationis), von Bernard und Halley aus dem Arabischen ins Lateinische übertragen 1706. — 65) H. Ch. (V. 164) hat an Stelle von: de ratione determinata, de ratione radicum arithmeticarum (نسبة الجذور statt النسبة المحدودة). Die Lesart des Fihrist deutet auf die verloren gegangene Schrift „de sectione determinata“ hin, nur heisst es eben ratio (نسبة) statt sectio (قطع), was aber, nach dem Inhalt der nach Pappos' Angaben wiederhergestellten Schrift zu urtheilen, ganz wohl gestattet und ebenso bezeichnend ist; die Lesart des H. Ch. aber könnte die ebenfalls nicht mehr vorhandene Arbeit des Apollonios über die Irrationalgrössen bedeuten. Vergl. Cantor, Vorlesungen I. p. 299 u. f. und Woepke, Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apoll. (Mém. présent. par div. Sav. à l'Acad. des Sc. Tome XIV. Paris 1856.) — 66) سطوح kann allgemein „Fläche“, speciell aber „ebene Fläche“, auch „Oberfläche“ bedeuten; Wenrich (p. 203) vermuthet hierin das Buch „de locis planis“, wir glauben eher, es sei damit „de sectione spatii“ gemeint. Casiri (I. 385) übersetzt: de locis planis eorumque sectionibus similibus, was freilich die Stelle im Fihrist niemals heissen kann. — 67) Ist wohl identisch mit „de tactionibus“. — 68) Casiri (I. 385) hat diese Schrift auch, sonst findet sie sich nirgends erwähnt.

Hermes.

69) War nach der Tradition der Araber der Hüter des dem Merkur geweihten Tempels zu Babylon; er ist wahrscheinlich identisch mit der ägyptisch-griechischen mythischen Persönlichkeit des Hermes Trismegistos, dem angeblichen Erfinder der Alchymie und Magie, dem (besonders von den Neuplatonikern) eine Reihe alchymistischer und astrologischer Schriften zugeschrieben werden, und der von Jenen als ein ägyptischer König oder Weiser gehalten oder ausgegeben wurde. Vergl. über ihn auch Abulph. p. 9 u. 10, H. Ch. I. 62., Casiri I. 374—376, und Fihrist. A. p. 186 u. f. — 70) تحويل, das in der Folge sehr oft wiederkehrt, ist in den mittelalterlichen lateinischen Büchern über Astrologie durch revolutio (revolutio

annorum nativitatum, revolutio annorum mundi) wiedergegeben, ich übersetze es mit „Umlauf"; man könnte wohl auch mit Flügel (al-Kindî, Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. 1. p. 29) sagen: „Wechsel der Jahre" (d. i. der Stufenjahre des Menschenalters), oder vielleicht noch besser „Verlauf der Jahre". Statt „Gradeintheilung des Umlaufes der Jahre" wäre vielleicht richtiger: Stufen- oder Staffeljahre (anni climacterici): in der Astrologie je das siebente oder neunte Jahr von der Geburt an.

Eutokios.

71) Dieses Buch über „die zwei Linien" ist nichts anderes als der Commentar zum zweiten Buche des Archimedes über die Kugel und den Cylinder, was weder Casiri noch Wenrich, jedenfalls aus Unkenntniss des Inhaltes dieses Commentars, bemerkt haben. Unter den „zwei Linien" sind die zwei mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Geraden verstanden, über deren Construction jener Commentar zum grossen Theile handelt und mit den „Aussprüchen der mathematischen Philosophen" sind die verschiedenen von Eutokios angeführten Auflösungen griechischer Mathematiker gemeint. — 72) H. Ch. (V. 386) hat statt dieses Commentars einen solchen zum 1. Buche des Almagestes.

Menelaos.

73) Casiri (I. 345) übersetzt مختلطة durch „mixtorum", was allerdings die nächste Bedeutung ist, aber keinen Sinn gibt, es kann wohl auch „verschieden" heissen; Wenrich (p. 211) hat: de cognitione quantitatis discretae corporum permixtorum? — 74) H. Ch. (III. 471) hat: Observationes astronomicae a Menelao Romae anno octingentesimo quinquagesimo quarto, quingentos quindecim annos ante aeram islamicam factae. Das würde mit der Zeit Trajans, nicht Domitians stimmen, doch könnte wohl Menelaos auch schon einige Jahre vorher in Rom gewesen sein.

Ptolemaios.

75) موالید übersetze ich in der Folge immer wörtlich mit „Geburten", es ist natürlich darunter der astrologische Begriff „Nativitäten" oder „Horoskope" verstanden. — 76) Ueber den astrologischen Begriff „Loose" vergl. Flügel, die Loosbücher der Muhammedaner, 1860. — 77) Wenrich (p. 233) hält diese Schrift für das Buch „de hypothesibus planetarum." — 78) Es ist wahrscheinlich ebenfalls eine astrologische Schrift; denn in dieser Kunst spielte die „sieben" eine grosse Rolle; vergl. Flügel, Loosbücher, p. 41, 42 u. 49. — 79) Es ist diese Schrift das sogenannte Centiloquium, griechisch *καρπός* = fructus (librorum suorum), welche gewöhnlich dem Ptolemaios zugeschrieben wird, was, wie man aus diesem Artikel ersieht, von den Arabern in Bezug auf verschiedene astrologische Schriften gethan wurde. — 80) Die Schrift „de planisphaerio" ist also im Fihrist nicht erwähnt, dagegen bei H. Ch. V. 61.

Autolykos.

81) H. Ch. (V. 140) fügt zu dem Buche de sphaera quae movetur hinzu: quem Thabit recognovit et Nassir Eddin correxit; während er I. 389

sagt: librum tempore Khalifae Mamun arabice verterunt, illumque postea Yacub ben Is'hac Kindi recognovit et emendavit.

Simplikios.

82) Mit الرومى = der Rumäer, Grieche, bezeichnet der Araber den Oströmer, Byzantiner, im Gegensatz zum Westeuropäer, den er الفرنجى = den Franken nennt. — 83) Ist vielleicht in dieser Schrift eine Beziehung zu der in des Simplikios Commentar zur Physik des Aristoteles aufgenommenen Stelle aus der Geschichte der Geometrie des Eudemos zu vermuthen? — 84) Wenrich (p. 209) erwähnt irrthümlich diese beiden Schriften des Simplikios unter Autolykos und unter Simplikios (p. 297) bloss den Commentar zu „de anima“ des Aristoteles.

Dorotheos.

85) Der Name ist unsicher, doch stimmen Wenrich (p. 292) und Flügel, A. 123 darin überein, dass hier kein anderer als Dorotheos von Sidon (Sidonius) gemeint sei, welcher Apotelesmata in Versen geschrieben hat. Vergl. Fabricius, Bibl. gr. Lib. III. p. 511 u. f. und Zedler, Gelehrtenlexicon. — 86) Andere, z. B. Ibn al-K. und nach ihm Wenrich (l. c.) haben: Ueber die Epochen und Perioden. — 87) H. Ch. (I. 198) erwähnt, Dorotheos habe auch über electiones = Tagewählerei geschrieben.

Theon von Alexandria.

88) Masîr (مسير) heisst wörtlich „Gang“, „Fahrt“, „Lauf“, also wahrscheinlich: Kanon des Laufes der Gestirne. H. Ch. (III. 470) sagt: Observationes astronomicae Theonis Alexandr. nongentos viginti unum (!) annos ante aeram islam. factae. In tabulis astron. ex illis observationibus enatis et Canun nominatis aera usus est Philippi Rumaei El-Benná, qui Alexandri M. frater (?) fuit. — 89) Es ist dies jedenfalls sein Commentar zum Almagest.

Valens.

90) Der Name ist unsicher, doch wird höchst wahrscheinlich der Astrologe Vettius Valens v. Antiochia gemeint sein, dessen Lebenszeit abweichend angegeben wird: Cantor (Vorlesg. I. p. 300) setzt ihn ins II. Jahrh. n. Chr.; Zedler (Gelehrtenlex.) hält ihn für denjenigen Valens, welchen Constantin d. G. über das zukünftige Schicksal Konstantinopels befragt haben soll; Pauly (Realencyclop. VI. b. p. 2532) kennt nur einen Vettius Valens aus Ariminum, der von Plinius in der Reihe der berühmten Aerzte genannt wird und nach demselben zur Zeit des Kaisers Claudius gelebt hat. Vergl. die Anmerkung zu Pappos.

Theodosios.

91) Der arabische Name ثيودورس, wie er im Fihrist steht, aber in den verschiedenen von Flügel benutzten Codices ganz verschieden geschrieben ist, ist allerdings eher Theodoros zu lesen, aber die citierten Werke lassen keinen Zweifel übrig, dass hier Theodosios gemeint ist.

Pappos.

92) Flügel, A. p. 124 gibt die Schreibarten der einzelnen Codices: drei haben بلس = balos, einer ىىس (ohne diakrit. Punkte); Ibn al-K. hat p. 114 بنس = banos (die Araber haben kein P); da n und b sich im Arabischen nur durch die Stellung des diakritischen Punktes (oben oder unten) unterscheiden, so können sie durch die Abschreiber leicht verwechselt worden sein, auch das l kann aus einem ursprünglichen b entstanden sein und so hat Flügel wohl Recht, wenn er behauptet, es könne hier nur Pappos gemeint sein. Woepkes Ansicht (vergl. die oben citierte Abhandlung in den Mém. prés. par div. Sav. à l'acad. Tome XIV. p. 674), dass der Verfasser des Commentars zum 10. Buche des Eukleides nicht Pappos, sondern Valens sei, ist kaum haltbar; sein Hauptbeweis, dass nämlich in einem MS. (952.2 Suppl. arabe) Pappos durch بابوس wiedergegeben sei, ist nicht durchschlagend, ich erinnere nur daran, auf wie viele Arten der Name Apollonios in den arabischen MS. geschrieben wird. Und schliesslich ist noch zu bemerken, dass der Fihrist bestimmt zwischen diesen beiden Persönlichkeiten unterscheidet und sie in getrennten Artikeln behandelt und dem Valens nur astrologische Werke zuweist, wie er in der That auch nur als Astrologe bekannt ist. — 93) Die Collectiones math. des Pappos scheinen also dem Verfasser des Fihrist nicht bekannt gewesen zu sein.

Heron.

94) Soll nach Th. H. Martin in einer Handschrift der Leydener Bibl. existieren; Wenrich (p. 213—214) gibt an im Codex 1061 (399, 1), aber unter dem Titel: Heronis Scholia in elem. Eucl. problemata quaedam. Es wäre an der Zeit, dass diese Frage, ob Heron einen Commentar zu den Elementen geschrieben habe, einmal endgültig erledigt würde. — 95) Wenrich (p. 213) bemerkt hierzu: E Graeco in arab. sermonem a Kosta ben Luca conversus. Exemplum huius versionis habetur in bibl. Lugdun. cod. 1091 (51). — 96) Es sind dies natürlich die Pneumatica Herons. — H. Ch. V. 48 erwähnt auch seinen liber de machinis bellicis (βελοποιϊκά).

Hipparchos.

97) Flügel, A. 124 sagt: „— Es herrscht hier überhaupt eine arge Verwirrung. Unstreitig ist nach ابرخس (Hipparchos) der ganze ihn besprechende Artikel ausgefallen und von dem folgenden das den Anfang eines neuen Artikels bildende Stichwort ارسطيفوس (Aristippos), woran sich الزفنى (az-Zafanî) anschliesst". Ibn al-K. hat nämlich einen Artikel über Aristippos von Kyrene, dem er unerklärlicherweise den Beinamen al-Zafanî (nach einem Ort in Syrien, in der Nähe von Emesa) gibt und dem er die hier im Fihrist dem Hipparchos zugetheilten Bücher zuweist. Nun tritt aber die Schwierigkeit hinzu, auf die auch Flügel hinweist, dass Aristippos jedenfalls keine mathematischen Bücher verfasst hat und dass in dem späteren Artikel des Fihrist über Abû'l-Wafâ dieser als der Commentator der Algebra des Hipparchos genannt wird, wie es hier geschieht. (Dies könnte

freilich auch in den Artikel über Abû'l-Wafâ durch spätere Abschreiber hineingefügt worden sein, die sich der Stelle in dem schon verdorbenen Artikel über Hipparchos erinnerten.) Wir wollen übrigens nicht unterlassen zu bemerken, dass Cantor (Vorlesg. I. 313) es nicht für unmöglich hält, dass Hipparch über quadratische Gleichungen geschrieben habe. Ich für meinen Theil halte es für das Wahrscheinlichste, dass hier durch Abschreiber arge Verwechslungen, Auslassungen und Entstellungen stattgefunden haben und dass die dem Hipparch oder dem az-Zafanî zugeschriebenen Bücher ursprünglich unter dem unmittelbar folgenden Diophantos gestanden haben; dann ist vielleicht auch das Buch „über die Theilung der Zahlen“ identisch mit dem Diophantischen Buch „Ueber die Polygonalzahlen“. Dass hier das „Versehen mit geometrischen Beweisen“ durch Abû'l-Wafâ vom Commentar des Hipparchschen Buches und im Artikel über Abû'l-Wafâ vom Commentar des Diophantischen Buches gesagt ist, dürfte auch für meine Ansicht sprechen. Steinschneider (Die mittl. Bücher der Araber in Z. f. M. Ph. 10. 476—78), der die Stelle in Ibn al-K. nicht kennt, ist mit Casiri für Aristarch und macht aus az-Zafanî „der Samier“. Diese Ansicht ist jedenfalls nicht mehr haltbar, um so weniger, als der Fihrist weiter unten den Aristarch mit seinem bekannten Buche über Sonne und Mond anführt.

Thadinos?

98) Flügel, A. 125 bemerkt, dass sich keine geeignete Transscription für irgend einen bestimmten griechischen Namen biete.

Badrogogia?

99) Ein arg verstümmelter Name, woraus sich bis jetzt nichts machen liess.

Tinkalos (oder Tinklos)?

100) Dieser Name, sowie der folgende, Tinkros, treten bisweilen in astrologischen Schriften auf; es sind, wie der oben genannte Hermes, myth.-babylonische Persönlichkeiten, die von den Arabern als die Vorsteher der den sieben Planeten geweihten Tempel zu Babylon gehalten wurden. Vergl. auch Salmasius, de annis climact. Praef. et p. 561 u. f., der an ersterer Stelle beide für die nämliche Persönlichkeit hält und mit dem in griechischen Schriften genannten Teukros identificiert. — 101) Beides sind specifisch astrologische Begriffe: الوجوه sind die facies oder decani, d. h. die Drittel jedes Thierkreiszeichens (also je zehn Grade), oder eigentlich ihre Regenten; الحدود sind die termini, gr. ὅρια, d. h. die Planetenbezirke oder auch Zeichenbezirke, indem die 30 Grade jedes Zeichens auf die fünf Planeten (Sonne und Mond participieren nicht) in bestimmter Weise (nicht gleichmässig) vertheilt werden. Vergl. Salmasius, de annis clim. Praef. etc. und Ptolemaei lib. quadripart. tract. I. cap. XXI.

Muritos (oder Muristos)?

102) Ein nicht festzustellender Name: Ibn al-K. (p. 371) nennt ihn nach Flügel, A. 125 einen griechischen Gelehrten; ebenso Abulfeda (Hist.

anteislam. p. 157): Myrtos vel Myristos, Doctor graecus, matheseos peritus et inventionis plurimae etc.

Sâʿâtos?

103) Flügel, A. 125 schreibt: Ohne allen Nachweis.

Herkal?

104) Ibn al-K. (p. 464) nennt ihn nach Flügel, A. 125 einen babylonischen Gelehrten und einen der sieben Tempelwächter; in der Ausgabe v. H. Ch. (V. 171) übersetzt Flügel das arabische Wort mit „Heraclius", und daselbst ist ihm ein anderes Buch, nämlich de alchymia, zugeschrieben. — 105) Mit دوائر „Kreise" ist hier höchst wahrscheinlich ein den Wasserrädern verwandtes rundes, oder sich drehendes Instrument gemeint, oder sollte es heissen „Ueber die Umdrehung der Wasserräder"?

Kitwar?

106) In andern Codices liest man auch Kitwan. Casiri (I. 418) übersetzt: Canthon, ein bedeutender babylonischer Musiker, schrieb unter Anderem de tonorum casu.

Aristoxenos.

107) So vermuthet Flügel, A. 125, dass ارسطكلس zu übersetzen sei, dieser Grieche schrieb bekanntlich über Musik.

Aristarchos.

108) Nach Wenrich (p. 209) ist bei Ibn al-K. noch hinzugefügt: وبعديهما „und ihrer Entfernungen". Ebenso bei Casiri (I. 346); dieser fügt noch bei: liber de arithmetica (im arabischen Text steht Algebra) und liber de numerorum divisione. Bekanntlich stehen diese beiden Bücher im Fihrist unter Hipparch oder az-Zafanî, und wir kommen hier wieder auf die in Anmerkg. 97 behandelte Verwechslung der Autoren. H. Ch. V. 70 hat unmittelbar nach einander dasselbe Buch „über Sonne und Mond und ihre Entfernungen" das eine Mal dem Aristoteles, das andere Mal dem Aristarchos zugeschrieben. Es ist jedenfalls eine durch Abschreiber hervorgebrachte Wiederholung desselben Werkes.

Apion?

109) Flügel, A. 274 Index II, gibt diese unsichere Transscription von ابيون, das ebenfalls verstümmelt sein kann, wenigstens kennt man keinen Patriarchen dieses Namens, und Apion der Grammatiker aus Aegypten, der zur Zeit des Tiberius lebte, kann gewiss nicht damit gemeint sein. S. 284 wird er im Fihrist nochmals genannt als erster Verfertiger von Planisphärien.

Kankah.

110) Wüstenfeld (p. 3 u. 4) hat Katkah, was auch Flügel, A. 125 für das richtigere hält. Wüstenfeld bemerkt dann im weitern: „Die Araber

haben fast überall Kankah geschrieben; sie haben den Namen des Buches Kuṭṭaka = Algebra für den Namen des Verfassers gehalten, welcher Aryabhaṭṭa heisst". Vergl. v. Bohlen, das alte Indien, II. p. 281 und Cantor Vorlesg. I. p. 533 u. ff. Vergl. auch Reinaud, Mémoire sur l'Inde p. 315, nach welchem Albîrûnî erzählt, dass Kankah in die Dienste Hârûn ar-Raschîds als Astronom getreten sei; es ist dies wahrscheinlich eine Verwechslung mit dem indischen Arzt Mankah. Vergl. ebenfalls Reinaud (l. c.). — **111**) Das Wort „Nimûdâr" übersetzen Wüstenfeld (l. c.) und Flügel in H. Ch. (V. 165) mit „specimen"; es ist aber das persische Wort für „Horoskop" (vergl. Vullers, Lexicon persico-latinum und Anmerkg. 15).

Nahak.

112) Dieses Werk schreibt Wüstenfeld (l. c.) dem Sandschahl zu und erwähnt Nahak gar nicht, ebenso H. Ch. VI. 242.

113) Vergl. über die Namen dieser indischen Gelehrten auch Wüstenfeld (l. c.) und Flügel, A. 126.

Die Söhne Mûsâs.

114) Die Stelle .. وكان الغالب ist schwer zu übersetzen, ich konnte keine andere Version als die gegebene herausfinden, die einen Sinn gehabt hätte, und doch halte ich sie nicht für die richtige, ich bin der Meinung, dass hier eine corrupte Stelle vorliege. — **115**) Casiri (I. 418) schreibt diesen Sohn dem Muḥammed zu. — **116**) Ueber den Streit zwischen Flügel und Steinschneider, ob Farasṭûn oder Ḳarasṭûn die richtige Lesart sei, lasse ich mich hier nicht weiter aus, man vergl. Flügel, A. 127 und des Letzteren Brief an den Fürsten Boncompagni in den Annali di matem. da Tortolini Tom. V. 1862. — **117**) Casiri (I. 418) übersetzt الشكل المدوّر المستطيل mit de cylindro, und auch L. Nix (Das fünfte Buch der Conica des Apoll. in der arab. Uebers. des Thabit ben Korrah, Leipzig 1889), sowie Steinschneider (Bibl. math. v. Eneström, 1887, p. 71) glauben, es könnte diese Bedeutung haben, obwohl der Letztere ganz richtig bemerkt, dass „Cylinder" durch die Araber mit اسطوانة wiedergegeben wird. Die Bedeutung „Cylinder" ist auch deshalb noch zu bezweifeln, weil ein Körper kaum jemals durch شكل wiedergegeben wird, dies bedeutet stets „Figur" oder besser „Lehrsatz" (weil zu einem Lehrsatz gewöhnlich eine Figur gehört). — **118**) Wahrscheinlich ein Commentar, oder eine Umarbeitung der Apollonischen Kegelschnitte. — **119**) Es ist unklar, was unter diesem Buche verstanden ist, vielleicht ein Commentar zu den drei letzten Büchern (V—VII) des Apollonios, oder eine Einleitung hierzu, die über gewisse Dreieckseigenschaften handelt. Vergl. Steinschneider (Bibl. math. 1887 p. 72 u. 73). — **120**) „Galenos" hat es jedenfalls ursprünglich nicht geheissen, wahrscheinlich ist die Vermuthung Steinschneiders (l. c.), dass Menelaos zu lesen und die Figur „Sektor oder Sekante", al-Ḳaṭṭâʿ, gemeint sei. Vergl. die Anmerkung zu Ṯâbit. — **121**) Die Lesarten für „Theil" variieren sehr bei den verschiedenen Autoren, Steinschneider (l. c. 74) schlägt als „freie Emendation Djîzu, den gewöhnlichen Ausdruck für radix" vor: sollte doch

wohl heissen djidr? Casiri (I. 418) hat جرّ = Zug, Anziehung, statt جذر und übersetzt: de virtute attrahendi. Vergl. Art. Proklos und Anmerkg. 3. — 122) Steinschneider hat statt „erklärendem" „mathematischem" für تعليمى. — 123) Steinschneider (l. c.) liest statt مائية (Wesen) مائة (hundert) und übersetzt demgemäss „über das Centiloquium". Nun ist zu beachten, dass diese Schrift des Ptolemaios arab. allgemein heisst الثمرة = $\varkappa\alpha\varrho\pi\acute{o}\varsigma$, (vergl. den Artikel „Ptolemaios" und Anmerkung 79) und dass Ibn al-K. nach Flügel, A. 127 berichtet, dass Muḥammed auch in der Logik sehr bewandert war; warum kann er nicht Schriften aus diesem Gebiet verfasst haben? Ich halte vor der Hand meine Uebersetzung aufrecht. — 124) Es ist dies der von M. Curtze (Halle 1885) herausgegeb. Liber trium fratrum de geometria, der sich hauptsächlich mit diesen drei Problemen beschäftigt. Am Schlusse ist jedenfalls zu lesen نسبة (Verhältniss) statt قسمة (Theilung). H. Ch. (II. 213) hat unter den „mittleren Büchern" diese Schrift unter dem Titel: Liber cognitionis dimensionis figurarum, aber ohne Verfasser, die Flügel in Klammern hinzufügt (auctoribus filiis Musae). Vergl. f. weiteres Šteinschneider (l. c. p. 44—48).

Al-Mâhânî.

125) Lebte nach Delambre (Hist. de l'astron. du moyen âge, p. 79) um die Mitte des 9. Jahrhunderts. Er verfasste nach dem Fihrist (s. Art. Eukleides) einen Commentar zum 5. Buche des Eukl. Ist dies vielleicht identisch mit seiner Abhandlung über das Verhältniss? — 126) Casiri (I. 431) hat عروض statt عروش und übersetzt: de latitudinibus siderum; allerdings ist auch عروش = Throne ein astronom. Begriff (vergl. Sédillot, Mém. sur les instr. astron. des Arabes in Mém. prés. par div. Sav. à l'Acad. des inscript. Tom. I. 1844. p. 221). — 127) So übersetzt Flügel, A. 128, während Woepke wahrscheinlich mit mehr Recht liest: dans la démonstration desquelles on n'a pas besoin de la supposition du contraire. Er führt dann auch diese 26 Sätze des ersten Buches an (Vergl. L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, p. 2). — Woepke gibt auch aus dem MS. 952. 2 (Suppl. arabe) einen Commentar al-Mâhânîs zum 10. Buche Eukl. an (Mém. prés. par div. Sav. à l'Acad. des Sciences, Tom. XIV. p. 663).

Al-ʿAbbâs.

128) War nach Casiri (I. 431) ein Zeitgenosse al-Mâmûns. — H. Ch. (III. 466) schreibt ihm noch astron. Tafeln zu.

Ṯâbit ben Ḳurra.

129) Diese Altersangabe verstehe ich nicht; 211 und 288 sind doch Jahre d. Hidschra und dies sind Mondjahre, also wurde Ṯâbit 77 Mondjahre = 74,6 Sonnenjahre alt; ich vermisse hierüber jede Anmerkung. — 130) Es ist dies der im Anfang des dritten Buches der Sphaerik des Menelaos stehende Satz über die sechs Abschnitte, die auf den Seiten eines sphärischen Dreieckes durch einen sie schneidenden grössten Kreisbogen entstehen (entsprechend dem Transversalensatz des Menelaos für das ebene

Dreieck), und der mit dem Namen der Regula sex quantitatum, oder Regula intersectionis, oder der arabischen Uebersetzung entsprechend mit Figura sector oder Figura secantis (شكل القطّاع) bezeichnet wird. Vergl. Anmerkung 120 und Cantor (Vorlesg. I. 350 u. 356) und Steinschneider (Die mittleren Bücher der Araber. Z. f. M. Ph. Jahrg. 10 p. 494—496). — Casiri (I. 399) führt den Codex 967 des Escurial an, welcher enthält: Thabeti opusculum de sectionibus conicis, ubi de figura cui nomen secans. Auch der Pariser Codex 952. 2. (Suppl. arabe) enthält ein MS. dieser Schrift. — **131**) Es wird von verschiedenen Autoren (u. A. v. H. Ch. V. 154) dem T̲âbit auch ein Liber datorum (sive definitorum. H. Ch.) zugeschrieben; der Fihrist kennt kein solches unter T̲âbit, auch erwähnt er unter Eukleides den T̲âbit nicht als Commentator seiner Data, was H. Ch. (l. c.) thut; es ist noch nicht entschieden, in welcher Beziehung diese Data des T̲âbit zu denen des Eukleides stehen. Wie wir unter Archimedes gesehen haben, wird auch diesem vom Verf. des Fihrist (ebenso v. H. Ch. l. c.) ein Buch des Bestimmten (Gegebenen, Vorausgesetzten) zugeschrieben. — Casiri (I. 386 u. f.) führt noch eine grosse Zahl medicin., math. und astron. Werke des T̲âbit an, die ich hier nicht alle anführen kann.

Sinân ben T̲âbit.

132) Daselbst (Fihrist p. 302) sind aber keine math. Werke von ihm erwähnt, der betreffende Artikel zeigt überhaupt eine Lücke nach den Worten: „An Büchern verfasste er“.. — Casiri (I. 438) führt von ihm eine Reihe von Werken an, von denen ich hier nur folgende erwähne: Commentarius in librum „Acatonis“ (Steinschneider, Eukl. bei d. Arab., Z. f. M. Ph. Jahrg. 31. p. 96 vermuthet „Euklid“) de elementis Geometriae, cui non pauca de suo adjecit. Liber de figuris rectilineis in circulo. Commentarius in librum Archimedis de figuris triangularibus, conoidibus etc. (von conoid. steht nichts im arab. Text), quem Josephus Sacerdos ex Syriaco sermone in Arabicam transtulit: quam versionem Senanus etiam castigavit. — Er starb nach Casiri (I. 437) i. J. 331 (943). — **133**) Vergl. Wüstenfeld p. 37. No. 84.

Abû'l-Ḥasan al-Ḥarrânî.

134) Auch von diesem sind daselbst (Fihrist p. 303) keine mathem. Schriften angeführt.

Ibrâhîm ben Sinân ben T̲âbit.

135) Ueber sein Todesjahr habe ich keine Angaben anderswo gefunden. — **136**) Flügel, A. 128 u. f. hat über diesen Autor eine ziemlich umfangreiche Stelle aus Ibn-al-K. (p. 67) abgedruckt, die ich hier in ihren wesentlichen Punkten wiedergebe; nachdem Ibn al-K. die auch von H. Ch. (V. 48, 87 u. 113) angeführten Werke Ibrâhîms: „Ueber die Schatteninstrumente (Sonnenuhren)“, „über die Erklärung der Construction und Anwendung der Sonnenuhren“ und „über den Schatten“ kurz besprochen hat, fährt er fort: „Dann verfasste er auch ein Buch über das, was Ptolemaios

nach der Methode der ebenen (geometrischen?) Darstellung[f] für die Auffindung (Erklärung) der Ungleichheiten des Saturns, Mars' und Jupiters angewandt hatte; er behandelte dies in einer einzelnen Schrift, die er im 24. Lebensjahre vollendete und in der er zeigte, dass, wenn er (Ptolemaios) von dieser Methode abgewichen und zu einer andern übergegangen wäre, er die ebene (geometr.?) Darstellung hätte entbehren können, welche er angewandt hatte; er (Ibrâhîm) schlug aber einen andern Weg als den der Messung (Vergleichung, Analogie?) ein.*) Ueber die Geometrie verfasste er 13 Abhandlungen, 11 derselben handeln über die sich berührenden Kreise, er zeigte darin alle möglichen Arten der Berührung von Kreisen und von Linien, die durch (gegebene) Punkte gehen und And. Dann verfasste er noch eine andere Schrift (hier folgt eine verdorbene Stelle تنمية ثلث عشرة (?)), in welcher er 41 schwierige geometrische Probleme behandelte über Kreise und Gerade, über Dreiecke und sich berührende Kreise und And. mehr. Er wandte darin die Methode der Analysis an, ohne sich der Synthesis zu bedienen, ausser bei drei Aufgaben, welche der Synthesis bedürfen. Ebenso schrieb er eine Abhandlung, in welcher er die Art und Weise der Auflösung geometrischer Aufgaben vermittelst der Analysis und Synthesis und anderer Ausführungsarten, die bei geometrischen Aufgaben auftreten, beschreibt und über die Irrthümer handelt, die den Geometern bei der Anwendung der Methode der Analysis begegnen können, wenn sie dieselbe gemäss ihrer Gewohnheit abkürzen wollen.**) Er verfasste auch eine schöne (subtile) Abhandlung über die Construction der drei Kegelschnitte, in welcher er zeigt, wie auf (von) jedem der drei Kegelschnitte eine beliebige Anzahl Punkte gefunden werden können". — Diese letztere Abhandlung wird wohl identisch sein mit dem im Fihrist genannten Commentar zum ersten Buche der Kegelschnitte.

Abû'l-Ḥusain ben Karnîb und Abû'l-ʿAlâ, sein Sohn.

137) Bezüglich ihrer Lebenszeit ist mir nur aus Casiri (I. 433) bekannt, dass Abû'l-ʿAlâ bald nach dem Jahre 348 (959) der Lehrer Abû'l-Wafâs in ʿIrâḳ war.

Abû Muḥammed al-Ḥasan.

138) Ueber seine Lebenszeit habe ich keine Angaben gefunden. — 139) Hiermit ist wahrscheinlich das fünfte Buch der Elemente gemeint. Hammer (Lit. Gesch. d. Araber V. 308) macht aus dieser Abhandlung zwei: „Erklärung dessen, was schwierig ist in dem Buche Euklids" und „über die Proportionen, in einem Tractat". Es wäre auch möglich, dass statt نسبة zu lesen wäre قسمة, dann wäre es das Buch der Theilung (der Figuren).

---

*) Diese Arbeit über Ptolemaios ist wohl das im Fihrist genannte Buch über die Zwecke des Almagestes.

**) Diese Abhandlung befindet sich in dem MS. 952. 2 (Suppl. arabe) fol. 1—18. s. Woepke, Mém. prés. à l'acad. des sc. Tom. XIV. Paris 1856. p. 663.

Al-Fazârî.

140) Ueber seine Lebenszeit finde ich keine Angaben, oder sollte er etwa, wie Flügel, A. 129 zu vermuthen scheint, identisch sein mit dem von Jaʿkûbî im Kitâb al-Buldân (p. 13) erwähnten Astronomen und Baumeister al-Manṣûrs Ibrâhîm ben Muhammed al-Fazârî? — 141) Ist eine Art von Astrolabien, deren von den Arabern viele unterschieden wurden. Vergl. H. Ch. I. 397 und Dorn, p. 83—87.

ʿOmar ben al-Farruchân.

142) Lebte nach Casiri (I. 362) und Ibn al-K. (p. 279) zur Zeit al-Mâmûns. — 143) Casiri (I. 362) übersetzt المحاسن mit „de viris bene meritis“(?) — 144) Casiri (l. c.) lässt الكواكب weg und übersetzt في خطوط mit „cum notis interlinearibus“. Der Codex Escurial. 917 enthält von ihm: Elementa astrologica (Casiri l. c.). Vergl. auch den Art. „Dorotheos“.

Abû Bekr.

145) مقياس kann nach Dorn (p. 88) auch die Sonnenuhr selbst bedeuten. Casiri (I. 431) übersetzt: de instrumento mensorio (seu de nilometro). — 146) Casiri (l. c.) schreibt: ad astronomiam, was nicht im arabischen Text steht. — 147) اختيارات = electiones = Tagewählerei (Flügel), in der Astrologie die Auswahl der nach den Constellationen günstigen Zeit (Tage, Stunden) zur Vornahme irgend einer Handlung (vergl. H. Ch. I. 198); der heute noch gebräuchliche Ausdruck „Loostage“ wäre wohl hier der bezeichnendste. — 148) تسييرات = profectiones oder directiones. Es ist dies ein astrologischer Begriff, für den ich kein passendes deutsches Wort gefunden habe. Derselbe befindet sich u. A. in den Prolegom. des Ibn Chaldûn (Uebers. v. de Slane in den Notices et extr. des Ms. de la bibl. impér. Tom. XX. 1865, p. 219), wo vom Uebersetzer in einer Note eine Stelle aus der Astrolog. gallica v. Morin angeführt wird, worin es heisst: Directio nihil aliud est quam movere sphaeram, donec locus secundus, hoc est promissor, traducatur ad situm primi, sive significatoris (d. i. des Regenten). Vergl. auch Delambre, Hist. de l'astron. du moyen âge, p. 489, und Sédillot, Prolégom. aux tables d'Oloug Beg. p. 211. Ich glaube daher, dass Flügel im H. Ch. II. 296 dieses Wort unrichtig durch „cursus et motus“ wiedergibt. — 149) Die Codices haben statt ميالات verschiedene andere Lesarten, so Casiri nach Ibn al-K. مثالات und übersetzt (I. 431) de parabolis (?); vielleicht könnte es aus einem Pural von ميل verdorben sein. Die arabische Astronomie unterschied nämlich verschiedene Neigungen (Schiefen), so die erste, zweite, grösste und totale (vergl. Dorn, p. 112 u. 149 und Sédillot, Mém. prés. à l'acad. des inscript. Tom. I. p. 227); oder es könnte auch ein astrolog. Begriff sein; vergl. die letzte Schrift im Art. Abû Maʿschar.

Mâ-schâ-allâh.

150) In den mittelalt.-lat. Schriften über Astrologie wird er gewöhnlich Messalah oder Messahalach genannt; vergl. Casiri I. 435, Abulphar.

p. 248 (Uebers. 161). — 151) Vergl. Fihrist, A. 129. — 152) Casiri (l. c.) macht aus diesem Werke zwei: de planetarum conjunctionibus, et de gentium sectis, was vielleicht das richtige sein wird. — 153) Casiri (l. c.) übersetzt: de expellendo reipublicae regimine. — 154) Casiri (l. c.) hat statt حدوث (Ereignisse) حدود und übersetzt: de rerum definitionibus (was er an andern Orten mit „Horoskope" übersetzt). — 155) d. h. über die magischen Eigenschaften der Buchstaben علم خوص الحروف, dies war ebenfalls ein wesentliches Capitel der Astrologie und Magie (vergl. Flügel, Loosbücher d. Muh.). — 156) Wahrscheinlich astrologisch: über die Auswahl der Reisetage.

Abû Sahl al-Faḍl ben Nûbacht.

157) Vergl. Casiri (I. 421) und Abulphar. p. 224 (Uebers. 145). — 158) Eigentlich das Buch des astrologischen oder mit Hülfe der Gestirne gewonnenen Fâls (s. Flügel, Loosbücher, p. 15—16 und Anmerkung 9). Flügel in H. Ch. (VI. 6) übersetzt: claves decreti divini. — 159) Könnte auch heissen: über die Aehnlichkeit und die Abbildung; es ist aber sehr wahrscheinlich keine geometrische, sondern eine astrologische Schrift. — 160) Hier übersetzt Casiri (l. c.) sehr einfach: Excerpta varia astrologica.

Sahl ben Bischr.

161) Ueber Lebenszeit und Wohnsitz habe ich keine weiteren Angaben gefunden als diejenigen Casiris (I. 439), die er seiner Uebersetzung des arabischen Textes in Klammern beifügt: Hispanus tertio Egirae seculo jam ineunte nobilis, was ziemlich unwahrscheinlich ist. Vergl. auch die Bemerkung zum zweitletzten Werke Sahl ben Bischrs, dass er es in Chorasan verfasst habe. — 162) Hier fehlt wahrscheinlich eine nähere Bestimmung. — 163) الاعتبارات = die Erwägungen; اعتبارى = relativ, im Gegensatz zu مطلق = absolut; sollte es vielleicht heissen اجتماعات = Conjunctionen (des Mondes)? — 164) Vergl. Fihrist, A. 130 (274. 5).

Al-Chowârezmî.

165) Genaueres über seine Lebenszeit findet man nirgends. — 166) Leider ist dieser Artikel über einen der bedeutendsten arabischen Mathematiker unzweifelhaft verdorben, denn seine beiden bis auf unsere Zeit erhaltenen Hauptwerke, die Algebra und die indische Rechnungsweise (der sog. Algorithmus) fehlen. Casiri hat keinen eigenen Artikel über Muhammed ben Mûsâ, sondern nur zerstreute Stellen (so I. 371, wo er ihn nach Cardanus als den „algebrae instaurator" bezeichnet), H. Ch. erwähnt (V. 67) seine Algebra unter anderen Werken gleichen Inhaltes und fügt hinzu: Hic est primus, qui de Algebra scripsit, und Ibn al-K. (p. 326) schreibt nach Flügel, A. 130 einfach den Fihrist ab. Es ist also möglich, dass diese Stelle des Fihrist schon vor Ibn al-K. verdorben gewesen ist. Wahrscheinlich liegt nun hier eine Verschiebung vor; man beachte nämlich, dass diese beiden Schriften nebst derjenigen „über die Vermehrung und die Verminderung" dem folgenden Autor, dem Sind ben ʿAlî, am Schlusse des Artikels zugeschrieben sind; es ist nun möglich, dass dieselben urspünglich

unter al-Chowârezmî gestanden und durch Abschreiber an den Schluss des nächsten Artikels über Sind ben ʿAlî verschoben worden sind; umgekehrt könnten auch die letzten Schriften Sind ben ʿAlîs dem Chowârezmier zugeschoben worden sein, so dass also eine Vertauschung der drei letzten Schriften unter diesen beiden stattgefunden hätte. Diese Verwechslungen waren um so eher möglich, als hier vier Mathematiker aufeinander folgen, die alle am Hofe al-Mâmûns zu gleicher Zeit als astronomische Beobachter lebten; man beachte noch, dass allen vieren, ausser Sind ben ʿAlî, astronomische Tafeln zugeschrieben sind und zwar bei zweien „in zwei Ausgaben", und dass bei Sind ben ʿAlî eine Abhandlung „über die Schneidenden", „in zwei Ausgaben" vorkommt — vielleicht sollte es hier statt „über die Schneidenden" heissen „astronomische Tafeln", oder dieses ist nach „Schneidenden" ausgefallen? — Dass der Verfasser des Fihrist die oben genannten Werke ursprünglich dem al-Chowârezmî beigelegt hat, wird auch noch sehr wahrscheinlich dadurch, dass in der Folge Commentatoren der Algebra (Abû'l-Wafâ) und der „Vermehrung und Verminderung" (ʿAbdallâh ben al-Ḥasan) des Chowârezmiers genannt werden. Ich muss hier noch bemerken, dass es mir aufgefallen ist, dass Woepke, wo er über das Buch „de l'augmentation et de la diminution" spricht (Journ. asiat. 6. Série, Tom. I. 1863), die Lücke im Artikel des Fihrist über al-Chowârezmî nicht erwähnt.

Sind ben ʿAlî.

167) So ist wohl المنفصلات والمتوسطات zu übersetzen, obwohl statt des zweiten Wortes eher الموسّطات stehen sollte; es wird dies also eine Abhandlung über das 10. Buch Eukl. sein (vergl. Art. Eukleides), oder wenigstens über die Irrationalitäten. — 168) Casiri (I. 440) erwähnt, dass Sind auch astronomische Tafeln verfasst habe und so ist wohl die oben (Anmerkg. 166) ausgesprochene Vermuthung berechtigt, dass die Worte „in zwei Ausgaben" nicht zu „Schneidenden", sondern zu ausgefallenen „astronomischen Tafeln" gehören. — 169) In Bezug auf die drei letzten Werke siehe Anmerkg. 166; über das zweite vergl. noch Cantor, Vorlesg. I. 627 u. f.

Jaḥjâ ben Abî Manṣûr.

170) Vergl. Casiri I. 425 und Abulphar. p. 248 (Uebers. 161).

Ḥabasch ben ʿAbdallâh.

171) Ibn al-K. (p. 199) und Abulphar. (p. 247. Uebers. 161) zählen drei Arten von Tafeln auf: die Sindhindischen, die erprobten (d. h. durch eigene Beobachtung) und die kleineren, betitelt al-Schâh (des Königs); Reinaud (Mém. sur l'Inde, p. 319) nennt die letzteren die persischen. Eigenthümlicherweise zählt Ibn al-K., nachdem er von diesen drei Tafeln gesprochen hat, unter den nach dem Fihrist angeführten Schriften al-Merwazîs nur zwei Tafeln (die damascenischen und die mâmûnischen) auf. — 172) Obgleich im Text السطوح = Fläche, ebene Fläche steht, so bin ich doch der Ansicht, dass es sich hier um Astrolabien, oder vielleicht noch besser um Sonnenuhren und Astrolabien handelt; die ersten drei Adjective,

„horizontal", „senkrecht", „geneigt", entsprechen in ihrer arabischen Form genau den drei Arten von Sonnenuhren, welche die Araber unterschieden (vergl. Dorn, p. 86), und das letzte Adjectiv „schief" (منحرفة) bezeichnet eine besondere Art von Astrolabium, das den Namen nach der eigenthümlich geformten Alhidade (العضادة المنحرفة) erhalten hat (vergl. Woepke, über ein in d. kgl. Bibl. zu Berlin befindl. arab. Astrolab. Abhdlg. der k. Acad. zu Berlin, Jahrg. 1858, math. Thl. p. 3).

Ibn Ḥabasch.

173) Er ist der Sohn des vorigen, der bei Ibn al-K. auch Aḥmed ben ʿAbdallâh heisst. Näheres über sein Leben habe ich nicht gefunden.

Die Erzählung des Ibn al-Muktafî.

174) Dieser starb nach Abulphar. (p. 329. Uebers. 216) im Jahre 377 (987). Wie aber seine Erzählung an diese Stelle kommt, ist nur wieder durch Verschiebungen der Abschreiber zu erklären, sie stand jedenfalls ursprünglich nach dem Art. über Abû Maʿschar, oder demjenigen über Sind ben ʿAlî.

Al-Ḥasan ben Sahl ben Nûbacht.

175) Er lebte nach Abulphar. (p. 258. Uebers. 168) unter den Chalifen al-Wâṯiḳ und al-Mutawakkil (842—861).

Ibn al-Bâzjâr.

176) Lebte nach Casiri (I. 432) als Astrologe unter al-Mâmûn.

Churzâḏ ben Dârschâd.

177) Ibn Challikân (No. 849) schreibt nach Flügel, A. 131 Churrazâḏ. Ich habe keine weiteren Angaben über ihn gefunden.

Die Söhne aṣ-Ṣabbâḥs.

178) Ueber ihre Lebenszeit habe ich keine Angaben gefunden. Vergl. Ibn al-K. p. 69.

Al-Ḥasan ben al-Chaṣîb.

179) Casiri (I. 413—14) nennt ihn einen Perser und sagt, er habe sein Buch, Florilegium betitelt, dem Jaḥjâ ben Châlid, der zur Zeit Hârûn ar-Raschîds lebte, gewidmet; der Fihrist aber schreibt dieses Buch dem folgenden Autor al-Chajjâṭ mit derselben Bemerkung zu; es scheinen hier wieder Verwechslungen oder Verschiebungen stattgefunden zu haben. — 180) Kârimihtar ist persisch und bedeutet „das grössere Werk".

Al-Chajjâṭ.

181) Vergl. Anmerkg. 179; ich halte Casiris Uebersetzung „Florilegium" für die treffendste. Vergl. auch Steinschneider, die mittleren Bücher der Araber (Z. f. M. Ph. Jahrg. 10. p. 463).

ʿOmar ben Muḥammed al-Marwarûḏî.

182) Andere Codices haben al-Merwazî, Casiri (I. 435) al-Merw al-Ruzi (in urbe Merw in Persia natus); nach ihm war er der Enkel Châlid ben ʿAbdulmaliks, und gab nach dessen und Sind ben ʿAlîs und Anderer System und Berechnung verfertigte astronomische Tafeln heraus.

Al-Ḥasan ben aṣ-Ṣabbâḥ.

183) Ist wahrscheinlich identisch mit dem dritten der oben genannten Söhne aṣ-Ṣabbâḥs.

Abû Maʿschar.

184) Ist der im Mittelalter unter dem Namen Albumasar berühmte Astrolog. — 185) Casiri (I. 351) übersetzt: Tabulae de annonae inopia et fraudibus? Es ist aber hazârât ein persisches Wort, welches „Tausende" bezeichnet und von Abû Maʿschar in der Bedeutung von „Perioden von 1000 Jahren" gebraucht wurde. (Vergl. auch Reinaud, p. 329.) — 186) النكت bezeichnet: Anecdoten, witzige, treffende Reden, vieldeutige Antworten; Casiri (l. c.) übersetzt: de astrorum signis et vestigiis?! — 187) d. h. der Jahrtausende (hier braucht Abû Maʿschar nicht den pers. Ausdruck hazârât für „Tausende", sondern den arab. الوف); diese Schrift handelt von den Tempeln und andern monumentalen Gebäuden, die in jedem Jahrtausend auf der Erde errichtet worden sind. Vergl. Flügel, A. 131 und H. Ch. V. 50. — 188) In den Prolegom. des Ibn Chaldûn (Trad. par De Slane, Notices et extraits des MS. de la bibl. impér. Tom. XIX. Paris, 1862 p. 245) liest man: al-zaïrdja, une figure, sur la quelle ils (les astrologues) opèrent, elle a la forme d'un grand cercle, qui renferme d'autres cercles concentriques, dont les uns se rapportent aux sphères célestes, et les autres aux éléments, aux choses sublunaires, etc. — On y remarque aussi des chiffres appartenant au caractère nommé ghobar. — In denselben Prolegom. III. Theil (Notices et extraits, Tom. XXI. p. 199 u. ff.) liest man: nous indiquerons ensuite le caractère de cette opération (avec la zaïrdja), la quelle n'a aucun rapport réel avec le monde invisible et consiste uniquement à trouver une réponse qui soit d'accord avec une question, et qui, étant prononcée, offre un sens raisonnable. — H. Ch. (III. 530) sagt: الزائرجة = ars ex literis continua mixtione extractis verba eliciendi, quibus quae in futurum nobis vel accident vel non accident, significantur. — Ich vermuthe, dass das unter Valens angeführte Buch az-Zabradsch heissen sollte az-Zâïrdscha. — 189) al-intihâ'ât und al-mamarrât sind zwei astrologische Kunstausdrücke: der erstere bedeutet nach Sédillot (Prolégom. aux tables d'Oloug-Beg, p. 215—218) les termes (Grenzen?) und ist verwandt mit demjenigen der profectiones; derselbe ist aber mit wenigen Worten schwer klar zu legen, ich muss daher den Leser auf das genannte Werk Sédillots verweisen; der letztere (nach Dorn, p. 78) ist identisch mit ḏawât al-afâk, und dies sind die Kreise (der Astrolab.), auf denen die Himmelsgegenden verzeichnet sind: die Horizontkreise. — 190) درج bedeutet wohl hier nicht „Grade" im Sinne der Geometrie oder Astronomie, sondern vielmehr die Stufenjahre des Lebens, die anni climacterici (vergl. Salmasius,

de annis climact.). — 191) احترافات gibt keinen Sinn, es sollte vielleicht heissen انحرافات d. h. die Abweichungen, nämlich der Gebetsrichtung (Ḳibla) vom Meridian eines Ortes (vergl. Dorn p. 33, und Sédillot, Mémoire p. 101). Oder hängt es etwa mit den magischen Eigenschaften der Buchstaben (حرف pl. حروف) zusammen? Ich finde freilich diese Form in Flügels „Loosbücher der Muhammed.“ nicht. Casiri (l. c.) hat احترامات und übersetzt: rerum evitandarum. — 192) Vergl. Anmerkg. 149 (Abû Bekr).

ʿAbdallâh ben Masrûr an-Naṣrânî.

193) Vergl. Casiri I. 403. Näheres über sein Leben fand ich nicht.

ʿUṭârid ben Muḥammed.

194) Ich habe über seine Lebenszeit keine Angaben gefunden. H. Ch. (IV. 113) hat von ihm: constellationes astrorum und fügt hinzu: minime tamen veritati et rectae rationi respondet.

Jaʿḳûb ben Ṭâriḳ.

195) Casiri (I. 425) macht ihn zum Spanier, aber fügt nichts Weiteres über sein Leben hinzu. — Reinaud (Mém. sur l'Inde, p. 313—14) bemerkt, Albîrûnî berichte, Jaʿḳûb ben Ṭâriḳ habe seinen Traité de la sphère im Jahre 161 (777) verfasst, und fügt hinzu: Il paraît avoir écrit dans Bagdad même, et sous la même inspiration que Muhammed al-Fazary. — 196) Kardadschât al-Dschaib. Dschaib ist bekanntlich das arabische Wort für Sinus, und Kardadschât soll nach Reinaud (l. c.) corrumpiert sein aus dem indischen „cramadjya“, welches sinus rectus bedeutet (d. h. der Sinus von 225′, der von den Indiern nicht mehr vom Bogen unterschieden werden konnte; vergl. Cantor, Vorlesg. I. p. 560). Nach dem Titel dieser Schrift scheint nun Jaʿḳûb diesen Sinus rectus noch weiter getheilt, d. h. die Sinus der Winkel unter 225′ berechnet zu haben, wie er auch die Tafeln „Sindhind“ vervollkommnet (d. h. von Grad zu Grad berechnet) hat. — 197) دول kann auch heissen Geschicke, Schicksalswechsel, und dann würde علم الدول die Astrologie, oder ein bestimmtes Gebiet derselben bedeuten.

Abû'l-ʿAnbas.

198) Casiri (I. 409) sagt von ihm: Traditur gloria stimulis exagitatus aliorum scripta sibi arrogasse, sonst nichts über sein Leben. Flügel, A. 64 sagt, aṣ-Ṣaimarî sei der im Jahre 243 (857) gestorbene Tischgenosse des Chalifen Mutawakkil gewesen.

Ibn Sîmawaih.

199) Casiri (I. 416) hat über ihn nicht mehr als was im Fihrist steht.

ʿAlî ben Dâûd.

200) Casiri (I. 408) erwähnt einen Abû Dâûd, genere Judaeus, Iracensis, Bagdadi floruit ante seculum Egirae tertium, professione astrologus. Vielleicht sind diese Beiden identisch.

Ḥâriṯ, der Astrolog.

201) Lebte also, da er mit al-Ḥasan ben Sahl befreundet war, zur Zeit der Chalifen al-Wâṯiḳ und al-Mutawakkil; vergl. Anmerkg. 175.

Ibn Abî Ḳurra.

202) Lebte nach Casiri (I. 409) ums Jahr 267 (880), denn er fügt zu Muwaffaḳ hinzu: Is anno Egirae 267 Caliphatum usurpavit.

Al-Farġânî.

203) Seine Blüthezeit fällt in die Regierung al-Mâmûns (813—833), doch habe ich keine genaueren Notizen über seine Lebenszeit gefunden. — 204) Es sind dies seine Elemente der Astronomie, 1590 von Jakob Christmann, Frankfurt, und 1669 von Golius, Amsterdam, arabisch und lateinisch herausgegeben. Casiri (I. 432) macht aus dem Zusatz „Auszug aus dem Almagest" ein eigenes Werk: de Almagesti electionibus. H. Ch. (IV. 438—39) hat: Liber triginta sectionum statt liber elementorum; allerdings haben die Codices الفصول statt الاصول, wie es eigentlich heissen sollte, und wie auch der innere Titel der Goliusausgabe wirklich lautet: فى اصول علم النجوم; die Schreibweise der Codices kommt von den 30 Abschnitten (فصول) her, in welche das Buch getheilt ist. — 205) H. Ch. (II. 288) erwähnt von ihm noch ein Planisphaerium, und V. 419: explanator perfectus de doctrina sphaeram in planitiem redigendi, auctore el-Fergani.

Ibn Abî ʿAbbâd.

206) Ueber seine Lebenszeit fand ich keine Angaben. — 207) So übersetzt Dorn p. 85, die nächste Bedeutung von شعبة ist Zweig, Ast, dann auch Rinne, Rinnsal.

An-Nairîzî.

208) In verschiedenen Codices und auch bei H. Ch. (V. 386) steht Tebrîzî statt Nairîzî, letzteres ist aber nach Flügel u. And. das richtige (Nairîz oppidum Persiae, quod simile est Tabrizo: Wenrich p. 186 nach Ibn al-K.). Weitere Angaben über sein Leben habe ich nicht gefunden, da er aber für al-Muʿtaḍid ein Werk verfasst hat, so muss er ums Jahr 900 zur Zeit Ṯâbits gelebt haben. — 209) Casiri (I. 348) und H. Ch. (V. 386) haben einen Commentar zum Almagest (nicht Quadripartitum). Im Text des Fihrist soll im Titel dieses Werkes jedenfalls der Strich über dem zweiten كتاب weggelassen werden.

Al-Battânî.

210) Der im Mittelalter unter dem Namen Albategnius bekannte, berühmte Astronom. Vergl. über sein Leben und seine Schriften auch Casiri I. 343—344, Abulphar. (p. 291, Uebers. 191), Vite di matematici arabi di Bernard. Baldi, con note di Steinschneider, Roma 1873, p. 21—32. — 211) Steinschneider (l. c.) ist der Ansicht, dass ein in verschiedenen Ausgaben vorkommender lateinischer Tractat, betitelt: de ortu triplicitatum, der gewöhnlich im Verein mit andern Schriften Bethens, d. i. Albattânîs,

gedruckt vorkommt, mit dieser Abhandlung über den Aufgang der Häuser etc. identisch sei; in der That heissen in der Astrologie je drei Zeichen des Thierkreises, also ein Viertel desselben, eine Triplicitas. Allein dieser Tractat ist so unbedeutend (gewöhnlich erscheint er nur als Anhängsel zu den ebenfalls sehr geringfügigen „horae planetarum") und sein Inhalt hat so wenig mit Conjunctionen zu thun, dass wir der Ansicht sind, der Schlusssatz „auch bekannt als seine Abhandlung über" etc. müsse ursprünglich anders gelautet haben, d. h. mit andern Worten, es solle damit ein selbstständiges Werk gemeint sein.

Ibn Amâdschûr.

212) Casiri (I. 403) nennt ihn einen Perser, aus Herat gebürtig, ex regia Pharaonum stirpe. Lebenszeit unbestimmt. — 213) القن kann ich hier nicht anders als durch „Frage" übersetzen. — 214) Es ist kaum anzunehmen, dass hier ممرّات die Horizontkreise bedeute. Vergl. Anmerkg. 189. Casiri (l. c.) hat statt diesem مريخ (Mars) und übersetzt: Liber tabularum martis secundum Persarum computum conditarum.

Sein Sohn Abû'l-Ḥasan ʿAlî.

215) H. Ch. erwähnt an mehrern Stellen (IV. 141. VI. 243. 436) einen Abû'l-Ḥasan ʿAlî ben Abî'l-Ḳâsim el-Beihaḳi, vulgo Funduḳ dictus, der aber kein Mathematiker war.

Al-Harûnî.

216) Nach Casiri (I. 426) ist Harawî, d. h. aus Herat, das richtige. — H. Ch. (II. 121) nennt einen Yusuf ben Gorion Israili al-Harûnî, der aber Historiker war und eine Geschichte der Israeliten geschrieben hat. — 217) Casiri (l. c.) übersetzt الزرق النجومى mit Caerulea Sidera, de futurorum praedictionibus (?).

Aṣ-Ṣaidanânî.

218) Siehe Anmerkung 166.

Al-Adamî.

219) Casiri (I. 430) und Reinaud (Mém. sur l'Inde, 320) berichten nach Ibn al-K. von seinem Sohne Muḥammed ben al-Ḥusain (vielleicht liegt eine Umstellung der Namen vor, so dass beide identisch wären), er habe astronomische Tafeln nach dem Sindhind verfasst, die eine grosse Berühmtheit erlangt hätten; er habe sie aber nicht vollenden können, sie seien dann nach seinem Tode im Jahre 308 (920) von seinem Schüler al-Ḳâsim ben Muḥammed herausgegeben worden. Hieraus würde sich eine obere Grenze für die Lebenszeit al-Adamîs ergeben. — 220) al-ḥarâfât gibt keinen Sinn, wahrscheinlich soll es heissen al-inḥirâfât = die Abweichungen (Azimuthe d. Ḳibla). — 221) Vergl. Dorn p. 77.

Ibn Nâdschija.

222) Casiri (I. 433) nennt ihn einen Spanier.

Abû ʿAbdallâh.

223) Flügel sagt im Fihrist, A. 132 zu الرخامة المطبلة: Unstreitig eine Sonnenuhr, die die Mittagsstunde durch Beckenschall andeutete. Vergl. dagegen Dorn, p. 87. رخامة = Marmorplatte, bedeutet übrigens nicht bloss Sonnenuhr, sondern nach Tschaghminy (vergl. Dorn, p. 86) ein Instrument von Stein, Messing oder Anderem, für eine bestimmte Breite, länglich oder rund, mit Linien versehen, z. B. der Linie der Neige und der Gleiche, durch welches man viele Operationen ausführen könne, z. B. die Bestimmung der Höhen, der Zeiten, der Schatten u. s. w. — Die Bedeutung „trommelförmig" würde dann allerdings eher die Form طبلية oder vielleicht auch مطبلية voraussetzen, aus welch' letzterer leicht diejenige des Fihrist entstehen konnte. — **224**) Es sollte im Texte wohl heissen بناديق, denn بنادق bedeutet „Schleudersteine".

Die neueren Rechner und Arithmetiker.

225) Damit meint jedenfalls der Verfasser des Fihrist, aus den Werken der aufgeführten Autoren zu schliessen, diejenigen Mathematiker, die sich hauptsächlich mit praktischer Mathematik, d. h. mit der indischen Rechnungsweise, der sog. bürgerlichen Arithmetik, und der praktischen Geometrie (Flächen- und Körperberechnung) beschäftigt haben.

ʿAbdalḥamîd.

226) Casiri (I. 405) hat an Stelle des letzteren Werkes zwei: De ingeniosis arithmeticis inventis und de numerorum proprietatibus.

Abû Barza.

227) Er ist der Enkel des vorigen und deshalb sollte es hier wohl heissen: ben Wâsiʿ ben Turk. Casiri (I. 408) berichtet von ihm, dass er in Bagdad lebte, sich in der Wissenschaft der Zahlen ausgezeichnet habe und daselbst im Jahre 298 (911) gestorben sei. I. 421 nennt er ihn „Persa".

Abû Kâmil.

228) Ueber seine Lebenszeit habe ich keine Angaben gefunden. — **229**) Die Algebra wird von H. Ch. mehrmals erwähnt, so II. 585: كتاب الشامل = das Umfassende, quod in optimis huius generis (er spricht nämlich hier von Büchern über Algebra) operibus numeratur, et optimus eius commentarius Coreshi (?) auctorem habet; IV. 10, wo er zu dem شامل noch فى الجبر والمقابلة = „über die Algebra" hinzufügt; V. 27, wo er كامل statt شامل hat, was aber dasselbe bedeutet. — H. Ch. (V. 68) heisst es bei Besprechung der Algebra des Muḥammed ben Mûsâ: Abû Kâmil etc. in libro el-waṣâjâ bi'l-jebr we'l-mocabelet: Composui, inquit, librum titulo Kemâl el-jebr notum, qui perfectam Algebrae doctrinam et additamenta ad eius principia continet; et argumentis in libro meo secundo confirmavi, libro Mohammedis ben Musa de reductione per aequationem primas partes

et palmam dandas esse etc. Nach H. Ch. hat also Abû Kâmil auch ein Buch betitelt: el-waṣâjâ bi'l-jebr we'l-mocabelet, d. h. über die Erbtheilungen (Testamente) mit Hülfe der Algebra (berechnet, gelöst), verfasst, über welches Gebiet bekanntlich auch Muḥammed ben Mûsâ in seiner Algebra handelt. H. Ch. führt V. 168 noch ein Buch von Abû Kâmil an, betitelt: Buch der Testamente mit Hülfe der Wurzeln (Wurzelrechnung) gelöst; es ist dies aber mit dem eben genannten identisch, denn hier wird aus demselben wieder dieselbe Stelle über Muhammed ben Mûsâs Algebra angeführt wie V. 68; wahrscheinlich sollte statt جذر = Wurzel, جبر = Algebra stehen; Flügel übersetzt übrigens: liber institutionum radicum arithmeticarum. — 230) Es ist dies die sog. Regula al-chatain (eig. chatâ'ain) d. h. der beiden Fehler, die heutige regula falsi; nach dem von Libri (hist. des scienc. math. Bd. I. 304—368) veröffentlichten Liber augmenti et diminutionis und den Bemerkungen von Woepke über diesen Gegenstand (vergl. Journ. asiat. 6. Série, Tom I. p. 513—514) wäre also der Inhalt dieses Buches identisch mit dem des vorhergehenden „Ueber die Vermehrung und die Verminderung" — vielleicht ist ursprünglich im Texte zwischen beiden ويقال له (es wird auch genannt) oder etwas ähnliches gestanden. — 231) Man vergl. damit den Titel des Werkes von al-Karchî: Kâfî fî'l-ḥisâb = Genügendes über das Rechnen.

Sinân ben al-Fath.

232) Ueber seine Lebenszeit habe ich nichts gefunden. — 233) التحت (at-taḥt) bedeutet „der untere Theil", „was unten ist"; dies gibt keinen Sinn; Woepke (Journal asiat. 6. Série, Tom. I. p. 490 u. 493) liest التخت (at-tacht) und übersetzt: Traité de la table relatif au calcul indien, oder Le traité du calcul effectué sur la table. Diese Uebersetzung wäre wohl annehmbar, besonders wenn man damit den Titel eines Werkes von al-Anṭâkî vergleicht, das Ibn al-K., nicht aber der Fihrist anführt: Das Buch über die Rechnungsweise mit der Hand (den Fingern) ohne Tafel. Aber nun kommt hinzu, dass H. Ch. III. 61 über „Ilm hisâb el-taḥt we el-meil" = die Kunst (Wissenschaft) des Rechnens el-taḥt und el-meil (Neigung, Schiefe) folgendes sagt: quae ea ars est, qua ratio cognoscitur, operationes arithmeticas signis tractandi, quae numeros ab uno usque ad decem exprimunt et omnes alios, qui hos excedunt, ope ordinum quo ponuntur excludunt. Haec signa ab Indis originem duxisse dicuntur. — — Eadem doctrina nobis el-taḥt we el-taráb (Erde, Staub = ġobâr) dicitur. Hiernach wäre ḥisâb at-taḥt nichts anderes als das Rechnen mit den indischen Ziffern mit Stellenwerth, die Bedeutung von taḥt und von meil (oder mail) ist aber damit noch keineswegs festgestellt. Ich wage nun die Vermuthung auszusprechen, das Wort „taḥt" bedeute das indische „tatstha", welches die sog. symmetrische oder kreuzweise Multiplicationsmethode bezeichnet, und das Wort „mail" bedeute die schiefe oder Diagonalmethode (vergl. Cantor, Vorlesg. I. p. 519 u. 520). Ich will aber nicht unterlassen, noch durch eine andere Conjectur auch der Woepkeschen Lesart zu ihrem Rechte zu verhelfen: Liest man mit Woepke „tacht" und übersetzt „Tafel", so wäre dann vielleicht das „mail" in H. Ch. = mîl

(welches arabisch gleich geschrieben wird) zu lesen, und „Griffel“ oder „Stift“ zu übersetzen; dann würde also ḥisâb at-tacht wa'l-mîl das indische Rechnen mit dem Griffel auf der Sandtafel, im Gegensatz zum Fingerrechnen bedeuten. Gewissheit wird man über diese Fragen aber erst erhalten, wenn eine dieser Abhandlungen mit dem Titel at-taht oder at-tacht näher untersucht sein wird, was bis jetzt meines Wissens nicht geschehen ist (Woepke gibt l. c. nicht eine Analyse des Inhaltes eines der Werke von Anṭâkî, sondern eines Buches von an-Nasawî, betitelt: le satisfaisant).[g] — **234**) Es kann auch über die Summation von Kuben handeln; vergl. Woepke: Passages relatifs à des sommations de séries de cubes etc. (Journal de mathém. par Liouville, 1864 u. 1865).

Abû Jûsuf al-Miṣṣîṣî.

235) Ueber sein Leben fand ich keine Angaben. — **236**) Ḥisâb ad-daur ist nach H. Ch. III. 62 ein besonderer Fall der Erbtheilungs- oder Testamentsrechnung, er sagt daselbst: Ilm ḥisâb el-dewr we el wesâya, ars legata computandi in orbem circumlata. Haec est ea doctrina, qua quantitas cognoscitur testamento mandata, quando, ut primo adspectu intelligitur, ad ea pertinet, quae in orbem circumferenda sunt. Dann folgt ein längeres Beispiel und am Schlusse: Itaque hac doctrina quantitas partis donatione in alium transeuntis terminatur, et apparet, eius utilitatem magnam esse, quamquam raro tantum necessaria sit. Diese Definitionen sind nicht klar; man vergl. die Algebra von Muḥammed ben Mûsâ, wo Rosen (p. 133) ḥisâb ad-daur mit Computation of returns übersetzt; aus den Beispielen ersieht man, dass es sich hauptsächlich um das Zurückgehen eines Vermächtnisses auf die Hinterlassenen des Testators handelt, wenn der im Testament Bedachte vorzeitig stirbt. Z. B.: Ein Mann auf dem Todtbette emancipiert einen Sklaven, dessen Kaufpreis 300 Dirhem war, und hat sonst kein Vermögen, der Sklave stirbt und hinterlässt 300 Dirhem und eine Tochter, was erhält die Tochter und was muss sie den Erben des Mannes zurückbezahlen.

Ar-Râzî.

237) Lebenszeit unbekannt. Vergl. den Art. Eukleides.

Muḥammed.

238) Casiri (I. 433) fügt zum Namen hinzu: Praetor (Hispalensis), hat aber weiter nichts über die Lebenszeit. Woher Casiri das „Hispalensis“ hat, weiss ich nicht, es steht nicht im arabischen Text.

Al-Karâbîsî.

239) Lebenszeit unbestimmt. Vergl. Art. Eukleides. — **240**) So übersetzen sowohl Casiri I. 410, als auch Wahrmund (arabisches Wörterbuch) misâḥat al-ḥalḳa, was wörtlich „die Ausmessung des Ringes“ heisst; das Planisphaerium heisst sonst: Tasṭîḥ al-Kura.

Ahmed ben Muhammed.

241) So muss man wohl نيل übersetzen, was allerdings auch Indigo und den Fluss Nil bedeuten kann; sollte es vielleicht ميل = mîl oder mail heissen und demgemäss eine Abhandlung über die indische Rechnungsweise, oder über die Schiefe der Ekliptik sein? vergl. Anmerkg. 233.

Al-Makkî.

242) Vergl. Anmerkg. 234.

Al-Iṣṭachrî.

243) Flügel, A. 133 vermuthet, dieser Rechner könnte identisch sein mit dem 244 (858) geborenen und 328 (939) gestorbenen Richter Abû Saʿîd al-Ḥasan ben Ahmed ben Jazîd al-Iṣṭachrî, der als Marktaufseher in Bagdad fungierte.

Jûhannâ al-Ḳass.

244) Er wird ums Jahr 970 geschrieben haben (vergl. Woepke, Essai d'une restitution etc. in Mémoires prés. par div. Savants, Tom. XIV. Paris 1856 p. 665, und Steinschneider, Euklid b. d Arabern, Z. f. M. Ph. Jahrg. 31. p. 88—89) und ist wahrscheinlich vor 987 gestorben, in welchem Jahre der Verfasser des Fihrist den Haupttheil seines Werkes geschrieben hat. Vergl. auch den Art. Eukleides.

Ibn Rauḥ, der Ṣabier.

245) Der Verfasser gibt ausser diesem Namen gar nichts weiteres von ihm an, doch ist er nach Flügel, A. 133 deswegen nicht mit dem folgenden Autor Abû Dschaʿfar al-Châzin zu identificieren, wie Chwolsohn (Ṣabier, I. 615) thut; der Verfasser des Fihrist wusste einfach nichts weiteres über sein Leben und seine Werke.

Abû Dschaʿfar al-Châzin.

246) Seine Lebenszeit ist nicht genauer zu fixieren, als dass er noch Zeitgenosse des Verfassers des Fihrist war (vergl. Anmerkg. 244). Casiri (I. 408) nennt ihn „Persa", vergl. Art. Eukleides, wo er al-Chorâzânî genannt wird. Vergl. ferner noch: Steinschneider, Euklid bei den Arabern (l. c. p. 89). — 247) Unter صفيحة pl. صفائح (Ṣafîḥa pl. Ṣafâ'iḥ) versteht man einerseits die sog. Scheiben, tabulae regionum (s. Dorn p. 27 u. 144), die je nach der Breite des Beobachtungsortes verschieden gezeichnet waren und zur Beobachtung jeweilen in das Astrolabium gelegt wurden; zu einem vollständigen und überall brauchbaren Astrolabium gehörten also eine Reihe solcher Scheiben, wenigstens für die wichtigsten Orte des Reiches construiert; andrerseits verstand man darunter ein besonderes Astrolabium, das nach seinem berühmtesten Constructeur und Beschreiber das Zarkâlische Astrolabium: aṣ-Ṣafîḥat az-Zarkâlijja genannt wurde. Vergl. Sédillot, Mém. sur les instr. astron. des Arabes (in Mém. prés. par div. Sav. Tom. I. 1844. p. 182 u. ff.) und Steinschneider, Études sur Zarkali (Bullet. di Bibl. e di Stor. d. Sc. Mat. e Fis. Tom. XIV.).

ʿAlî ben Aḥmed al-ʿImrânî.

248) Vergl. Art. Eukleides. — 249) Casiri (I. 411) hat ausser diesem Werke noch: Liber de electionibus cum aliis plurimis ad astrologiam pertinentibus.

Abû'l-Wafâ.

250) Diese Unterrichtsgeschichte wird von Ibn al-K. (und nach ihm von Casiri I. 433 und Woepke: Journ. asiat. 1855, p. 244 f.) anders erzählt: hiernach studierte er die Arithmetik und die Geometrie unter Abû Jaḥjâ al-Bâwardî (statt Mâwardî) und Abû'l-ʿAlâ ben Karnîb, und später hörten unter ihm selbst seine beiden Oheime theoretische und praktische Arithmetik. Nach demselben Autor starb Abû'l-Wafâ am dritten Tag des Radschab des Jahres 388 (1. Juli 998); nach Ibn-Challikân im Jahre 387. — 251) Woepke (l. c. p. 247—250) gibt auch die Titel der 49 Capitel dieses Buches nach einem Leydener Ms. — 252) Vergl. hierüber Woepke (l. c. p. 251—253) und Anmerkg. 97. — 253) Der Text des Fihrist und fast alle Codices haben hier بمال مال = mit dem Quadrat des Quadrates, was keinen Sinn geben würde; Woepke (l. c. 254) liest mit Recht ومال مال = und des Quadrates des Quadrates, und bemerkt, dass es sich jedenfalls um die geometrische Auflösung der Gleichungen: $x^3 = a$, $x^4 = a$, $x^4 + ax^3 = b$ handle. — 254) Woepke (l. c. 254) übersetzt: De la manière de distinguer le cercle de la sphère (Sphère = Kugel wird aber arabisch gewöhnlich nicht durch فلك sondern durch كرة wiedergegeben). Uebrigens ist aus beiden Lesarten nichts zu machen, Woepke übergeht auch dieses Werk stillschweigend. — 255) كواكب, das ich durch Himmelskörper oder Gestirne wiedergebe, übersetzt Woepke mit „Planètes"; bekanntlich kann es beides bedeuten. — Das letztgenannte Werk der Tafeln wird von Ibn al-K. nicht erwähnt, dagegen hat dieser zwei Werke, die der Fihrist nicht anführt, nämlich den Almagest, und eine Abhandlung über das Operieren mit den Sexagesimaltafeln. Dass er das erstere Werk nicht citieren kann, ergibt sich sehr natürlich aus dem Umstand, dass dasselbe (nach Delambre, hist. de l'astr. du moyen âge, p. 156) astronomische Angaben enthält, die aus der Zeit nach 987 (Abfassungszeit des Fihrist) datieren, also später erschienen sein muss. — Ibn Challikân citiert ein Werk Abû'l-Wafâs „über die Bestimmung (der Länge) der Sehnen" (vergl. Woepke, l. c. 256); wahrscheinlich sind hiemit seine trigonometrischen Arbeiten gemeint (vergl. Woepke, Journ. asiat. 1860, p. 281 ff. und Cantor, Vorlesg. I. p. 641 f.). — H. Ch. (I. 382) schreibt Abû'l-Wafâ einen Commentar zu den Elementen des Eukleides zu; V. 172 hat er: librum scripsit de operationibus geometricis, cui tredecim capita dedit, quae de operatione cum canone geometrico, norma, circino et figuris agunt. Es ist dies jedenfalls die Sammlung geometrischer Constructionen nach Abû'l-Wafâ, die sich in einem persischen Manuscript (Nr. 169, anc. fonds.) vorfinden, und die wahrscheinlich von einem seiner Schüler zusammengestellt worden sind. (Vergl. Woepke, l. c. 218 ff. und Cantor, Vorlesg. I. p. 638—640.)

Al-Kûhî.

256) Er beobachtete nach Casiri (I. 441) im Jahre 378 (988) in Bagdad unter den Buiden. — 257) Andere Codices haben „der Instrumente„ (vergl. L'algèbre d'Alkhayyâmî, par Woepke, p. 55), wieder andere „der Erde" (vergl. Fihrist. I. Lesarten p. 26). — 258) والذى خرج منه übersetzt Steinschneider (Euklid. b. d. Arabern, Z. f. M. Ph. Jahrg. 31. p. 94) durch „was er veröffentlicht hat" (dies soll sich nämlich auf die folgenden Werke beziehen).h — 259) Vergl. die Veröffentlichung dieser Abhandlung aus dem Nachlasse Woepkes in den Notices et extr. des Ms. de la bibl. impér. Tom. XXII. 1. — 260) Woepke (L'algèbre d'Alkhayyâmî, p. 55 u. 56) vermuthet, dies sei die Abhandlung al-Kûhîs, betitelt: Traité du problème de mener d'un point donné deux lignes renfermant un angle donné, welche sich im Ms. 952. 2 (Suppl. arabe de la bibl. impér.) befindet (vergl. Woepke, Essai d'une restit. de trav. perdus d'Apoll. in Mém. prés. par div. sav. à l'acad. des sc. Tom. XIV. Paris 1856, p. 664). — 261) Diese Abhandlung steht wahrscheinlich im Zusammenhang mit derjenigen Ṯâbits über die Verzögerung und Beschleunigung der Bewegung im Thierkreis, also handelt es sich hier um die bekannte Theorie der Trepidation der Fixsterne. — 262) Vergl. Woepke, L'algèbre d'Alkhayyâmî p. 55. — 263) Vergl. Woepke (Ibid. p. 55 u. 103 ff.). — 264) Im Text des Fihrist fehlen die zwei Abhandlungen, die Woepke (l. c) als 8) und 9) anführt: Traité de la construction des deux lignes en proportion, und Traité des cercles qui se touchent suivant la méthode de l'analyse; dagegen finden sie sich in den Lesarten, p. 26; warum sie Flügel nicht in den Text aufgenommen hat, wissen wir nicht, zumal die Existenz der zweiten neben der hier angeführten Abhandlung „über die Mittelpunkte der Kreise auf gegebenen Linien" nachgewiesen ist (vergl. Woepke, l. c. p. 55). — H. Ch. III. 449 hat von al-Kûhî die Abhandlung: de ratione eius, quod de linea una inter tres lineas cadit; ist wahrscheinlich die oben genannte Schrift des Ms. 952. 2. — Steinschneider (Die mittleren Bücher der Araber, Z. f. M. Ph. Jahrg. 10. p. 480) führt von al-Kûhî einen Commentar zu den Lemmata des Archimedes an.

Ġulâm Zuḥal.

265) d. h. der Knabe (Diener) Saturns. Er lebte nach Casiri (I. 404) und Abulphar. (p. 327. Uebers. 315) in Bagdad als Astrolog unter den Buiden, und starb im Jahre 376 (986—987). — 266) Vergl. Anmerkg. 148. — 267) Vergl. Anmerkg. 14 und 16. — 268) مجرّدة kann auch heissen „der ausgezogenen" (d. h. aus grösseren Büchern).

Aṣ-Ṣûfî.

269) Einer der Herrscher aus dem Geschlecht der Buiden. — 270) Nach Casiri (I. 361) im Jahre 376 (986—987). Dieser führt von ihm ausser dem im Fihrist genannten Werke noch an: Ueber die Projection der Strahlen. H. Ch. (III. 366) schreibt ihm einen „Tractatus de astrolabio eiusque usu" zu.

Al-Anṭâkî.

271) Nach Ibn al-K. war sein Name: ʿAlî ben Aḥmed Abû'l-Ḳâsim (vergl. Woepke, Propag. des chiffres ind. in Journ. asiat. Six. Sér. Tom. I. 1863. p. 493). — 272) Genauer am 15. April 987 in Bagdad (s. Woepke, l. c.). — 273) Siehe Anmerkg. 233. — 274) Woepke (l. c.) fügt in Klammern hinzu: probablement celle de Nicomaque. — 275) Woepke (l. c.) übersetzt: de la manière de choisir parmi les traducteurs; تراجم kann übrigens auch heissen „Uebersetzungen". — 276) Diese Abhandlung fehlt bei Woepke (l. c.), dafür stehen die zwei im Fihrist fehlenden: Le traité des preuves numériques (telles que la preuve par neuf etc.), und le traité du calcul manuel (باليد) sans table. Es ist dies meines Wissens die einzige Abhandlung mit diesem Titel, die in arabischen bibliographischen Werken vorkommt, und daher könnte es leicht möglich sein, dass der Titel verdorben wäre. (Vergl. Anmerkg. 233.)

Al-Kalwaḏânî.

277) Woepke (l. c. p. 494) sagt: Kalwaḏâ, son lieu de naissance, est un village près de Bagdad. — 278) Woepke (l. c.) fügt nach Ibn al-K. bei, dass al-Kalwaḏânî unter der Regierung ʿAḍudaddaulas und noch einige Zeit nachher gelebt habe.

Al-Ḳaṣrânî.

279) Casiri (I. 419) gibt auch keinen andern Namen an, bemerkt aber im Weitern, dass er aus Ḳaṣrân, einem Städtchen im Gebiet von Raj in Chorasan gebürtig und ein berühmter Astrolog gewesen sei; er führt von ihm ein Buch über die Fragen (astrolog.) an.

Die Namen der Künstler.

280) Vergl. den Art. al-Fazârî. — 281) H. Ch. (III. 366) gibt ihm den Zunamen al-Asṭurlâbî, d. h. der Verfertiger von Astrolabien. — 282) Eine nicht festzustellende Persönlichkeit, die nach Flügels Vermuthung mit dem folgenden Batûlus zu identificieren ist. — 283) Vergl. die vorige Anmerkg. Flügel, A. 135 bemerkt, dass der Name *Βαϑύλος* nicht unbekannt sei. — 284) Kann nach Flügels Vermuthung der Vater al-Battânîs sein; vergl. diesen Art. — 285) Waren nach Flügel, A. 135 Oberhäupter der Ṣabier. — 286) Vergl. Chwolsohn I. p. 620. Dieses Werk war mir nicht zugänglich.

Die Titel der Bücher, die über die Mechanik geschrieben worden sind.

287) Vergl. den Art. Archimedes. — 288) Vergl. den Art. Herkal (Herakles?). — 289) Sind jedenfalls die durch Luft bewegten Maschinen Herons; vergl. diesen Art. — 290) Dieses Werk findet sich unter Artikel Muritos nicht, dagegen die beiden vorhergehenden. — 291) Vergl. den Art. Die Söhne Mûsâs.

Galenos.

292) Galenos erwähnt selbst diese seine Abhandlung im Verzeichniss seiner Schriften cap. 15, unter dem Titel: *εἰς τὸ πρῶτον κινοῦν ἀκίνητον*; sie ist verloren gegangen (vergl. Wenrich, p. 258).

Ḥunain.

293) Dies ist der bekannte Uebersetzer griechischer Werke (vergl. Art. Ptolemaios) ins Arabische. Er war aus dem christlichen Stamme ʿIbâd, aus Ḥîra gebürtig, lebte die grösste Zeit seines Lebens in Bagdad und starb im Jahre 260 (873—74). Vergl. Casiri I. 286. — **294**) H. Ch. V. 166 erwähnt Aristotelis librum de stellis cadentibus, quem Ḥunain ben Isḥâḳ commentario instruxit et emendavit.

Ḳusṭâ.

295) Ebenfalls bekannter Uebersetzer (vergl. Art. Aristoteles), so unter Anderem der Schriften des Theodosios, Aristarchos, Hypsikles und Autolykos (vergl. Wüstenfeld, p. 50). — **296**) Wüstenfeld (l. c.) gibt seine Lebenszeit zwischen 864 und 923 an. — **297**) H. Ch. (III. 399) hat eine Abhandlung über das Sternbild Cassiopeia, diese ist aber wahrscheinlich mit der unsrigen über den Himmelsglobus identisch, denn ذات الكرسى bedeutet sowohl den Himmelsglobus als die Cassiopeia, letzteres aber gewöhnlich nur mit vorgesetztem صورة (Sternbild). Vergl. Dorn, p. 31 u. 46.

Ar-Râzî.

298) Als Todesjahr dieses berühmten Arztes hat Casiri (I. 262) 320 (932) nach Ibn al-K., Wüstenfeld (p. 41) 311 oder 320, hält aber das letztere für das richtige. — **299**) Nach Casiri (l. c.) wegen des zu häufigen Genusses aegyptischer Bohnen, nach Wüstenfeld (l. c.) in Folge eines Peitschenschlages, den er von dem Emir al-Manṣûr (dem Fatimiden?) erhalten hatte. — **300**) Wüstenfeld (p. 47) übersetzt فى نهاية الاستدارة mit „in summa rotatione".

Nachträge zu den Anmerkungen.

Zu Aristoteles: a) d. h. die vier ersten Bücher gehören zu den *λόγοι διδασκαλικοί* oder *ἀκροαματικοί*, daher *φυσικὴ ἀκρόασις*, die vier letzteren wahrscheinlich zu den *πραγματικοί*. Vergl. Ueberweg, Grundriss der Gesch. d. Philosophie. 7. Aufl. 1886. Bd. 1. p. 192. Casiri (I. 244) übersetzt تعاليم mit „in modum dialogi", mir scheint „in unterrichtender Form (Vorlesungsform)" darunter verstanden zu sein.

Zu Valens: b) Flügel, A. p. 149 verweist in Betreff des Namens Buzurdschmihr auf Ibn Badrûn p. 44 u. ff., der mir nicht zugänglich war. Es ist dies jedenfalls kein Anderer, als der Wezîr Nûschirwâns des Gerechten, von dem Salemann und Schukowski in ihrer persischen Grammatik (Chrestomathie) eine Erzählung veröffentlichen, die einem Petersburger Codex des Buches „Târîch i Guzîda" oder „Pendnâme i Buzurdschmihr" von Ḥamdullâh i Ḳazwînî entnommen ist. Dieser Buzurdschmihr, der den Beinamen „Ḥakîm", d. h. der Gelehrte, Weise, hatte, wird vom Verfasser des Fihrist neben

Andern auch als der Autor des Buches „Kalîla wa Dimna" genannt (Fihrist, 8. Buch. p. 305).

Zu Ṯâbit ben Ḳurra: c) Der Text des Fihrist hat أبطال und das heisst „Aufhebung, Abschaffung"; das schon mehrmals genannte MS. 952. 2 (Suppl. arabe), das diese Abhandlung Ṯâbits (No. 13, fol. 56—59) enthält, hat أبطاء = Verzögerung und unmittelbar nachher als Gegensatz dazu سرعة = Beschleunigung; man sieht hieraus sofort, dass es sich um die bekannte Ṯâbitsche (resp. Theonsche) Theorie von der Trepidation der Fixsterne handelt, der Titel dieser Abhandlung im Fihrist ist also verdorben und unvollständig, im genannten MS. lautet er nach der Uebersetzung Woepkes: Sur la retardation du mouvement dans la sphère des signes et sur son accélération suivant les points de l'excentrique où se trouve le (corps en) mouvement. (Woepke, Essai d'une restitution etc. in Mém. prés. par div. Sav. à l'acad. Tom. XIV. 1856. p. 665.)

Zu Al-Ḥasan ben Sahl ben Nûbacht: d) Weder Wüstenfeld (Die Uebersetzungen arabischer Werke in das Lateinische seit dem XI. Jahrh. 1877. p. 76) noch Libri (Hist. des Sc. math. en Italie, Tome I. Deux. Édit. p. 454) kennen die richtige Bedeutung von نوء pl. أنواء = helischer Untergang der Mondstationen (in den lateinischen Uebersetzungen aus Unkenntniss der Bedeutung einfach in anoe oder anohe transscribiert). Der Letztere schreibt (l. c. wo er einige Bemerkungen zu seiner Veröffentlichung des Liber anoe, eines arabischen Kalenders, hinzufügt): Liber anoe signifie „Livre du temps et de ses divisions". Telle est, comme on le sait, la signification du mot arabe anu s. anoe. Und doch hätte er nur p. 391 seiner Veröffentlichung dieses „liber anoe" aufmerksam lesen dürfen, so hätte er die richtige Bedeutung dieses Wortes gefunden! (Man lese l. c. Zeile 10—12 v. o. und Zeile 1—2 v. u.) — Auch Steinschneider kommt in seiner Abhandlung „Ueber die Mondstationen (Naxatra) und das Buch Arcandam" (Z. D. M. G. Bd. 18. p. 118 u. ff.) und in einer späteren „Zur Geschichte der Uebersetzungen aus dem Indischen ins Arabische" (Z. D. M. G. Bd. 24. p. 387) nicht auf die richtige Bedeutung und doch ist er in der erstgenannten Abhandlung, wo er auch Libris Veröffentlichung des „Liber anoe" citiert, derselben so nahe gewesen! In der zweiten Abhandlung gibt er (l. c.) zuerst أنواء durch „Meteore" und drei Zeilen nachher durch „Witterung" wieder. Allerdings setzten die Araber die Witterung zu den verschiedenen Zeiten des Jahres in enge Verbindung mit den helischen Untergängen der Mondstationen — man lese nur auch einmal etwas genauer den von Libri veröffentlichten Kalender, genannt „Liber anoe"! — (Im 25. Bd. der Z. D. M. G. p. 382 citiert dann Steinschneider eine Stelle aus der Uebersetzung eines arabischen Werkes durch Schemtob ben Isak aus Tortosa, in welcher die richtige Bedeutung von „anoe" ziemlich klar ausgesprochen ist.)

Zu Abû Kâmil: e) Falâh habe ich wie Flügel in H. Ch. (IV. 461) wörtlich mit „Glück" übersetzt; ob es mit ʿilm al-falâḥa (Ackerbaukunde, s. H. Ch. l c.) zusammenhänge, oder ein astrologisches Werk sei (vielleicht über die Auswahl der Zeit zur Vornahme der Arbeiten des Landbaus), ist natürlich aus dem Titel allein nicht zu entscheiden.

Zu Anmerkung 136: f) Eine nachträgliche Einsicht in den Theil des Almagestes, der über die Darstellung der Bewegung der obern Planeten handelt, brachte mich auf den Gedanken, es könnte das Wort tasâhul (sahula = eben, gleichmässig, leicht sein), das ich nicht anders als durch „ebene (geometrische?) Darstellung" zu übersetzen wusste, den sogenannten Aequanten bedeuten, d. h. den excentrischen Kreis, von dessen Mittelpunkt aus die Bewegung des Planeten gleichförmig erscheinen soll (vergl. auch Wolf, Gesch. d. Astronomie, p. 57—58). Es wäre interessant gewesen, zu vernehmen, was für eine Methode Ibrâhîm an Stelle der Ptolemäischen zu setzen versucht hat, das Citat aus Ibn al-K. sagt uns nur verneinend, er habe nicht den Weg al-ḳijâs (das kann heissen: Messung, Vergleichung, Analogie, log. Schluss, Hypothese, vielleicht auch Rechnung, im Gegensatz zur geometrischen Darstellung) eingeschlagen.

Zu Anmerkung 233: g) Weiteres Nachdenken über diese Sache und auch die Anmerkg. 2 auf p 411 von Steinschneiders Arbeit: Zur Gesch. der Uebers. aus d. Ind. ins Arab. (Z. D. M. G. Bd. 25) haben die von mir ausgesprochene Vermuthung etwas zweifelhaft erscheinen lassen; immerhin ziehe ich dieselbe nicht ganz zurück, es bleiben immer noch zwei Punkte übrig, die für sie sprechen könnten: Erstens ist (wie ich schon in Anmerkung 276 angedeutet habe) die Richtigkeit des Titels der von Ibn al-K. angeführten Abhandlung al-Anṭâkîs „über die Rechnungsweise mit der Hand (den Fingern) ohne Tafel" nicht ganz zweifellos, da der Verfasser des Fihrist (ein Zeitgenosse al-Anṭâkîs) dieses Buch nicht kennt und auch sonst meines Wissens in der arab. Literatur keine zweite Schrift über Fingerrechnung vorkommt; zweitens ist überall in denjenigen Stellen arab. Ms., die über die indischen Ziffern handeln und die Woepke veröffentlicht hat (Journ. asiat. 6. Série, Tom. I. p. 58—69), die mit Sand bestreute Tafel, auf der die Inder gerechnet hätten, durch لوح und nie durch تخت wiedergegeben.

Zu Anmerkung 258: h) Ich gebe zu, dass die Uebersetzung Steinschneiders die dem arab. Text entsprechendere ist, und acceptiere sie daher für den Artikel „al-Kûhî", also demgemäss auch für den Artikel „Abû Maʿschar" (an Stelle der Worte: aus welchem vielfach Auszüge gemacht wurden. Z. 14 v. o.), wo sie aber leider nach einigen im Mittelalter sehr bekannten Werken dieses Autors, wie seiner grossen und kleinen Einleitung (in d. Astrol.), steht, die also gerade zu den nicht veröffentlichten gehören sollten! Wie ist dies zu erklären?

Register.

(Der Artikel al und die Wörter ibn, ben = Sohn und abû (Genitiv abî) = Vater wurden bei der alphabetischen Anordnung unberücksichtigt gelassen, und desshalb und der bessern Uebersicht wegen mit kleinen Anfangsbuchstaben gedruckt. Die fett gedruckten Zahlen bezeichnen die Seite, auf welcher dem betreffenden Autor ein eigener Artikel gewidmet ist.)

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

L.

M.

T.

HISTORISCH-ASTRONOMISCHE FRAGMENTE

AUS DER

ORIENTALISCHEN LITERATUR.

VON

ARMIN WITTSTEIN.

آلچق یرده دپه‌جك كندوسن طاغ صانور .
گلی استین دیكنلری دخی استملك گرك .

(Türkische Sprüchwörter.)

Wer fast zwei Jahrzehnte hindurch einer wissenschaftlichen Materie nicht blos ein oberflächliches Interesse bewahrt hat, sondern während eines solchen Zeitraumes bemüht gewesen ist, ihren Entwickelungsphasen im Einzelnen mit Aufmerksamkeit und, soweit es seine sonstige Beschäftigung erlaubte, auch in voller Hingebung zu folgen, dem kann es gar zu leicht begegnen, dass er sich dazu verleiten lässt, die Rolle des Beschauers, vor dessen Augen sich das Werdende allmälig vollzieht, mit der des fördernd in die Gestaltung Eingreifenden vertauschen oder, nach einem alten schönen Gleichnisse, selbst Steine zum Baue herbeitragen zu wollen, die dann, so hofft er zuversichtlich, die Bauleute nicht verwerfen werden. Es ist ein, über wirklich inniges Vertrautsein mit Gegenständen langjährigen Studiums oft täuschendes Gefühl, unter dessen beherrschendem Einflusse der gewagte Schritt geschieht.

Kaum darf ich es erst aussprechen, dass auch ich einige Male der Macht dieses Impulses aus Schwäche nicht widerstehen konnte. Kleine, und wohl auch unbedeutende Arbeiten sind es gewesen, die ich seither auf dem Gebiete historisch-astronomischer Forschung veröffentlicht habe. Wie das gelehrte Publicum darüber geurtheilt hat, muss ich dahingestellt sein lassen; denn aus referirenden, des kritischen Colorits (vielleicht aus Nachsicht?) ermangelnden Anzeigen hält es schwer, Antwort hierauf zu geben.

Was ich zu meiner Entschuldigung sagen kann, dass ich auf's Neue (aber wohl zum letzten Male!) der Stimme des Versuchers nicht mein Ohr verschlossen, das wollte ich durch die erste — „In flacher Gegend dünkt sich schon ein kleiner Hügel als Berg“ — der beiden osmanischen Sentenzen an der Spitze der einleitenden Worte zu diesen Mittheilungen ausdrücken; die zweite — „Wer die Rose will, muss auch die Dornen wollen“ — wird für alle Diejenigen keines Commentars zu ihrer Anführung bedürfen, die jemals in der Lage waren, über erfreuliche und besonders aufmunternde

Erfolge ihrerseits zu berichten, und zugleich wünschten, sich dieser angenehmen Aufgabe in knappster, jedoch nicht misszuverstehender Form zu entledigen.

Dass ich durch die etwas ungebräuchliche Art der sprachlichen Einkleidung von Rechtfertigungs-Versuch und Resignation zu sehr aus der Gewohnheit trockenem Geleise heraus- und in's Exotische hineingerathen bin, werden wahrscheinlich Manche tadeln. Mögen sie es immerhin thun! — Freilich, Entgegnung auf eine Kritik in diesem Punkte würde man von mir schwerlich erwarten dürfen.

I.

„Der älteste uns bekannte Erdglobus scheint der zu seyn, den Roger II., König von Sicilien, im 12. Jahrhundert verfertigen liess, und der sich vorzüglich durch den Werth des dazu verwandten Metalls auszeichnete, indem er 400 Pfund Silber gewogen haben soll. Das Andenken an diesen Globus würde schwerlich bis auf unsere Zeiten gekommen seyn, hätte nicht Edrisi, der berühmteste Geograph der damahligen Zeit, eine besondere Erklärung desselben unter dem Titel: Nosthatol mostac (Vergnügen des Gemüths) geschrieben.“[1]) —

1) Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, herausgegeben vom Freyherrn F. von Zach. Dreyzehnter Band. Gotha, 1806; 8°. S. 157 bis 158. — Aus demselben Bande lasse ich hier noch die Anmerkung auf S. 294, die ich, des dort angeführten Buches wegen, nicht gern unterdrücken möchte, folgen: „Curiositez inouyes sur la sculpture talismanique des Persans. Horoscope des patriarches, et lecture des éstoilles, par J. Gaffard. Rouen, 1631 in 12°. Es sind am Ende zwey chaldäische Planisphäria nach dem Rabiner Chomer angehängt, in welchen die Sternbilder durch Buchstaben, welche er das himmlische hebräische Alphabet nennt, vorgestellt sind. Diese Charaktere sind von jenen etwas verschieden, welche der Schotte Bonaventura Hepburnus in Kupfer stechen liess, und die Duret in seiner Histoire des langues aufgenommen hat. Der Oberst Valancey (erzählt La Lande in seiner Bibliographie) versichert, dass die Irischen Namen der Sternbilder die orientalischen oder hebräischen wären, so behauptet er, dass das hebräische Wort Kesil den nördlichen Drachen bedeute, asch (vielleicht nach Beigel nasch) den kleinen Bär, kimah den Orion u. s. w.“ — Dagegen wäre zu erinnern, dass unter עש ʿaś wohl die البنات النعش benât an-nʿaś (Töchter der Bahre, oder die zur Bahre Gehörigen, nach Analogie von بنات الارض Töchter der Erde, für Quellen; امّ النجوم Mutter der Gestirne, für Milchstrasse etc.) der Araber zu verstehen sein werden, womit diese schliesslich die gesammten sieben Hauptsterne im grossen und kleinen Bären be-

Auf Grund übereinstimmender Nachrichten, alten wie neuesten[2]) Datums, die ich bona fide hinnahm, stand früher für mich fest, der älteste Verfertiger eines Erdglobus sei der im 3. Jahrhundert vor Christus lebende Mallote Krates (*Κράτης ὁ Μαλλώτης*) gewesen; stets aber, d. h. so lange, bis leise Zweifel an deren Unanfechtbarkeit in mir rege wurden, hatte ich versäumt, selbst die Quelle, aus der jene Nachrichten alle geschöpft sind, die „Geographie“ des ehrwürdigen Strabo (aus Amasea, wahrscheinlich 66 v. Chr. geb. und 24 n. Chr. gest.), darum zu befragen. Als die einmal erwachte Skepsis jedoch immer dringlicher dazu aufforderte, zog ich die Kramer’sche Ausgabe des Strabo[3]) zu Rath und fand dort endlich, nach langem Suchen, die Stelle, die in der That alles Misstrauen beseitigen muss, da sie u. A. auf’s Unzweideutigste besagt, dass man sich nach der, die Erde darstellenden Kugel des Krates richten müsse, wenn man die bewohnte Welt getreu nachbilden wolle. Hier ist sie:

> *Νυνὶ μὲν οὖν ἐπιγεγράφαμεν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ χωρίον, ἐν ᾧ φαμεν ἱδρῦσθαι τὴν οἰκουμένην· καὶ δεῖ τὸν ἐγγυτάτω διὰ τῶν χειροκμήτων οἰκημάτων μιμούμενον τὴν ἀλήθειαν ποιήσαντα σφαῖραν τὴν γῆν, καθάπερ τὴν Κρατήτειον, ἐπὶ ταύτης ἀπολαβόντα τὸ τετράπλευρον ἐντὸς τούτου τιθέναι τὸν πίνακα τῆς γεωγραφίας. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ μεγάλης δεῖ σφαίρας*, etc. (I. Band, S. 174.)

Ganz leicht ist mir ihre Entdeckung nicht geworden; denn das Inhaltsverzeichniss enthält keinen Hinweis darauf, und ohne einen solchen ist es, bei Gott!, manchmal kein Spass, sich im Urtext durch „der Väter Weise“ hindurchzuwinden.

---

zeichneten. כסיל kesîl aber ist Canopus (*α* Argus). Von כימה kîmah vermuthet man, dass damit das Siebengestirn (die Plejaden) gemeint sei.

Vielleicht ist auch eine Mittheilung im 14. Bande der angezogenen Zeitschrift für die Geschichte der morgenländischen Astronomie nicht ganz werthlos. Es heisst dort, dass Seetzen u. A. in Damask für das orientalische Museum zu Gotha ein (handschriftliches) astronomisches Werk in persischer Sprache (198 Seiten in kl. Folio) von محمد بن ابراهيم مثنوى angekauft habe; und dann wörtlich: „Dieses prächtige und ungemein schön auf Seidenpapier geschriebene Exemplar eines seltenen Werkes enthält, ausser 87 Miniaturgemählden, eine Menge auffallender sphärischer Zeichnungen, fremder Charactere und niedlicher Verzierungen von Golde und Lasur. Der Einband besteht aus rothem Korduan.“ — Eine Durchsicht dieses Manuscriptes könnte sich am Ende als lohnend erweisen.

2) Vergl. z. B. Richard Friedrich, Materialien zur Begriffsbestimmung des orbis terrarum. (Abhandlung zu dem Programm des Königl. Gymnasiums zu Leipzig auf das Schuljahr Ostern 1886 bis Ostern 1887. Leipzig, 1887; 4⁰.)

3) Strabonis Geographica recensuit, commentario critico instruxit Gustavus Kramer. Berolini, MDCCCXLIV—LII. 3 Bände in 8⁰.

Wer sich näher über des Krates Erdkugel unterrichten will, so namentlich über das darauf zur Anschauung gebrachte, im Alterthum sich häufig wiederholende Bestreben, die Erscheinungen der Ebbe und Fluth durch entgegengesetzte Strömungen (meridionale und äquatoriale) zu erklären, dem möchte ich die vor einigen Jahren erschienene Schrift von R. Friedrich über den „orbis terrarum" (siehe Anm. 2) dazu empfehlen. Der Herr Verfasser bezieht sich darin mehrfach, als Gewährsmann, auf den im 5. Jahrhundert n. Chr. lebenden und als Commentator des Somnium Scipionis von Cicero bekannten Macrobius.

Zuweilen soll an die Stelle des Wortes *οἰκουμένη*, dem wir vorhin bei Strabo begegneten, *κόσμος*, also ganz unserem Sprachgebrauch entsprechend, getreten sein. Mit dieser gelegentlichen Notiz glaube ich eine Bemerkung des Herausgebers der Werke des Plato verbinden zu dürfen, die folgendermaassen lautet: Vides autem mundum vel rerum universitatem promiscue variis appellari nominibus. Vocatur enim *τὸ πᾶν*. Porro dicitur *ὁ οὐρανός*. Denique frequentissimum est nomen *τοῦ κόσμου*, quod Platoni prorsus idem esse evincit locus etc. Quamquam proprie illis temporibus *κόσμος* appellatum est coelum cum sideribus, cuius appellationis auctor fertur Pythagoras fuisse.[4])

Noch eine kleine Abschweifung vom Hauptthema sei mir gestattet! Haben beglaubigte Ueberlieferungen uns gelehrt, dass der Erste, der es unternahm, die bewohnte Erde auf einer Kugel zu entwerfen, im Zeitalter des Aristarch lebte, so besitzen wir in dem Tagebuch Nearch's, des Admirals Alexanders des Grossen (324 v. Chr. gest.), eine ebenso zuverlässige Urkunde, dass das erste Pilotenbuch oder Schiffsjournal schon im 4. Jahrhundert v. Chr. von einem griechischen Seemanne verfasst worden ist. Eine lichtvoll und fesselnd geschriebene Derstellung dieser Fahrt verdanken wir in neuester Zeit einer gelehrten Abhandlung des Herrn Tomaschek[5]), der darin, an der Hand der britischen Admiralitätskarten und, wo nöthig, mit Bezug auf Marco Polo, Ptolemaeus und die arabischen Reisenden und Geographen[6]), tiefe Untersuchungen hierüber, insbesondere über die berüchtigte Ichthyophagenküste, anstellt.

---

4) Platonis Opera Omnia recensuit et commentariis instruxit Godofredus Stallbaum. Vol. VII., continens Timaeum et Critiam. Gothae et Erfordiae, MDCCCXXXVIII; 8⁰. Seite 107.

5) Wilhelm Tomaschek, Topographische Erläuterung der Küstenfahrt Nearch's vom Indus bis zum Euphrat. (Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Philosophisch-historische Classe. Band CXXI.) Wien, 1890. Gr. 8⁰.

6) Vergl. Reinaud, Relation des voyages faits par les Arabes et les Persans

Ich nehme nun den entfallenen Faden wieder auf und glaube zunächst getrost behaupten zu können, dass, soweit mein Wissen reicht, von einem arabischen oder anderen Erd- resp. Himmelsglobus sichere Kunde erst wieder aus dem 13. Jahrhundert auf uns gekommen ist. Wie es um eine derartige Kunstfertigkeit über 1400 Jahre lang (nämlich seit Krates) bestellt gewesen sein mag, ist uns nicht bekannt; das Capitel von den Globen anlangend, fliessen eben die Quellen sehr spärlich. Abgesehen von dem attributiven Adjectiv „älteste", das uns jetzt nicht mehr beschäftigt, ist die vom Herausgeber der „Monatl. Corresp." geäusserte, noch heute, nach 86 Jahren, oft genug anzutreffende Meinung — nur dass sich jetzt Einige vorsichtiger ausdrücken und schlechthin von einem „silbernen Globus" sprechen — auf ein Missverständniss, im doppelten Sinne, zurückzuführen. Nach Aṣ-Ṣafadî[7]), dem hier in Frage kommenden Berichterstatter, handelt es sich nämlich einmal nicht um eine Erd-, sondern um eine Himmelskugel und eine, gleichfalls silberne Darstellung der damals bekannten Erde in Scheibenform, die Edrîsî verfertigt haben soll; die ganze Nachricht, die sich fast nur um das verbrauchte Silber dreht, ist ziemlich werthlos, aber doch so deutlich, dass schliesslich nur eine Armillarsphäre übrig bleibt, von der, meines Erachtens, allein die Rede sein kann. Sodann geschieht einer solchen Erd- oder Himmelskugel in der, Mitte Januar 1154 vollendeten „Geographie" des Edrîsî[8]), dem Kitâb nuzhat almuśtâḳ fì ih̲tirâḳ al-afâḳ (Belustigung, durch die man sich in dem in der Weltherumreisen ergötzt), die der Herausgeber der „M. C." ohne Zweifel im Auge hatte, mit keiner Sylbe Erwähnung. Endlich passt der Titel „Vergnügen des Gemüths" mehr für ein zweites Werk des Edrîsî, das dieser für Wilhelm I., Nachfolger und Sohn des Roger II., verfasste, nämlich für das روض الانس ونزهة النفس Rawḍ al-uns wa nuzhat an-nafs (Garten des vertraulichen Umganges und Ergötzung der Seele), von dem es nur heisst, dass es ähnlichen Inhaltes, wie das vorherige, sein soll.

---

dans l'Inde et à la Chine dans le IXe siècle de l'ère chrétienne. Paris, 1845. 2 Bände in 12°.

7) Biblioteca arabo-sicula, raccolta da Michele Amari. Versione italiana. Torino e Roma, 1881. Gr. 8°. Volume secondo.

8) Description de l'Afrique et de l'Espagne par Edrîsî. Texte arabe publié pour la première fois d'après les man. de Paris et d'Oxford avec une traduction, des notes et un glossaire par R. Dozy et de Goeje. Leyde, 1866. Gr. 8°. (صفة المغرب وارض السودان ومصر والاندلس ماخوذة من كتاب نزهة المشتاق فى اختراق الافاق تاليف الشريف الادريسي. طبع فى مدينة ليدن المحروسة بمطبع بريل سنة ١٨٦٤ المسيحية.)

Wie ich schon sagte, gehören die ersten arabischen Himmelskugeln, von denen wir genaue Kenntniss besitzen, dem 13. Jahrhundert an. Es sind deren zwei, durchweg mit kufischen Schriftzeichen. Der älteste wurde im Jahre 1225 in Aegypten von Ḳaiṣar für den Sultan Malek Adel (الملك العادل Al-Malik al-ʿAdil), der andere, entweder 1279 oder 1289, zu Merâġah (مراغه in اذربجان Aderbeigân, dem Lande der Iranischen Türken) von Muḥammed, dem Sohne des Muwajid ad-dîn al-ʿOrḍî (مويد الدين العرضى) verfertigt. Beide Globen sind, ebenso wie die, durch die darin erklärten Sternbilder mit ihnen im nahen Zusammenhange stehenden عجايب المخلوقات ʿaġaibo'-l maḫlûḳât (Mirabilia Creaturarum) des Ḳazwînî (زكريا بن محمود القزوينى), in der Neuzeit von einigen Schriftstellern ausführlich behandelt worden. Der Verfasser der „Wunder der Schöpfung", ein arabisch schreibender Perser, starb 1283.

Mit zwei kurzen Auszügen aus der „Beschreibung" des Edrîsî, die wohl schicklich hier eingereiht werden können, gedenke ich den ersten Abschnitt meiner „Fragmente" zu beschliessen. Dieselben sollen einestheils zu einer Stelle im E. erläuternde Angaben aus der „Geographie" des Ptolemaeus liefern, anderen Theils von einem arabischen Nilpegel im Mittelalter das Nöthige beibringen.

Im Anfange des ersten Clima (الاقليم iḳlîm, τὸ κλίμα) ist nämlich zu lesen: es gäbe im mare tenebrosum

جزيرتان تسمّيان بالخالدات ومن هذه الجزائر[9] بدا بطلميوس ياخذ الطول والعرض.

zwei Inseln, genannt die glückseligen [die Kanarischen Inseln], und von diesen Inseln habe Ptolemaeus angefangen, die Länge und die Breite zu zählen.

Abgesehen davon, dass Ptolemaeus das Letztere gewiss nicht gethan hat, drückt sich unser arabischer Auctor sehr scharf aus: die Länge und Breite zu erfassen, wie die wörtliche Uebersetzung lauten würde — etwa dem entsprechend, was wir unter Einsetzen einer Zirkelspitze im Nullpunkt verstehen. Den Mittelpunkt der Erdkarte des Ptolemaeus bildete bekanntlich die Insel Tylos (*Τύλος*, das heutige Baḥrein im persischen Meerbusen); in ihm kreuzten sich der mittlere Parallelkreis, nämlich der Wendekreis des Krebses, und der mittlere Meridian, der vom Ersten 90^0 entfernt

9) Wieder die Eigenthümlichkeit der arabischen Sprache, den plur. fr. als Singular generis feminini zu betrachten, die bei astronomischen Bezeichnungen schon Irrthümer veranlasst hat.

ist. Welche Ausdehnung er seiner Karte nach Osten und Westen hin gab, mögen im Folgenden seine eigenen Worte erklären:[10])

Πάλιν δὲ καὶ τὸ μὲν ἀνατολικὸν πέρας τῆς ἐγνωσμένης γῆς ὁρίζει μεσημβρινὸς ὁ γραφόμενος διὰ τὴν τῶν Σινῶν μητροπόλεως, ἀπέχων τοῦ διὰ Ἀλεξανδρείας γραφομένου πρὸς ἀνατολὰς ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ μοίρας ριϑς″, ὀκτὼ δὲ ὥρας ἔγγιστα ἰσημερινάς.

„Dahingegen bestimmt die östliche Grenze der bekannten Erde der durch die Hauptstadt der Sinen gelegte Meridian, welcher, auf dem Aequator gezählt, von dem Alexandriner Meridian nach Osten hin $119\frac{1}{2}$ Grade, oder sehr nahe 8 Aequinoctialstunden, entfernt ist."

Τὸ δὲ δυτικὸν πέρας ὁ γραφόμενος διὰ τῶν μακάρων νήσων, ἀπέχων καὶ οὗτος τοῦ μὲν διὰ Ἀλεξανδρείας, μοίρας ξς″, τέσσαρας δὲ ὥρας ἰσημερινάς.

„Die Westgrenze bildet der Meridian durch die glückseligen Inseln; sein Abstand von dem durch Alexandria beträgt $60\frac{1}{2}$ Grade oder 4 Aequinoctialstunden."

In dem Thinae (*Θεῖναι*) der Sinen (*Σίναι*), oder der Hauptstadt des südlichen China (arabisch جين ǵîn, صين ṣîn, persisch چين ćîn oder ماچين mâćîn), glaubt Ideler[11]) das heutige Canton zu erkennen. Nach Cosmas,[12]) dem in der Mitte des 6. Jahrhunderts zu Alexandria als Mönch verstorbenen

10) ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΗΣ ΥΦΗΓΗΣΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΒΔΟΜΟΥ ΕΣΧΑΤΑ.

Traité de Géographie de Claude Ptolemée, d'Alexandrie, traduit pour la première fois, du grec en français, sur les manuscrits de la Bibliothèque du roi. Par l'abbé Halma. Paris, 1828. Gr. 4°.

11) Ludwig Ideler, Ueber die Zeitrechnung der Chinesen. Eine in der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften am 16. Februar 1837 gelesene und nachmals weiter ausgeführte Abhandlung. Berlin, 1839. Gr. 4°.

12) Zu einer, uns durch ihn überlieferten Inschrift vergl.: Paul de Lagarde, Die Inschrift von Aduli. (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. 19. November. No. 13. 1890. Gr. 8°.) Hieraus:

„Südlich des jetzt viel genannten „Massaua", an der Annesley-Bay — aber jetzt durch eine Stunde Sand von der See getrennt — lag und liegt Aduli, auf italienischem Gebiete. In diesem Aduli fand sich einst eine von Ptolemaeus Euergetes und eine andere von einem eingeborenen, aber griechisch redenden Könige gesetzte griechische Inschrift. Beide sind in der Urschrift verloren, aber der Anfang der ersten, das Ende der andern, ist in einem griechischen Werke des sechsten Jahrhunderts erhalten, durch einen Mann erhalten, der gar nicht merkte, dass er die Bruchstücke zweier durch viele Jahre von einander getrennten Titel vereinigte. Dieser Mann heisst *Κοσμᾶς ὁ Ἰνδικοπλεύστης*." Nach dem Herrn Verfasser müssten die Griechen *Ἄδουλις* gehört haben.

Man hat zuweilen Cosmas mit einer, im frühen Mittelalter geltenden, aber nichts weniger als erhabenen Weltanschauung in Verbindung gebracht, die u. A.,

„Indienfahrer“, müsste Thinae über 15 ⁰ nördlicher, etwa unter dem 38. Breitegrade, anzunehmen sein.

Das والعرض in der obigen Textstelle scheint mir entweder Zuthat eines, mit der Sache nicht vertrauten Abschreibers zu sein, oder an Stelle von الأرض zu stehen — allerdings gebe ich gerne zu, dass „Länge der Erde“ gerade kein sehr gebräuchlicher Ausdruck sein würde, sondern höchstens im Sinne einer rechteckigen Karte hingehen könnte. —

Indem ich mich jetzt dem bereits angekündigten Nilpegel zuwende, schicke ich vorauf, dass sich das „Haus des Nilmessers“ (دار المقياس dâro'l-meḳîâs) auf einer Insel, in unmittelbarer Nähe der Stadt Fosṭâṭ (مدينة الفسطاط), befand und von Edrîsî folgendermaassen geschildert wird:

„Es ist ein ansehnliches Gebäude, im Innern mit Bogengängen, die von Säulen getragen werden. In seiner Mitte befindet sich ein weites und tiefes Becken, in das man auf einer marmornen Wendeltreppe hinabsteigt und dort, mitten in demselben, eine Marmorsäule erblickt, welche eine Theilung in Vorderarmen [Ellen] und Fingern [Zollen] trägt. Oberhalb der Säule befindet sich ein fester Steinbau, bemalt mit verschiedenen dauerhaften Farben, darunter Gold und Lasurblau. [Mit den dort eingegrabenen Inschriften beschäftigt man sich zur Stunde.] In dieses Becken gelangt das Nilwasser durch einen breiten Kanal, jedoch dringt es nicht vor dem Steigen des Flusses, d. h. nicht vor August, in dasselbe ein. Die zur geeigneten Bewässerung der Ländereien des Sultans erforderliche Wasserhöhe beträgt 16 Ellen, zu je 24 Zollen [والذراع ٢٤ اصبعًا]; steigt letztere auf 18 Ellen, so werden beide Flussufer völlig überschwemmt. Eine Wasserhöhe von 20 Ellen endlich wirkt schädlich auf das Land, dagegen reicht eine solche von 12 Ellen zur Noth hin; niedriger darf sie aber nicht sein,

---

als Erklärung der nächtlichen Dunkelheit, lehrte, die Sonne beschreibe des Nachts ihre Bahn hinter dem grossen Erdberge. Nunmehr finde ich dieses, so einfach gelöste astronomische Problem, und zwar fast im gleichen Wortlaute, in chinesischen Annalen wieder auf. Im ersten, 1590 erschienenen Hefte der ersten Ausgabe des Pèn-zaò-kāng-mŭ ist von dem fabelhaften Berge Yàn-dscheū-schān die Rede und von ihm gesagt, er liege im Westen der grossen Wüste und werde auch Berg der Mutter des westlichen Königes genannt. Dort solle sich die Sonne zur Ruhe begeben. (Verzeichniss der Chinesischen und Mandshuischen Bücher und Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Berlin, verfasst von Julius Klaproth. Herausgegeben auf Befehl Seiner Majestät des Königes von Preussen. Paris, 1822. Folio.)

Cosmas kann recht wohl auf seinen Reisen davon gehört und sich beeilt haben, der abendländischen Kosmographie damit ein werthvolles Geschenk zu machen.

sonst tritt Dürre und, als eine Folge davon, Unfruchtbarkeit ein. Steigt der Fluss über 18 Ellen, so richtet er Schaden an, indem er Bäume entwurzelt und Wohnungen zerstört.“ —

Da es am Ende nicht undenkbar wäre, dass man mir vorwerfen könnte, ich hätte im Voraufgehenden beim Entwurf des Gerippes der Karte des Ptolemaeus stillschweigend Canton, die Insel Baḥrein (بحرين) und die Mitte der Kanarengruppe insgesammt auf den nördlichen Wendekreis verlegt und deren Längendifferenz zu je 90° angenommen — so ist es vielleicht besser, zu guter Letzt hier noch zu constatiren, dass, wenn man dabei einen bekannten Erdort als Mittelpunkt festhalten will,[13]) eine solche grobe Annäherung, über die ja jeder Handatlas Auskunft giebt, völlig genügt. Man darf nur nicht vergessen, welch' arge Fehler im Punkte der Längenbestimmungen, namentlich was das Bassin des Mittelmeeres betrifft, bei Ptolemaeus vorkommen!

II.

Im vorigen Jahre erschien ein Aufsatz von Delphin über „Astronomie in Marokko“,[14]) der möglicherweise dem Sprachforscher recht willkommen sein mag, für die Geschichte jener Wissenschaft aber, wenn

13) Damit gerathe ich in Widerspruch mit Einigen, so mit dem jüngeren Sédillot: „. . . . . allein, was es auch mit der Etymologie der verschiedenen Namen [für die Anfangspunkte der Längenzählung] auf sich haben mag, und in welcher Beziehung sie zu den kosmographischen Systemen des Alterthumes und Mittelalters stehen mögen, keineswegs darf man glauben, dass darunter wirklich eine Gegend, eine Stadt in Indien, eine Insel, ein Fluss u. s. w., zu verstehen sei. Es sind rein systematische Bezeichnungen. . . . . Das geographische Längen-Verzeichniss des Abû'l Ḥasan ist es, welches zum ersten Mal den Meridian von Ḳobbet Arîn (قبّة أرين) als Ersten gewählt hat; derselbe fällt mit dem 90. Längegrade des Ptolemaeus zusammen. Wollte man nun versuchen, den Abstand dieses 90. Längegrades des Ptolemaeus vom Pariser Meridian dadurch zu eruiren, dass man aus einer Anzahl beliebig gewählter, offenbar durch Fehler sehr entstellter geographischer Längen das Mittel nimmt, so würde sich ein Resultat ergeben, das auf ein wirklich wissenschaftliches Interesse keinen Anspruch machen könnte.“ Siehe: L.-Am. Sédillot, Mémoire sur les systèmes géographiques des Grecs et des Arabes, et en particulier sur Khobbet Arine قبّة أرين (la coupole d'Arine) et Kankader كنكدر, servant chez les Orientaux à déterminer la position du premier méridien dans l'énonciation des longitudes. Paris, 1842. Gr. 4°.

14) Journal asiatique ou recueil de mémoires, d'extraits et de notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples

überhaupt, von sehr untergeordneter Bedeutung ist, nichtsdestoweniger mich jedoch veranlasst, einige Augenblicke bei ihm zu verweilen. Sollten meine Zeilen dem Herrn Verfasser in die Hand kommen, so möchte ich ihm zunächst rathen, in Zukunft sich nicht zu sehr mit der Erklärung von Sternbildern zu quälen, über die wir — um nur unseren Ideler zu nennen — seit mindestens 83 Jahren auf das Ausgezeichnetste unterrichtet sind; seine Nichtbeachtung der Literatur macht es weiter erklärlich, dass er mit الردف ar-ridf (α Cygni) nichts anzufangen wusste. Ausserdem befindet er sich im Irrthume, wenn er die Breite von Fez zu 33° annimmt, obgleich wohl Niemand ihre genaue Grösse anzugeben vermag, da eben keine moderne Bestimmung derselben, die bekannt geworden wäre, vorliegt. Soweit ich mich darüber informiren konnte, hat dieses Element, ebenso wie die geographische Länge, im Laufe der letzten 4 Jahrhunderte Werthe erhalten, wie sie von mir in der nachstehenden kleinen Tabelle vereinigt sind.

Fez (فاس Fâs).

№	Beobachter oder Berechner und Jahr.	Nördl. Breite.	Länge westl. v. Paris.	Länge östl. v. Ferro.	Länge aus
1	الغ بك Uluġ Beg, 1437.	32°	—	18°	—
2	Méchain, 1804.	—	0h 29m 17s.0	—	d. Sonnenfinsterniss vom 10. Febr. 1804.
3	ʿAlî Bej ʿAbdallah, 1804.	34° 6′ 3″	29 13.0	—	d. Mittel aus Mondabständen und Verf. d. Jupitertrabanten.
4	Triesnecker, 1810.	—	29 30.3	—	der Sonnenfinsterniss vom 10. Februar 1804.
5	Wurm, 1812.	34 6 3	29 26.4	12° 38′ 24″	
6	C. des Temps, 1892.[15]	34 6 3	29 26.3	12 38 5	(Als Quelle beider Coordinaten Nr. 3 angegeben.)

Beim Uluġ Beg (im heutigen Osmanischen الوغ بك Ulûġ Bej lautend) habe ich die Epoche seiner astronomischen Tafeln angesetzt und, wohl ohne zu merklichen Fehler, seine, von den Kanaren gezählte Länge ein-

orientaux; etc. . . . . . publié par la Société asiatique. — Huitième série. Tome XVII. Paris, 1891. Gr. 8°.

15) Connaissance des Temps ou des mouvements célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1892, publiée par le Bureau des Longitudes. Paris, 1890. Lex. 8°.

fach mit der von Ferro identificirt; die Nummern 2, 3, 4, 5 sind aus dem XII., XXII. und XXVI. Bande der „Monatl. Corresp.“ (folgweise: Gotha, 1805, 1810, 1812) entnommen. Von der Breite wird gesagt, dass sie „ungefähr für den Mittelpunkt der Stadt“ gelte.

Gute geographische Ortsbestimmungen aus den Ländern des Islam zu erhalten, dürfte ohne Zweifel noch lange Zeit ein frommer Wunsch bleiben; und so lange kann man sich wirklich nicht danach sehnen, das, was darüber vorhanden ist, oft als Daten bei astronomischen Rechnungen einzuführen. Bei den allermeisten Städten bleibt nur übrig, sich mit, oft recht unzuverlässigen Zahlen zu begnügen; so gilt, beispielsweise, für Merâgah auch jetzt noch einzig und allein die geographische Position, welche einst Prof. Wurm aus der, im Jahre 1801 erschienenen Beauchamp'schen Karte eines Theiles von Persien ableitete und dafür $\varphi = + 37^0\ 15'$, $\lambda = 64^0\ 30'$ (östl. v. Ferro) fand. In dieser Stadt errichtete im Jahre 1259 der Enkel des Ćingiz-H̱ân (چنكز خان) eine, zu hoher Berühmtheit gelangte Sternwarte, von der zuerst Waṣṣâf in seiner Persischen Geschichte (تاريخ وصّاف), die „ein Meisterwerk orientalischer prosaischer Kunst“ genannt wird, gesprochen haben soll; in ihr wurde die Ilẖân'sche Tafel (زيج ايلخانى) verfasst. Ueber einige wenige Orte sind wir ja soweit im Klaren; aus deren Anzahl seien قزوين Ḳazwîn ($\varphi = + 36^0\ 15'\ 2''$, $\lambda = 3^h\ 10^m\ 50^s.1$ östl. v. Paris) und دمشق الشام Dimiśḳ (Damascus: $\varphi = + 33^0\ 30'\ 31''$, $\lambda = 2^h\ 15^m\ 51^s.9$ östl. v. Paris) hervorgehoben. Ferner gilt als sehr sichere Position die von Taschkent ($\varphi = + 41^0\ 19'\ 32''.2$, $\lambda = 3^h\ 43^m\ 35^s.89$ östl. v. Berlin).

Nach dem Geschilderten, und unter der Voraussetzung, dass nicht etwa vorzügliches Material in russischen oder englischen Archiven unveröffentlicht aufbewahrt wird, müssen zwei, mit modernen Hülfsmitteln ausgeführte, deutsche Ortsbestimmungen in Persien wahrhaft freudig begrüsst werden;[16]) es sind die von

Ispahan (اصفهان Iṣfahân): $\varphi = + 32^0\ 38'\ 16''.3$, $\lambda = 3^h\ 26^m\ 40^s.24$ östlich von Greenwich

und

Teheran (طهران Ṭehrân): $\varphi = + 35^0\ 41'\ 6''.8$, $\lambda = 3^h\ 25^m\ 42^s.74$ östlich von Greenwich.

---

16) Die Venus-Durchgänge 1874 und 1882. Bericht über die Deutschen Beobachtungen. Im Auftrage der Commission für die Beobachtung des Venus-Durchganges herausgegeben von A. Auwers, Vorsitzendem der Commission. Zweiter Band. Die Beobachtungen der Expeditionen von 1874. Berlin, 1889. Gr. 4⁰.

Dabei ist die Breite von Teheran der Connaissance des Temps für 1892 entliehen.

Dass es auch in Marokko gegenwärtig mit der Pflege der Astronomie übel aussieht, wie Herr Delphin mittheilt, liess sich erwarten, obwohl wenigstens der Sultan über Sextanten, Theodolithen und ein parallactisch montirtes Dollond'sches Fernrohr — aber anscheinend, ohne jegliche Nutzniessung — verfügt. Uebersetzungen europäischer astronomischer Werke existiren weder dort, noch in Algier; man gebraucht noch alte Manuscripte, von denen mehrere angeführt werden.[17]) In der europäischen Türkei dagegen wird allmälig wissenschaftlicher Sinn immer reger; so z. B. erschien vor ungefähr $1\frac{1}{2}$ Jahren in Konstantinopel — wohl zu Schulzwecken — ein Lehrbuch der Astronomie (هيئت فلكيه) von Moṣṭafa Ḥilmî Efendi, Schiffslieutenant und Lehrer der Astronomie und Navigation.[18])

Den Hauptinhalt des Delphin'schen Aufsatzes bildet die Beschreibung eines, für die Polhöhe von 33^0 angefertigten und bekannten Zwecken dienenden, marokkanischen Astrolabiums aus dem Jahre 1783 (oder dem Ende von 1782). Es besteht aus einer kupfernen Scheibe, von 22 cm Durchmesser und 3 mm Dicke, um deren Mittelpunkt sich eine Alhidade drehen lässt, welche 2 Diopter mit schwach conischen Löchern trägt. Der Apparat wird frei in der Hand gehalten, und zwar mit Hülfe einer doppelten Aufhängung, eines Ringes und Bügels nämlich; unterhalb des letzteren ist das Metall soweit ausgehöhlt, um eine kleine Bussole aufnehmen zu können. Fast alle Aufschriften sind in kufischen Charakteren und nur drei in sogen. Mag̃reb-Buchstaben gravirt. —

Derselbe Band des Journal asiatique, aus dem ich das Vorstehende zum Theil ausgehoben habe, enthält eine, für den Historiker ungleich interessantere Publication des Herrn Baron Carra de Vaux, die Derselbe Notice sur deux manuscrits arabes überschrieben hat. Wenn ich mir, ohne Philologe zu sein, erlauben darf, darüber im Allgemeinen zu

17) Sehr nützlich zum Nachschlagen geographischer und historischer Schriften des Morgenlandes überhaupt ist das, 244 Titel enthaltende Buch von Fraehn: Indications bibliographiques relatives pour la plupart à la littérature historico-géographique des Arabes, des Persans et des Turcs, spécialement destinées à nos employés et voyageurs en Asie. St. Pétersbourg, 1845. Gr. 8⁰. Französisch und russisch.

18) Vielleicht geschieht es am passenden Orte, wenn ich hier auf eine, kürzlich erschienene, umfangreiche Schrift über Tibet aufmerksam mache; es ist die von W. Woodville Rockhill: Tibet. A Geographical, Ethnographical and Historical Sketch derived from Chinese Sources. (The Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain & Ireland. Published by the society. Band XXIII. London, 1891. Gr. 8⁰.)

urtheilen, so muss ich sagen: ein bescheidener Titel für eine höchst mühevolle Arbeit, deren Ergebnisse 35 Seiten füllen!

Zuerst wird eine arabische Behandlung der *σφαιρικά* des Theodosius besprochen, die sich in einem Manuscript vorfindet, dessen anscheinend aus dem 16. Jahrhundert stammende Copie die Nationalbibliothek zu Paris besitzt. Das Original, eine Arbeit des محيى الدين ابى الشكر المغربى Muhyî Eddîn Abû Śukr Almagrebî, gehört dem Jahre 1500 an. Die Copie ist zusammengebunden mit einer Abhandlung über Wasseruhren, die von Archimedes herrühren soll, mit einem Tractat über den „vollkommenen Zirkel", den Woepcke übersetzt,[19]) und der mir selbst vorgelegen hat, sowie mit verschiedenen Bruchstücken von untergeordneter Wichtigkeit. Das Ganze muss böse aussehen, d. h. mit einer unglaublichen Sorglosigkeit geschrieben sein, so dass die Entzifferung des Textes und der beigegebenen Figuren wohl nicht geringe Schwierigkeiten bereitet haben mag.

Hier wird mich das, von den Wasseruhren handelnde Manuscript, dessen Verfasser sich leider nicht genannt hat, allein beschäftigen. Die Zueignung dieser Schrift anlangend, fragt Herr C. de V.: „Beweist dieselbe, dass es eine Ueberlieferung gab, der zu Folge man die Erfindung oder Vervollkommnung der Wasseruhren auf Archimedes zurückführen muss, oder ist sie nichts weiter als die abgedroschene List eines Auctors, der sich Leser verschaffen wollte?" „Ohne Zweifel" — meint Herr C. de V. — „ist die zweite Hypothese die wahrscheinlichere." Freilich citirt das كتاب تواريخ الحكماء (Buch der Geschichten der Weisen), unter den

---

19) Trois traités arabes sur le compas parfait, publiés et traduits par François Woepcke. (Notices et Extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale et autres bibliothèques, publiés par l'Institut national de France, faisant suite aux Notices et Extraits lus au comité établi dans l'Académie des inscriptions et belles-lettres. Tome vingt-deuxième. Paris, MDCCCLXXIV. Gr. 4°.)

Unter dem „vollkommenen Zirkel" (البركار التامّ) ist ein Instrument zu verstehen, mit Hülfe dessen man alle Kegelschnitte beschreiben kann. — Das erste Manuscript ist von dem, in der 2. Hälfte des 12. Jahrhunderts lebenden Mathematiker محمد بن الحسين verfasst und war für die Bibliothek des Sultan Ṣalâḥ ad-dîn (صلاح الدين) bestimmt. Das zweite ist ein Werk des Abî Sehl Uïǵn ben Ustem al-Ḳûhî (ابى سهل ويجن بن وستم القوهى), der am Ende des 10. Jahrhunderts eine sehr hohe Stelle am Hofe des Adad ad-daula, des Bujiden, eingenommen und im Jahre 378 d. H. zu Bagdad das Sommer- und Winter-Solstitium beobachtet haben soll. Der Verfasser des Dritten endlich lebte gleichfalls in der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts, gab aber nur einen Auszug aus der Abhandlung eines Anderen über Beschreibung der Kegelschnitte.

Werken des Archimedes (ارشميدس), ein كتاب ساعات آلات الماء التى ترمى بالبنادق مقالة, Buch der Wasseruhren, von denen Kugeln herabfallen.

Nunmehr reproducire ich, nach der Uebersetzung des Herrn Herausgebers, wörtlich die Beschreibung einer Wasseruhr, deren sich vermuthlich die Astronomen bedient haben:

„Der letzte Paragraph endlich ist der Beschreibung eines, تغار tagâr genannten Instrumentes gewidmet, nämlich der einer Wasseruhr, deren Construction eine, von der gewöhnlichen etwas abweichende ist. Bei letzterer entströmt das Wasser mit gleichförmiger Geschwindigkeit einem Gefässe, dessen Inhalt stets auf unveränderlichem Niveau erhalten wird; beim tagâr dagegen findet kein Wasserzufluss statt, sondern eine, zu diesem Zwecke angebrachte Theilung lässt stets erkennen, welches Zeitmoment der augenblicklichen Wasserhöhe entspricht. Der ganze Apparat besteht im Wesentlichen aus einem Gefässe von Umdrehungsoberfläche, das im Innern ein Ansatzrohr mit engem Mundloch, zum Ablaufen des Wassers, enthält. Auf der Innenwand dieses Gefässes sind, in der Mitte des Rohres zusammenlaufende Linien des stärksten Gefälles gezogen und dazu bestimmt, die Theilung zu tragen. Letztere richtet sich danach, ob man nach gleichen Stunden (die Zeit von einem Sonnenaufgang bis zum andern in 24 Stunden eingetheilt) rechnen will, oder nach den 12 Stunden zwischen Sonnenauf- und -Untergang. Im ersteren Falle bringt man am Rande des tagâr einen kreisförmigen, in 4 gleiche Theile eingetheilten Limbus an. [Man lässt den t. in einen kreisförmigen Rand auslaufen.] Der gemeinsame Schnittpunkt der, von diesen Theilpunkten aus gezogenen Linien [der Meridiancurven, wenn ich richtig verstehe] bestimmt auf dem Grunde des Gefässes das Centrum des Ansatzrohres. Hat man nun auf astronomischem Wege ermittelt, wann eine Stunde abgelaufen ist, so bezeichnet man auf ihnen die entsprechende Wasserhöhe. Die Dimensionen des Mundloches müssen so gewählt sein, dass die Zeit eines totalen Wasserablaufes zum mindesten der des längsten Tages an dem Orte gleichkommt, wo der Apparat aufgestellt ist. Folglich wird das Mundloch immer kleiner, resp. der Inhalt des Gefässes immer grösser werden müssen, je näher der Beobachtungsort dem Erdpol liegt. Sind die nöthigen Versuche beendet, so fixirt man die definitive Theilung durch silberne Sterne.

Weit complicirter wird die Construction, wenn man sich der ungleichen Stunden bedienen will, d. h. wenn man die Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang in 12 Stunden eintheilt. Dann muss man zunächst einen vollständigen Zodiakus auf dem Rande des tagâr verzeichnen und jeden

der 12 Sectoren in 5 gleiche Theile eintheilen. Von den 12 Hauptheilpunkten ziehe man Linien bis auf den Grund des Gefässes herab. Hier, wie im voraufgehenden Falle, kann der taġâr nur für eine bestimmte Polhöhe eingerichtet werden. Auf jeder der soeben angeführten 12 Linien bemerke man nun die Höhe des Wasserstandes, nachdem eine Stunde des Tages verflossen ist, an dem sich die Sonne in dem betreffenden Zeichen befand und unter der gegebenen Polhöhe beobachtet wurde; die Astronomie liefert dazu das Hülfsmittel. Hierauf zieht man mit dem Zirkel Kreisbögen, welche je zwei aufeinanderfolgende der so erhaltenen Punkte verbinden, so zwar, dass jeder solcher Kreisbogen durch den Theilpunkt (die Marke) des Widders hindurchgeht. Ebenso verfährt man für die übrigen ungleichen Stunden. Auf den Linien des Widders und der Wage wird die Eintheilung in ungleiche Stunden mit der in gleiche zusammenfallen, weil während des Durchganges der Sonne durch diese Zeichen die Stunden des Tages und der Nacht einander gleich sind. Die krummen Linien der ungleichen Stunden, welche die aufeinanderfolgenden Bogen bilden, lasse man nicht in die Zeichen selbst hineinreichen; die silbernen Sterne befestige man auf den, ihnen entsprechenden Theilpunkten, und gebe ihnen, so zu sagen, eine bevorzugte Stellung. Eine, um ihren tiefsten Punkt, als Mittelpunkt, drehbare Art von Alhidade, im Innern des Gefässes und sich dessen Form anschmiegend, kann man, nach Belieben, auf irgend einen Punkt des getheilten Limbus einstellen; ihr Durchschnitt mit den krummen Linien der ungleichen Stunden liefert dann eine genaue Theilung für jeden Tag des Jahres". — Damit endet die Handschrift.

Bei den ungleichen Stunden kommt also die Anleitung darauf hinaus, die einzelnen Niveaucurven (wie man vielleicht nicht unpassend sagen kann) als Einhüllende einer Schaar von Kreisen, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, genauer zu bestimmen. So zu verfahren, mag die Praxis gelehrt haben; wenig bequem war es aber jedenfalls, auf einer Rotationsfläche mit dem Zirkel zu operiren. Denkt man sich, das Gefäss habe die Form eines Rotations-Cylinders besessen, und dessen Mantelfläche sei in eine Ebene aufgerollt, so kann die Theilung etwa so ausgesehen haben, wie ich sie, für 3 Stunden, in der beigehefteten Figurentafel entworfen habe. Die zweite Figur, die Umhüllungscurve eines Kreises darstellend, dient als einfaches und anschauliches Beispiel von graphischer Bestimmung einer Curvenform mit Hülfe von Kreisen, die sich in einem Punkte schneiden.

Wie überall, so heissen auch in dem von Herrn C. de V. untersuchten Manuscript die 24 gleichen Stunden الساعات المستويات, die 12 ungleichen

oder krummen الساعات الزمانيات oder الساعات المعوّجات. Die Alhidade (العِضَادَة) hat hier die Meridianform des Gefässes; das Ansatzrohr heisst جُرْعَة. Unter den بَنَادِق (Plural von بُنْدُق) sind Kupferkugeln zu verstehen, die, Stunde für Stunde und eine nach der andern, von Wasseruhren herabfallen; wie ich aus dem Wörterbuch ersehe, bezeichnet man jetzt Gewehr- oder Pistolenkugeln damit.

Ganz vortreffliche Nachrichten über mancherlei Astronomisches bei den Muhammedanern ertheilt ein, zwar schon vor vielen Jahren geschriebener, keineswegs aber veralteter Aufsatz von Beigel, dessen öffentlich zu gedenken, ich mir, seit ich ihn kenne, vorgenommen habe. Sein Titel lautet: „Versuch über eine bis jetzt noch nicht erklärte Stelle in Abulfeda's Beschreibung von Aegypten, unter dem Artikel Fostat; nebst Bemerkungen über die Gnomonik der Araber.“ [20])

Zur Kenntniss rein mathematischer, sowie astronomischer Bezeichnungen und Kunstausdrücke der Araber liefern die Schriften von Nesselmann, Woepcke, Dorn und Schjellerup gleichfalls sehr schätzenswerthe Beiträge; namentlich dem Ersten kann man für seine Ausgabe der „Essenz der Rechenkunst des Behâ-eddîn“ (خلاصة الحساب تصنيف بهاء الدين محمد بن الحسين العاملى, wahrscheinlich im 17. Jahrhundert lebend), die dieser ausgezeichnete Gelehrte mit einer Menge wichtiger Noten begleitet hat, nur dankbar sein.

Anhang.

Solange telegraphische Bestimmungen der geographischen Länge zweier Punkte auf der Erdoberfläche noch nicht bekannt waren, boten die aus Mondculminationen und Sternbedeckungen das vorzüglichste Mittel hierzu, das auch heute noch in Ländern, wo jene nicht ausführbar sind, zur Anwendung kommt. Ist jedoch die Länge eines Ortes genau festgelegt, so gewähren die Beobachtungen von Sternbedeckungen noch überdiess den grossen Vortheil, dass sie, wenigstens vom theoretischen Gesichtspunkte aus betrachtet, eine sehr geschätzte contrôle der Mondtafeln gestatten; und hierbei sind wieder die Durchgänge des Mondes durch die Gruppe der Plejaden von ganz besonders hervorragender Bedeutung, die noch durch

20) Fundgruben des Orients, bearbeitet durch eine Gesellschaft von Liebhabern. Auf Veranstaltung des Herrn Grafen Wenceslaus Rzewusky. Erster Band. Wien, 1809. Folio.

das Hinzutreten des günstigen Umstandes, dass sich die Durchgänge südlich von einigen Sternen und nördlich von den anderen ereignen, und innerhalb deren die Fehler der Mondtafeln fast constant bleiben, erhöht wird.

Diese Vortheile können aber leider dadurch ganz aufgehoben werden — ich selbst weiss es, dass sie einige Male thatsächlich als illusorische angesehen werden mussten — dass, bei dem gegenwärtigen Stande unserer Mondtheorie, ein ganz ausserordentlich hoher Grad von Genauigkeit (der, nach der Sachlage, auch einem geübten Beobachter durchaus nicht immer zu erreichen sein wird) dazu gehört, um aus Beobachtungen von Sternbedeckungen Vertrauen erweckende Aufschlüsse über die Fehler moderner Mondtafeln erwarten zu dürfen. Da ich nun meine Ueberzeugung doch einmal ausgesprochen habe, so sehe ich nicht ein, wesshalb ich sie nicht auch durch Anführung eines Beispieles gewissermaassen erhärten sollte, das ich, zur Vermeidung von Irrthümern, wiederholt durchgerechnet habe. Die Anregung zu diesem Excurs, die ich zur Erklärung seines etwas unmotivirten Erscheinens nicht unterdrücken will, gaben mir mehrere Längenbestimmungen, die seinerzeit Triesnecker aus Sternbedeckungen abgeleitet und l. c. veröffentlicht hat.

Am 7. Januar 1876 wurden zu Strassburg i. E. nachstehende Momente der Bedeckungen einiger Sterne der Plejadengruppe durch den Mond erhalten:

I.

Stern und beobachtetes Moment.		Sternzeit Strassburg i. E. 1876 Januar 7.			Von Winnecke angenommen.
		Winnecke.	Schur.	Hartwig.	
Anonyma 23.	Eintritt.	$2^h\ 5^m\ 39^s.2$	—	—	$2^h\ 5^m\ 39^s.20$
„ 19.	„	8 52.7	—	—	8 52.70
„ 25.	„	10 51.2	—	—	10 51.20
„ 22.	„	20 54.7	—	$54^s.5$	20 54.60
„ 13.	„	31 35.1	—	—	31 35.10
26 S Plejadum.	„	54 12.1	—	11.2	54 12.10
Anonyma 30.	„	3 2 52.0	—	—	3 2 52.00
27 f Atlas.	„	13 29.0	$28^s.1$	29.1	13 29.05
28 h Plejone.	„	25 33.4	33.0	33.2	25 33.20
Anonyma 40.	„	55 27.7	—	—	55 27.70
28 h Plejone.	Austritt.	4 16 34.6	—	—	4 16 34.60
27 f Atlas.	„	18 45.6	53.8	—	18 45.60

Die erste Beobachtung ist als „unsicher“ bezeichnet.

II.

Stern.	Grösse.	Æ. med. 1840.	Jährl. Praecession 1840.	Jährl. Praecession Säculare Aenderung.	Eigene Bewegung.	Decl. med. 1840.	Jährl. Praecession 1840.	Jährl. Praecession Säculare Aenderung.	Eigene Bewegung.
Anonyma 23	8.9	54° 29′ 36″.40	53″.046	+ 0″.265	+ 0″.0217	+ 23° 10′ 40″.14	11″.648	— 0″.425	— 0″.0656
″ 19	8	54 28 1.82	53.086	+ 0.266	″	+ 23 18 9.11	11.656	— 0.426	″
″ 25	8.9	54 32 5.30	53.027	+ 0.264	″	+ 23 6 35.59	11.637	— 0.425	″
″ 22	8	54 28 47.57	53.124	+ 0.267	″	+ 23 24 50.13	11.652	— 0.426	″
″ 13	8.9	54 23 41.65	53.144	+ 0.268	″	+ 23 29 37.12	11.676	— 0.426	″
26 S Plejadum	7.8	54 51 48.27	53.140	+ 0.265	″	+ 23 21 43.53	11.543	— 0.428	″
Anonyma 30	8.9	54 55 39.24	53.156	+ 0.265	″	+ 23 23 31.50	11.524	— 0.429	″
27 f Atlas	4.5	54 54 53.68	53.212	+ 0.266	″	+ 23 33 30.41	11.528	— 0.429	″
28 h Plejone	5.6	54 55 10.82	53.241	+ 0.267	″	+ 23 38 30.60	11.527	— 0.429	″
Anonyma 40	7.8	55 20 31.97	53.220	+ 0.264	″	+ 23 28 18.94	11.405	— 0.431	″

III.

Stern.	Sternzeit Strassburg i. E. 1876 Januar 7.	α app. *	δ app. *	α app. ☾	δ app. ☾	r app. ☾
Anonyma 23	2^h 5^m 39^s.20	55° 1′ 41″.49	+ 23° 17′ 45″.62	54° 43′ 56″.83	+ 23° 15′ 0″.41	16′ 42″.56
″ 19	8 52.70	55 0 8.37	+ 23 25 14.90	54 45 27.81	+ 23 15 38.91	42.61
″ 25	10 51.20	55 4 9.74	+ 23 13 40.66	54 46 23.55	+ 23 16 2.53	42.75
″ 22	20 54.60	55 0 55.50	+ 23 31 55.81	54 51 6.14	+ 23 18 1.28	42.92
″ 13	31 35.10	54 55 50.29	+ 23 36 43.70	54 56 4.55	+ 23 20 5.47	43.18
26 S Plejadum	54 12.10	55 23 56.91	+ 23 28 45.26	55 6 32.26	+ 23 24 21.47	43.65
Anonyma 30	3 2 52.00	55 27 48.47	+ 23 30 32.56	55 10 31.63	+ 23 25 56.90	43.82
27 f Atlas	13 29.05	55 27 4.94	+ 23 40 31.67	55 15 24.33	+ 23 27 51.98	43.90
28 h Plejone	25 33.20	55 27 23.13	+ 23 45 31.84	55 20 56.51	+ 23 30 0.07	44.06
Anonyma 40	55 27.70	55 52 43.66	+ 23 35 15.72	55 34 39.23	+ 23 35 5.14	44.28
28 h Plejone	4 16 34.60	55 27 23.13	+ 23 45 31.85	55 44 22.13	+ 23 38 29.88	44.30
27 f Atlas	18 45.60	55 27 4.93	+ 23 40 31.69	55 45 22.57	+ 23 38 50.00	44.38

Zur II. Tabelle ist zu bemerken, dass die mittleren Sternörter nach Bessel angesetzt sind, und dass die Eigene Bewegung das Mittel aus sämmtlichen, im Bessel'schen Verzeichnisse vorkommenden Angaben, d. h. für jeden Stern in je einer Coordinate eine und dieselbe Zahl ist, somit eine gleichmässige Verschiebung des ganzen Systems zum Ausdrucke gelangt.

Bei der Berechnung habe ich weder, was die vollständigen Beobachtungen von Atlas und Plejone betrifft, verschiedene Gewichte eingeführt, wie sie Hansen den durchlaufenen Sehnen proportional annimmt, noch überhaupt den Einfluss der Strahlenbrechung berücksichtigt, welch' letzterer zwar auch von Hansen nachgewiesen ist, aber, nach Bessel's Untersuchungen, in dem Falle, dass das Gestirn nicht nahe am Horizont steht, unmerklich wird.

Die Auflösung sämmtlicher 12 Bedingungsgleichungen liefert Werthe, denen man augenscheinlich eine reelle Bedeutung nicht beilegen kann, da hierauf die Unsicherheit der Austrittsbeobachtungen zu nachtheilig eingewirkt hat. Werden die Austritte weggelassen, also nur 10 Gleichungen behandelt, so ergeben sich als Fehler der Mondtafeln

$$\varDelta a = -5''.83 \pm 2''.03, \qquad \varDelta d = +1''.08 \pm 1''.56,$$
$$\varDelta r = -6''.32 \pm 2''.02.$$

Die übrig bleibenden Fehler betragen

+ 0″.75	bei Anonyma 23.		+ 1″.64	bei	26 S Plejadum.
+ 0.14	„ „ 19.		— 2.49	„	Anonyma 30.
— 1.10	„ „ 25.		— 0.19	„	27 f Atlas.
— 0.14	„ „ 22.		0.00	„	28 h Plejone.
— 0.16	„ „ 13.		+ 1.26	„	Anonyma 40.

III.

Im ersten Theile dieses letzten Abschnittes, den ich vielleicht mit einigem Rechte hätte Parerga et Paralipomena betiteln können, wird der Leser ein Paar Notizen finden, die ich, zur Vervollständigung des im Vorangehenden Besprochenen einerseits und zur Beantwortung einer früher von mir aufgeworfenen Frage andererseits, nicht glaubte unterdrücken zu dürfen. Der zweite Theil enthält einige Literaturangaben, deren — nach meinem Dafürhalten — grösseren oder geringeren Nutzen für die Geschichte der Astronomie ich zuweilen durch Hinzufügung von Excerpten oder Aphorismen unterscheidend hervorgehoben habe. Hierin auch rein Philologisches,

allerdings unter Beschränkung auf das kleinste zulässige Maass, berührt und nicht, wie es sich eigentlich gebührt, „aus Rücksicht auf die meisten Leser“ ganz beiseite gelassen zu haben — läuft freilich engherziger traditioneller, aber zum Glück immer mehr im Schwinden begriffener Auffassung zuwider, die bei Arbeiten auf Grenzgebieten zwischen Mathematik und Philologie beide Wissenschaften ängstlich auseinander zu halten sucht, statt nach Kräften dahin zu streben, dass sie sich gegenseitig die Hand reichen. Was Abel-Rémusat in der Einleitung (S. IX) zu seinem classischen Werke über die tartarischen Sprachen[21]) sagt

> — Il m'a paru qu'en aucun cas, nous ne pouvions juger une nation, critiquer ses traditions, rechercher son histoire, si nous ne savions sa langue, ou si d'autres ne l'avoient sue avant nous. —

unterschreibe ich, als wären es meine eigenen Worte, und willig nehme ich die oft recht mühseligen Consequenzen daraus mit in den Kauf.

1.

Zunächst möchte ich zu dem im zweiten Abschnitte beklagten Mangel an guten Ortsbestimmungen im Morgenlande ergänzend und berichtigend bemerken, dass es in dieser Hinsicht, wenigstens was einen Theil desselben betrifft, doch ein wenig besser aussieht, als ich dort angegeben habe. Seit etwa 40 Jahren besitzen wir nämlich ein (wohl zum grössten Theil in die Connaissance des Temps für 1892 übergegangenes) Verzeichniss von 83 Oertern des persischen Reiches, die durch Beobachtungen so festgelegt sind, dass sie jedenfalls für kartographische Zwecke, denen ja vor Allem eine genügende Unterlage geschaffen werden musste, als sehr brauchbare Fixpunkte zu bezeichnen sind. Wir verdanken sie dem (damaligen) russischen Hauptmann Lemm[22]), der in den Jahren 1838 und 1839 während einer dreizehnmonatlichen Reise (diplomatischen Mission) 129 geographische Positionen im europäischen Russland, russischen Transkaukasien und in Persien bestimmte. Mit sich führte er ein tragbares Ertel'sches Durchgangs-Instrument, einen Prismenkreis (älterer Construction) von Steinheil, vier

---

21) Abel-Rémusat, Recherches sur les Langues Tartares, ou mémoires sur différens points de la grammaire et de la littérature des Mandchous, des Mongols, des Ouigours et des Tibetains. Tome Ier. Paris, 1820; 4°.

22) Otto Struve, Résultats géographiques du voyage en Perse, fait par le capitaine Lemm en 1838 et 1839. (Mémoires de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg. Sixième série. Sciences mathématiques et physiques. Tome V. St.-Pétersbourg, 1853; gr. 4°.)

Taschen-Chronometer von Brockbanks, Barraud und Arnold, zwei Barometer, zwei Thermometer, einen künstlichen Horizont und endlich einen Wegemesser oder Schrittzähler. Zur Bestimmung der Polhöhe (aus Circummeridianhöhen der Sonne, aus den Höhen des Polarsternes oder anderer heller Sterne) bediente er sich durchweg des Prismenkreises; konnte er aber irgendwo längeren Aufenthalt nehmen, wie in Tehran, Meschhed, Tauris (Tabris) und Tiflis, so traten hierzu auch Beobachtungen im Ersten Vertical mit Hülfe des Durchgangs-Instrumentes. Die Zeitbestimmungen beruhen im Allgemeinen auf Sonnen- und Sternhöhen, oftmals auch auf correspondirenden Sonnenhöhen, beobachtet mit dem Prismenkreis. Die Längen sind zumeist aus Chronometer-Uebertragungen, und nur die von Tehran und Meschhed aus Mond-Culminationen erhalten werden; zu fast allen der letzteren fand Otto Struve correspondirende Beobachtungen, die auf festen Observatorien angestellt waren. Der Genauigkeitsgrad der Resultate entspricht beinahe überall demjenigen, den man erwarten durfte, und wirft ein vortheilhaftes Licht auf die Sorgfalt und Energie des ausserordentlich fleissigen Beobachters. Hätte ihn doch seine Reisedisposition zu dem einen oder andern Orte geleitet, dessen Neubestimmung mir als besonders wünschenswerth erschien!

Weiter handelt es sich um eine von Ibn Jûnis im Jahre 1007 zu Kairo beobachtete Conjunction von Jupiter und Saturn, die, der Theorie nach, sich am 31. October (bürgerl.) des genannten Jahres ereignet haben müsste, während alle Daten des arabischen Manuscriptes, in welchem diese Beobachtung angeführt ist, und das uns seit langer Zeit von Caussin im Urtext und in der Uebersetzung vorliegt, übereinstimmend hierfür den 7. November ergeben. Eine Erklärung dieser merkwürdigen Discrepanz vermochte ich ebenso wenig in meiner letzten Publication[23]) zu liefern, als ich jetzt dazu im Stande bin. Allerdings ist später, und zwar von berufenster Seite, gerügt worden, dass Caussin hin und wieder kleine, übrigens ziemlich unschädliche Versehen begegnet sind. Derlei kann aber, da Caussin kein Astronom war, am Ende nicht Wunder nehmen und bei billiger Kritik einer so verdienstvollen Arbeit nicht schwer in's Gewicht fallen. Im vorliegenden Falle ist jedoch die Möglichkeit einer falschen Auffassung vollständig ausgeschlossen, denn der arabische Text duldet keine andere Uebersetzung als die Caussin'sche. So blieb also nichts Anderes übrig, als die Theorie, resp. die Tafelwerke zu befragen, und diese Untersuchung hat,

---

23) „Ein Beispiel zum Theodor von Oppolzer'schen „Kanon der Finsternisse". (Leipzig, 1888; gr. 4°.)"

wie ich vor Kurzem fand, Burckhardt[24]) schon vor 93 Jahren ausgeführt. Er schreibt zum Schluss, dass die Tafeln für 1007 October 30 15^h geben:

Geocentrische Länge des	Saturn	162^0	$9'$	$47''$	
„ „ „	Jupiter	162	1	13	
„ Breite „	Saturn	1	54	11	nördlich.
„ „ „	Jupiter	1	7	17	„

In Aequator-Coordinaten umgesetzt, folgt hieraus:

1007 October 30, 15^h zu Paris.

	α.	δ.
Jupiter	$10^h\ 55^m\ 28^s.5$	$+8^0\ 7'\ 32''$
Saturn	10 57 13.5	+ 8 47 32.

Das, was jetzt noch Interesse bieten könnte, wäre etwa: zu wissen, von Wem eine solche vorsätzliche, mit Ueberlegung vorgenommene Textverfälschung wohl herrühren mag? Den wackern Ibn Jûnis trifft sicher keine Schuld.

2.

Abel-Rémusat, Recherches sur les Langues Tartares.

S. 25: ...... d'un traité d'astronomie en langue Mongole, qui est le seul ouvrage de cette langue que nous possédions en France. C'est la colonne la plus neuve et la plus importante du vocabulaire comparatif; car cet idiome célèbre n'étoit encore connu que par de mauvaises listes de mots données par Witsen, Strahlemberg et Pallas, où les mots sont dépourvus de caractères originaux, et défigurés par des prononciations provinciales ou par des transcriptions fautives. Ich glaube, er hat damit dasselbe Werk gemeint, das früher von ihm im dritten Bande der „Fundgruben des Orients (Wien, 1813)" ausführlich behandelt worden ist, und zwar unter dem Titel: Uranographia Mongolica sive Nomenclatura Siderum, quae ab Astronomis Mongolis agnoscuntur et describuntur. (Excerptum ex opere, Mongolica lingua conscripto, quod in Bibl. Imp. Paris. conservatur.) — Sodann sei noch auf das 6. Capitel, „Vom Osttürkischen, gewöhnlich Uïgurisch genannten", verwiesen.

---

24) Allgemeine Geographische Ephemeriden. Verfasset von einer Gesellschaft Gelehrten und herausgegeben von F. von Zach. Dritter Band. Weimar, 1799; 8^0.

Th. Henri Martin, Sur des instruments d'optique faussement attribués aux anciens par quelques savants modernes. (Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tome IV. 1871.) Rome, 1871; gr. 4^0. Eine sehr dankenswerthe kritische Untersuchung, der die weiteste Verbreitung zu wünschen wäre, damit sich nicht so manche irrige Tradition „wie eine ewige Krankheit“ fortpflanzt.

L. Am. Sédillot, Sur les emprunts que nous avons faits à la science arabe et en particulier de la détermination de la troisième inégalité lunaire ou variation par Aboul-Wéfâ de Bagdad, astronome du Xe siècle. (Ebendaselbst, 8. Band.) Rome, 1875. Nach einer geschichtlichen Einleitung folgen, begleitet von einer Legion von Citaten, bittere Klagen, die man wohl begreiflich finden kann, und endlich Urtext und Uebersetzung des X. Capitels aus dem Almagest des Abû'l Wefâ, nämlich des Tractates von der dritten Mond-Ungleichheit (المسمّى اختلاف المحاذاة Mohâḏât). Freilich, wem das noch nicht genügt, dem ist nicht zu helfen!

W. Schott, Zur Uigurenfrage. 2 Abtheilungen. (Aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1873 und 1875. Abhandlungen der philosophisch-historischen Classe.) Berlin, 1874 und 1875; gr. 4^0.[25])

Den Namen ايغور Igûr oder اويغور Uigûr (ähnlich wie ihn die Chinesen 伊吾盧 I-ngu-lu oder 畏吾兒 Ui-ngu-orh, d. h. bald mit i, bald mit ui, schreiben, so dass die Aussprache der ersten Sylbe, wie Schott vermuthet, geschwankt haben muss) führt ein türkischer Volksstamm Hochasiens, dessen ursprüngliche Heimath das heutige chinesiche oder Ost-Turkestan war, speciell die Gegend, in der die Städte Turfan und Chă-mÿ (das türkische Chamyl oder Chamul) gelegen sind, letzteres an der Ost-

---

25) Die Veranlassung, mich eingehend mit dieser alttürkischen Völkerschaft zu beschäftigen, ist in erster Linie auf das Studium zweier akademischer Abhandlungen von Ideler („Ueber die Zeitrechnung von Chatâ und Igûr“ und „Ueber die Zeitrechnung der Chinesen“, 1832 und 1839), deren Inhalt ich in Fachkreisen als bekannt voraussetze, zurückzuführen; hieran reihte sich das der beiden folgenden Werke:

Julius Klaproth, Abhandlung über die Sprache und Schrift der Uiguren. Nebst einem Wörterverzeichnisse und anderen uigurischen Sprachproben aus dem Kaiserlichen Uebersetzungshofe zu Peking. Paris, 1820; Folio.

Derselbe, Tableaux historiques de l'Asie, depuis la monarchie de Cyrus jusqu' à nos jours. Paris, 1824. Text in 4^0 und Atlas von 25 Karten in Folio.

grenze des chinesischen Turkestan. Persische, türkische und chinesische Verzeichner asiatischer Begebenheiten berichten von demselben, dass sein Land mehrere Male zur nordwestlichen Provinz China's geschlagen wurde, was die theilweise Aneignung chinesischer Sprache, Literatur und Sitten von Seite der einverleibten türkisch-tartarischen Bevölkerung zur Folge hatte. Der osttürkische Sultan Abû'l-gâzî (ابو الغازی بهادر خان, gest. 1644) in dem von ihm verfassten „Stammbaum der Türken (شجرهٔ ترکی)“ und der Perser Rašîd-eddîn (رشید الدّین, gest. 1318) in seinem „Sammler der Geschichten (جامع التواریخ)“ verlegen die Ursitze der Uiguren viel weiter nach Nordosten, etwa in das Gebiet zwischen dem südlichen Laufe der Selengga und der Stadt Urga, oder direct an die Stätte des alten mongolischen Hoflagers Karakorūm; gegenwärtig sollen sie noch im westlichen Turkestan, so in den Chanaten von Chiwa und Buchara, vorkommen.

Zu ihrem Namen bemerkt Schott, dass die ihm begegneten Formen desselben „mit ui, i und ju beginnen. Das schliessende r wird von den Chinesen durch ihr zwitterhaftes orh (urh, rh), oder durch die Sylbe lu, deren vocalischer Auslaut abzurechnen, ausgedrückt, auch völlig unterdrückt, und einmal ist sogar von dem ganzen Namen nur der erste Vocal geblieben.“ — Etwas vorher wird mitgetheilt: „Grosser politischer Bedeutung im thätigen Sinne des Wortes hat das Uigurenvolk kaum jemals sich erfreut. Der Umstand, dass syrische Verkünder des Christenthums weiland (im 7. Jahrhundert?) mit vorübergehendem Erfolg unter ihnen predigten und eine semitische Buchstabenschrift ihrer Sprache anpassten, verschaffte ihnen in Europa einige Beachtung, die um vieles erhöht ward, als endlich mehrere, in jener Schrift geschriebene, osttürkische Geisteswerke, eines aus dem 11. Jahrhundert u. Z., unter uns auftauchten.“ Im 11. Jahrhundert waren die Uiguren noch, wenigstens der grossen Mehrheit nach, buddhagläubig.

Ćingiz-H̱ân (چنکز خان) führte die uigurische Schrift und Sprache bei seinen Mongolen ein; sein Enkel, Chubilai, befahl einem Oberpriester, die ältere uigurische Schrift zu verwerfen und eine Auswahl Buchstaben der tibetischen Quadratschrift den mongolischen Lauten anzupassen, hatte aber damit eine Neuerung geschaffen, die, weil zu unbequem, nicht lebensfähig war.

J. Klaproth, dem zwar Schott eine Menge der bedenklichsten Fehler nachweist, darin aber, wie wohl die Meisten, mit ihm übereinstimmt, dass die uigurische Schrift aus den syrischen Buchstaben, mit denen sie einzelne Aehnlichkeiten hat, hervorgegangen ist und auch vollkommen mit den Formen

und Sylbenverbindungen des sabäischen Alphabets harmonirt[26]) — sagt: „Das uigurische Alphabet ist die Quelle der jetzt in Mittelasien gebräuchlichen mongolischen und mandschuischen Schrift und dient noch jetzt den türkischen Bewohnern der kleinen Bucharei, neben dem Arabischen, um ihre Muttersprache zu schreiben.“ Hiergegen wendet sich in neuester Zeit Fr. Müller[27]) in einer prüfenden Untersuchung, deren schliessliche Ergebnisse er in folgende Worte zusammenfasst: „Ueberblickt man unsere Vergleichung, so stellt sich als Ergebniss derselben Folgendes heraus: Von den 14 Zeichen des mongolischen Alphabets lassen sich alle bis auf drei, nämlich mittleres t (d) — r — m aus der syrischen Schrift ableiten; drei Zeichen (mittleres t, r, m) zeigen blos mit der mandäischen Schrift eine Verwandtschaft, und ein Zeichen, nämlich s (š) zeigt jene alte Form, welche in keinem der jüngeren Alphabete sich mehr findet. Wir können daher mit Fug und Recht behaupten, dass jenes syrisch-nestorianische Alphabet, nach welchem die Schrift der Mongolen gebildet wurde, bis heutzutage noch nicht gefunden, resp. nachgewiesen worden ist.“ Der Herr Verfasser nimmt dabei die mongolischen Schriftzeichen als die typischen an.

A. Terrien de la Couperie, The old numerals, the counting-rods and the Swan-Pan in China. (Reprinted from the Numismatic Chronicle, vol. III., third series. London, 1883; 8⁰.)

算盤 Ssuan-pan, Zählplatte oder Rechenbrett, ist keine chinesische Erfindung, sondern erscheint erst im 12. Jahrhundert in China, und zwar, wenn auch nicht auf directem Wege, aus Indien eingeführt.

G. Bilfinger, Die antiken Stundenangaben. Stuttgart, 1888; 8⁰.

Derselbe, Die babylonische Doppelstunde. Eine chronologische Untersuchung. Stuttgart, 1888; 4⁰.

Im Ersten wird, nach Galenus, eine Uhr beschrieben, „die den Grundgedanken der antiken Wasseruhr wohl am einfachsten zum Ausdruck bringt“. Wenige Seiten darauf heisst es: „Stundenminuten und Stundensecunden finde ich in der europäischen Literatur erst im Ausgang des Mittelalters, im Osten zuerst bei Albiruni (ca. 1000 n. Chr.), so dass es als höchst wahrscheinlich erscheint, dass die arabischen Astronomen die ersten waren,

26) So z. B. ausgesprochen in einem Buche, das mir gerade zur Hand ist, nämlich in C. de Harlez, Manuel de la Langue Mandchoue. Grammaire, anthologie et lexique. Paris, 1884; gr. 8⁰.

27) Wiener Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes. Herausgegeben und redigirt von G. Bühler, J. Karabacek, D. H. Müller, F. Müller, L. Reinisch. V. Band. Wien, 1891; gr. 8⁰.

die die Sexagesimalrechnung auf die Stundenrechnung anwandten." — Das haben sie wohl gethan, und zwar lange vor Bîrûnî (1041 gest.), wenn auch nur in der Rechnung ihre Ausdrucksweise der unserigen conform war. Bei Beobachtungen bedienten sie sich der ächten Brüche für die Unterabtheilungen der Stunden. So z. B. giebt Aḥmed ibn ʿAbdallâh Ḥabaś, gelegentlich einer von ihm am 20. Juni 829 beobachteten Mondfinsterniss, den Längenunterschied zwischen Bagdad und Alexandria zu 50^m an und hat damit, genau wie wir, die Bogengrösse des Ptolemaeus in Zeitmaass umgewandelt (البعد بين بغداد والاسكندرية نَ دقيقة من ساعة معتدلة), dagegen sagt er von einer Sonnenfinsterniss, dass sie um 8 Uhr und $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{10}$, also $8^h\ 16^m$, zu Ende war; oder von einer Mondfinsterniss: sie schloss $10^h\ 7^m\ 30^s$ (عشر ساعات وثمن ساعة زمانية 10 Stunden und $\frac{1}{8}$ Stunde). Alles in Buchstaben, und sexagesimale Eintheilung gemeint.

Eduard Mahler, Astronomische Untersuchung über die angebliche Finsterniss unter Thakelath II. von Aegypten. (LIV. Band der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien, 1888; gr. 4^0.)

F. Kielhorn, Tafeln zur Berechnung der Jupiter-Jahre nach den Regeln des Sûrya Siddhânta und des Jyotistattva. (Aus dem 36. Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen, 1889; gr. 4^0.)

G. Schlegel und F. Kühnert, Die Schu-King-Finsterniss. Veröffentlicht durch die Königliche Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam. Amsterdam, 1889; 4^0.

Im Jahre 1880 fand v. Oppolzer als Datum dieser Sonnenfinsterniss — 2136 October 21; nach den Verfassern würde sie sich — auf Grund philologisch-historischer Betrachtungen, mit astronomischer Unterstützung — am 7. Mai — 2165 ereignet haben.

Heinrich Brugsch, Die Aegyptologie. Abriss der Entzifferungen und Forschungen auf dem Gebiete der ägyptischen Schrift, Sprache und Alterthumskunde. Leipzig, 1891; gr. 8^0.

S. 357. „Die viel behandelte Sothis- und Phoenix-Periode, um auch an diese zu erinnern, war nach Dr. Krall's (S. 79, Studien zur Gesch. d. alt. Aeg. I.) zutreffenden Bemerkungen eine Erfindung des zweiten Jahrhunderts, in Folge der am 20. Juli 139 zu Ehren des Kaisers Antoninus Pius gefeierten Apokatastasis, in welcher der bewegliche und der unbewegliche 1. Thoth zusammengefallen waren. Den damaligen Chronographen, welche sich mit dem manethonischen Werke über die Geschichte Aegyptens beschäftigten, erschien die Sothisperiode als das geeignetste Hülfsmittel,

die grossen Zeitabschnitte einer mangelnden Aera durch leicht berechenbare Zahlen zu fixiren."

Mihira, Varâha, The Pañchasiddhântikâ. Astronomical work. The text, ed. with an original commentary in sanskrit and an english translation and introduction by G. Thibaut, ph. Dr., and M. Sudhâkara Dvivedi. Benares, 1891; 4⁰.

Die Pañchasiddhântikâ, eine gedrängte Darstellung des Inhaltes von fünf alten Siddhânta, oder Lehrbüchern der Astronomie, wurde in der Mitte des 6. Jahrhunderts n. Chr. von dem Astronomen Varâha Mihira verfasst, der dabei, wie es den Anschein hat, so zu Werke ging, dass er jene fünf Systeme, von denen das dritte und vierte etwa aus dem Jahre 400 n. Chr. stammt, ihrem Alter nach aufeinander folgen liess. Im obigen Werke wird der Urtext sowohl nach dem benützten Manuscript, als auch in verbesserter Gestalt mitgetheilt; hieran reihen sich der Sanskrit-Commentar von Sudhâkara und die englische Uebersetzung. Der Herr Herausgeber verbreitet sich über den griechischen Einfluss auf die indische Astronomie und hat, wie mich dünkt, diesem Thema auch einige neue Seiten abgewonnen; so glaubt er nicht, dass sich die indische Astronomie unmittelbar auf die Werke eines Hipparch und Ptolemaeus gründe, sondern dass das occidentalische Element hierin aus griechischen Schriften secundärer Kräfte geschöpft sei.

(New Map of) Persia, Afghanistan and Beluchistan. Compiled under the supervision of Hon. G. Curzon. M. P. by Wm. Ino. Turner. Natural scale 1 : 3 810 000 = 60 miles to an inch. (Proceedings of the Royal Geographical Society and Monthly Record of Geography. Vol. XIV. London, 1892; gr. 8⁰.)

Herr G. Curzon, der intellectuelle Urheber dieser neuesten Karte von Persien, berichtet in einem Begleitschreiben, welches von dem gänzlichen Mangel an einer zuverlässigen Karte dieses grossen Königreiches ausgeht, über die Art ihrer Ausführung und das Material, worauf sie sich gründet. Ueber letzteres spricht er sich sehr unzufrieden aus und gesteht, dass es ihm, Alles in Allem genommen, nur den Eindruck eines „Gemisches oder Flickwerkes" gemacht habe. Benützt wurden englische (auch Admiralitäts-), russische und deutsche Karten, sowie viele itineraria, die häufig hingenommen werden mussten, wenn sie auch keinen Vermerk über die angewandten Instrumente enthielten. Mit rechter Schaffensfreude mag wohl Herr C., dem übrigens die Ergebnisse der Lemm'schen Reise und der Deutschen Expedition (im Jahre 1874) entgangen zu sein scheinen, kaum an seine Arbeit herangetreten sein. Dass er sie trotzdem zu Ende geführt

und uns zu einer kartographischen Darstellung von Persien verholfen hat, die wenigstens alles Das, was bis jetzt an hierzu erforderlichen Daten vorlag und ihm bekannt geworden war, gewissenhaft verwerthet, dafür hat er sich ohne Zweifel ein volles Anrecht auf Dank erworben. Wie freimüthig er selbst über die fertige Leistung, bei deren Vollendung ihm eine tüchtige Hülfskraft zur Seite stand, urtheilt, mögen seine eigenen Worte sagen: „Wissenschaftliche Schärfe kann man zur Zeit keinem Entwurfe einer Karte des persischen Reiches zugestehen, und sicher werden sich, auf Grund zukünftiger Forschungen, gar manche Schlussfolgerungen, bei denen wir stehen geblieben sind, als unhaltbar erweisen. Gegenwärtig ist man, selbst an die beste Karte von Persien, kein höheres Maass der Anforderungen zu stellen berechtigt, als dass sie in angenäherter Zuverlässigkeit Ersatz für strenge Richtigkeit biete." „Denn" — schickt er vorauf — „weder ist jemals eine Aufnahme von Persien gemacht worden, noch finden sich dort so schätzbare fundamentale Vorbedingungen erfüllt, wie sich deren das britische Indien, ja sogar die an Persien angrenzenden Ländereien von Afghanistan und Belutschistan erfreuen; hier haben englische Officiere durch genaue Triangulationen die Grundlagen für alle späteren Aufnahmen im Kleinen geschaffen, und ein Netzwerk gut fixirter Punkte oder Landmarken sorgt dafür, dass es einer künftigen Topographie des Landes nicht an dem nothwendigen mathematischen Gerippe fehle. Nicht so verhält es sich in Persien."

Perrier, Loewy et Bassot, Détermination des longitudes, latitudes et azimuts terrestres en Algérie. 3 parties, avec 19 planches. Paris, 1877—1880; 4⁰. (Mémorial du dépôt général de la guerre, tome XI.)

Von dieser Publication kann ich leider nichts weiter als ihren Titel mittheilen. Aber schon der rühmlichst bekannte Name des Einen der Herausgeber dürfte dafür bürgen, dass durch jene Ortsbestimmungen die mathematische Geographie des westlichen Nordafrika eine wesentliche Förderung erfahren hat.

Addendum.

Erst nach Beendigung des Druckes sehe ich, dass ich im I. Abschnitte (S. 95) vergessen habe, noch zwei mittelalterliche arabische Himmelsgloben anzuführen. Ueber den einen, aus dem Jahre 1275, ist nachzulesen:

B. Dorn, Description of an Arabic Celestial Globe etc. London, 1829; 4⁰.

Der andere, in der Bibliothek zu Paris befindlich, soll gegen das 13. Jahrhundert verfertigt worden sein.

DIE

ANFÄNGE DER GRUPPENTHEORIE

UND

PAOLO RUFFINI.

VON

HEINRICH BURKHARDT

IN GÖTTINGEN.



An den Forschungen über die ältere und älteste Geschichte der Mathematik nimmt augenblicklich eine grosse Reihe von Mitarbeitern teil; dagegen die Kenntnis der Entwickelung unserer Wissenschaft in den letzten Jahrhunderten hat nicht in gleichem Masse Förderung erfahren. Einige wenige Notizen über das erste Auftreten dieses oder jenes Satzes pflanzen sich von einem Lehrbuch zum andern fort; wer nähere Belehrung sucht, ist darauf angewiesen, auf die Quellen selbst zurückzugehen. So findet man z. B. überall die Angabe, der italienische Mathematiker Ruffini sei der erste gewesen, der behauptet und zu beweisen versucht habe, die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch Wurzelzeichen sei nicht möglich; man findet auch angegeben, worin die wesentlichste Lücke dieses Beweisversuchs bestanden hat; aber dass ein grosser Teil derjenigen substitutionentheoretischen Entwicklungen, welche man Cauchy zuzuschreiben gewohnt ist, bereits von Ruffini durchgeführt worden war, das scheint ganz in Vergessenheit gerathen zu sein.[1]) Eine Darstellung des wesentlichen Inhalts von Ruffini's einschlägigen Arbeiten wird daher vielleicht auf ein gewisses Interesse rechnen dürfen; es sei aber gestattet, vorher die allmähliche Entwicklung der ihnen zugrunde liegenden Ideen bei seinen Vorgängern zu verfolgen.

1. Hudde. Saunderson. Le Seur. Der erste Anlass zur Verwertung combinatorischer Betrachtungen bei algebraischen Untersuchungen scheint sich dargeboten zu haben, als man sich die Aufgabe stellte, die Gleichung m^{ten} Grades zu bilden, welche m von den n Wurzeln einer vorgelegten Gleichung n^{ten} Grades $(m < n)$ zu Wurzeln hat. Für $n = 4, 5, 6$ und $m = 2$, bezw. 3 ist diese Frage behandelt in der „epistola Johannis Huddenii de reductione aequationum", welche Fr. van Schooten seiner lateinischen Übersetzung von Descartes' géométrie[2]) angehängt hat. Zu-

1) In der Bonner Diss. von J. Hecker: Über Ruffini's Beweis für die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichung von einem höheren als dem vierten Grade (Bonn 1886) ist nur die letzte Redaction von R.'s Beweis (die von 1813) besprochen, welche gerade seine interessantesten Entwicklungen nicht enthält.

2) Geometria a Renato des Cartes . . . . opera atque studio Francisci a Schooten. Amstel. ap. Elzevirios. II. Aufl. 1659, III. 1683.

nächst ist zwar dort[1]) nur nach rationalen Factoren der gegebenen Gleichung gefragt; indess wird diese Frage in der Weise beantwortet, dass zuerst die betreffende Hilfsgleichung wirklich aufgestellt und dann untersucht wird, ob sie eine rationale Wurzel besitzt. In ähnlicher Weise findet sich die Frage dann in den Lehrbüchern der folgenden Zeit behandelt; aber erst geraume Zeit später hat Saunderson[2]) darauf hingewiesen, dass die Bestimmung der quadratischen Factoren eines Polynoms vierten Grades notwendig auf eine Gleichung sechsten Grades führen müsse, da ja sechs die Anzahl der möglichen Factoren dieser Art sei. Dass er sich auf diesen speciellen Fall beschränkt hat, erklärt sich aus dem elementaren Charakter seines Werkes. Den allgemeinen Fall fasste bald darauf Le Seur ins Auge; er gibt:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m}$$

als Grad der Gleichung an, von welcher die Bestimmung der Divisoren m^{ten} Grades eines Polynoms vom n^{ten} Grade abhängt.[3])

Das Interesse, welches die Mathematiker jener Zeit gerade dieser Frage entgegen brachten, beruhte übrigens darauf, dass man auf diesem Wege zum Beweis der Existenz der Wurzeln höherer algebraischer Gleichungen gelangen zu können meinte. Man ging dabei von folgendem Gedankengang aus: mit demselben Recht, mit welchem man die gewöhnlichen imaginären Grössen, also Wurzeln quadratischer Gleichungen, der Rechnung unterziehe, könne man auch annehmen, dass durch Gleichungen höherer Grade imaginäre Grössen definirt würden, sodass es nur darauf ankomme, zu untersuchen, ob diese letzteren unter den ersteren bereits inbegriffen sind oder eine neue Grössengattung bilden. Diese Frage sei aber in ersterem Sinne entschieden, sobald es gelinge, die Bestimmung der quadratischen Divisoren eines vorgelegten Polynoms auf die Auflösung einer Reihe von Resolventengleichungen ungeraden Grades zurückzuführen, deren jede ja mindestens eine reelle Wurzel besitze. Den in diesen Versuchen liegenden Schlussfehler hat bekanntlich erst Gauss in seiner Dissertation aufgedeckt.[4])

2. Waring. In ausgedehnterem Masse erscheint die Anwendung combinatorischer Betrachtungen zur Bestimmung des Grades von Resolventen-

1) p. 487 der III. Aufl.

2) The elements of algebra by Nicholas Saunderson, 2 Bde., Cambridge 1740 (posthum); Bd. II, p. 737.

3) Memoire sur le calcul integral par le P. Thomas Le Seur. Rome 1748 (nicht 1758, wie zuweilen angegeben); p. 22. 23. Das Werkchen handelt von der Integration rationaler gebrochener Functionen durch Partialbruchzerlegung.

4) ges. W. Bd. III, p. 5. p. 14.

gleichungen zuerst bei Waring, und zwar an vielen zerstreuten Stellen im ersten Teil seiner „miscellanea analytica“[1]) und in den daraus erwachsenen „meditationes algebraicae“.[2]) So wird z. B. nach den ersten einleitenden Sätzen sofort das Problem formulirt:[3]) „invenire aequationem, cujus radices sint quaecumque algebraica radicum datarum aequationum functio.“ Zur Lösung desselben werden zwei allgemeine Methoden angegeben und an Beispielen erläutert: die eine derselben beruht auf der Bildung symmetrischer Functionen, die andere auf einem Eliminationsverfahren. Hauptsächlich aber sind hierher gehörige Untersuchungen zusammengestellt im IV. Cap. der misc. anal., im III. der med. alg. unter der Überschrift: „de reductione et resolutione aequationum“. Hier findet sich die mehrerwähnte Aufgabe der Divisoren m^{ten} Grades eines Polynoms vom n^{ten} Grade behandelt;[4]) als hinlänglicher Beweis dafür, dass die durch Permutation der Wurzeln der gegebenen Gleichung entstehenden Werte der Hilfsunbekannten alle derselben Hilfsgleichung genügen müssen, gilt auch Waring noch die einfache Wendung: „quot sunt combinationes m radicum in majore multitudine n radicum, tot erunt problematis solutiones et consequenter tot erunt radices aequationis reducentis“. An der letztgenannten Stelle findet sich auch bereits die Bemerkung, dass nach Bestimmung eines Coefficienten des Divisors die übrigen durch blosse Division erhalten werden könnten, den Fall allein ausgenommen, dass die Gleichung für jenen ersten Coefficienten gleiche Wurzeln besitzt. Dabei wird auf eine spätere Stelle (p. 166) verwiesen, an welcher der allgemeine Satz ausgesprochen wird: „Sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben, so lassen sich beide durch dieselben Irrationalitäten ausdrücken, ausser wenn mehrere Werte der einen einander gleich sind; wenn aber 2, 3 .. Werte von x einem und demselben Wert von y entsprechen, so enthält die quadratische, cubische .. Gleichung, welcher diese Werte von x genügen, keine andern Irrationalitäten als diejenigen, welche in dem zugehörigen Werte von y auftreten“. Erwähnenswert dürfte auch sein, dass Waring die sogenannte Tschirnhaustransformation kennt und den Grad der

---

1) Cantabrigiae 1762. Der zweite Teil dieses Werkes handelt von der Curventheorie; die proprietates algebraicarum curvarum (ib. 1772) stehen zu ihm in ähnlichem Verhältnis, wie die med. alg. zum ersten.

2) ib. 1770; die folgende Aufl. von 1782 ist als ed. III bezeichnet, indem die misc. anal. als erste Auflage mitgezählt sind. — Die meditationes analyticae Waring's (ib. 1775) sind ein ausführliches Lehrbuch der Fluxionen- und Fluentenrechnung.

3) misc. anal. p. 11; med. alg. p. 17 (der Aufl. von 1770).

4) misc. anal. p. 34., med. alg. p. 87.

Hilfsgleichung richtig angibt, deren Auflösung erforderlich sein würde, um aus der durch jene Transformation gelieferten Resolvente die mittleren Glieder wegzuschaffen;[1]) den Namen Tschirnhaus nennt er übrigens erst in der Vorrede zur Auflage von 1782, p. X. XXV.

Als Beispiele für seine allgemeinen Auseinandersetzungen dienen Waring hauptsächlich die verschiedenen bekannten Methoden zur Auflösung der Gleichungen 4. Grades; er zeigt u. a.,[2]) wie die Wurzeln der durch dieselben gelieferten cubischen Resolventen sich als dreiwertige Functionen:

$$x_1 x_2 + x_3 x_4, \quad (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2, \quad (x_1 x_2 - x_3 x_4)^2$$

der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der vorgelegten Gleichung ausdrücken. Auch stellt er sich die Aufgabe, specielle Gleichungen zu finden, deren Auflösung in vorgegebener Weise möglich ist; unter anderem Gleichungen m^{ten} Grades, deren Wurzeln die (damals mehrfach behandelte) Form haben:

$$x = \sqrt[m]{\alpha_1} + \sqrt[m]{\alpha_2} + \cdots + \sqrt[m]{\alpha_{m-1}}.$$

Dass übrigens schon bei den allgemeinen Gleichungen fünften Grades die Bestimmung der α von Gleichungen höheren Grades als die vorgelegte abhängt, ergab sich ihm[3]) aus seinen combinatorischen Principien ohne Schwierigkeit.

---

1) ein specieller Fall misc. anal. p. 39; der allgemeine med. alg. p. 101.
2) med. alg. p. 94.
3) med. alg. p. 120.

Obwol dem Gegenstand vorliegender Untersuchung fremd, seien noch eine Reihe bemerkenswerter Dinge erwähnt, von welchen wenig bekannt zu sein scheint, dass sie sich bei Waring finden. Die Vorreden beider Werke enthalten eine in jeder folgenden Auflage vollständigere Sammlung von Notizen über die frühere Geschichte der Algebra, die namentlich über das 17. Jahrhundert und die erste Hälfte des 18. einen ganz guten Überblick gewährt. An der Spitze des Textes stehen in beiden Werken die Formeln zur Berechnung der Wurzelsummen aus den Coefficienten; Erwähnung verdient dabei vielleicht der Terminus „exponentes litterarum" für das, was man jetzt: Gewichte der Coefficienten zu nennen pflegt. Daran schliesst sich die Berechnung der übrigen symmetrischen Functionen aus den Wurzelsummen; die unter Waring's Namen bekannte Methode zur Berechnung der symmetrischen Functionen direct aus den Coefficienten findet sich nur in dem späteren Werke (p. 11). Die misc. anal. enthalten auch (p. 16) die Methode zur angenäherten Berechnung der Wurzeln (unter Voraussetzung ihrer Realität), welche sonst wol unter dem Namen von Graeffe geht. Einen grossen Teil beider Werke füllen Untersuchungen über rationale Wurzeln von bestimmten sowol, als von unbestimmten Gleichungssystemen; im 5. Cap. der med. algebr. dehnen sich dieselben zu einer förmlichen Sammlung zahlentheoretischer Sätze aus (dort ist auch der „Wilson'sche" Satz nach einer Mitteilung Wilson's an Waring zuerst veröffentlicht (p. 218, vgl. auch p. VIII)). Für Waring — wie

3. Lagrange. In demselben Jahre, in welchem Waring's meditationes algebraicae zum ersten Male erschienen, legte Lagrange seine umfangreiche Abhandlung: „Reflexions sur la théorie algébrique des équations"[1]) der Berliner Akademie vor. Der Inhalt derselben ist weit mehr als der der andern hier zu besprechenden Werke in die Lehrbücher übergegangen; so enthält z. B. das verbreitete Handbuch von Serret (art. 498—521) ausführliche Auszüge aus derselben. Es wird deshalb gestattet sein, sich hier auf eine ganz kurze Übersicht zu beschränken und nur die auf das allmähliche Emporkeimen der gruppentheoretischen Betrachtungsweise charakteristischen Stellen hervorzuheben.

Als Zweck der Arbeit gibt Lagrange in der Einleitung an: „die verschiedenen bis zu seiner Zeit für die algebraische Auflösung der Gleichungen gegebenen Methoden zu prüfen, sie auf allgemeine Principien zurückzuführen und a priori zu zeigen, warum sie bei den Gleichungen dritten und vierten Grades zum Ziel führen, bei höheren Graden aber versagen."

Im ersten Abschnitt wird von den verschiedenen zur Lösung der cubischen Gleichungen vorgeschlagenen Methoden gezeigt, dass sie alle auf Lösung einer Hilfsgleichung zweiten Grades hinauslaufen, deren Wurzeln sich durch die Wurzeln x', x'', x''' der vorgelegten Gleichung und die complexe dritte Einheitswurzel α in der Form:

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$$

oder als lineare Functionen eines solchen Ausdrucks darstellen lassen; die charakteristische Eigenschaft dieses Ausdrucks ist, dass er bei allen Permutationen der Wurzeln x', x'', x''' nur zwei verschiedene Werte anzunehmen im Stande ist. Der Abschnitt schliesst mit der Entwicklung einiger Sätze über Einheitswurzeln, welche aus der trigonometrischen Darstellung derselben gewonnen werden.

Im zweiten Abschnitt werden ebenso die Methoden zur Lösung der biquadratischen Gleichungen besprochen und gezeigt, dass dieselben sämtlich

---

auch für manche andere seiner Zeitgenossen — hatten diese Fragen auch ein grosses algebraisches Interesse, indem er sich (vgl. misc. anal. p. 48; med. algebr. p. 121) folgende Möglichkeit dachte, zur Lösung der allgemeinen Gleichungen höherer Grade zu gelangen: Man solle zunächst eine Resolvente annehmen mit einer grösseren Anzahl von Unbekannten, als Bedingungen zu befriedigen seien. Geeignete Eliminationen würden dann zu einer Gleichung mit mehreren Unbekannten führen. Gelänge es, rationale Werte der letzteren zu finden, welche diese Gleichung befriedigen, so könne man von ihnen aus zur Lösung der gegebenen Gleichung gelangen.

1) Nouveaux mémoires de l'académie de Berlin pour les années 1770. 1771 (Berl. 1772. 73). — Oeuvres de L., éd. Serret t. III.

auf der Benutzung von Hilfsgleichungen beruhen, deren Wurzeln dreiwertige Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind, wie z. B.

$$x' x'' + x''' x^{IV}, \quad (x' + x'' - x''' - x^{IV})^2,$$
$$(x' + x'' \sqrt{-1} - x''' - x^{IV} \sqrt{-1})(x' - x'' \sqrt{-1} + x''' - x^{IV} \sqrt{-1}).$$

Von einer etwas weniger übersichtlichen Function dieser Art wird diese Eigenschaft (die Dreiwertigkeit) folgendermassen bewiesen (art. 43): Sie bleibt unverändert, wenn x' mit x'' vertauscht wird, also hat sie nicht 24 verschiedene Werte, sondern höchstens 12. Sie bleibt auch unverändert, wenn x''' mit x^{IV} vertauscht wird, also reduciren sich die 12 Werte auf 6. Sie bleibt endlich auch unverändert, wenn x' mit x''' und gleichzeitig x'' mit x^{IV} vertauscht wird, also reduciren sich die 6 Werte auf 3 „da auch diese Vertauschung von den vorigen unabhängig ist.“ Ausserdem bleibt sie noch unverändert bei gleichzeitiger Vertauschung von x' mit x^{IV} und von x'' mit x'''; „aber diese“, heisst es weiter, „kann nicht in Betracht kommen, da sie in den vorigen schon inbegriffen ist.“

Der dritte Abschnitt wendet sich zu analogen Untersuchungen für Gleichungen höherer Grade. Gerade von diesem Abschnitt gibt Serret Gedankengang und Resultate ziemlich vollständig wieder; jedoch ist wol zu beachten, dass er die Form der Darstellung insofern wesentlich modernisirt hat, als er sich symbolischer Bezeichnung der Substitutionen bedient, überhaupt sich auf eine vorhergehende systematische Behandlung der Substitutionentheorie stützt, von welcher Lagrange noch weit entfernt ist. Der Abschnitt schliesst mit einigen Auseinandersetzungen darüber, ob Aussicht vorhanden sei, auf dem eingeschlagenen Wege zu Hülfsgleichungen von niedrigerem Grade als die bis dahin erhaltenen zu gelangen. Lagrange glaubt schon bei Gleichungen sechsten Grades auf diese Hoffnung verzichten zu müssen, indem er bemerkt, dass es nicht gelinge, die 10 Werte des Ausdrucks:

$$(x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6)^2$$

so in zwei Reihen zu je fünfen zu spalten, dass das Produkt aus den Summen der fünf Werte jeder Reihe symmetrisch werde (art. 85).

Der vierte Abschnitt bringt die nachträgliche Begründung der im vorhergehenden bereits überall benutzten Sätze über den Grad von Resolventen. Ein eigentümliches Eliminationsverfahren, an den einfachsten Beispielen in inductiver Weise auseinandergesetzt, führt zur Erkenntnis des fundamentalen Satzes, dass der Grad einer Resolvente übereinstimmt mit der Anzahl m der verschiedenen Werte, welche ihre Wurzel bei sämtlichen Vertauschungen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung annimmt; der Satz,

dass alle symmetrischen Functionen der Wurzeln sich rational durch die Coefficienten ausdrücken lassen, wird nicht beim Beweise vorausgesetzt, sondern erst nachher als Specialfall des allgemeinen Satzes (für $m = 1$) erhalten. Von der Irreducibilität der erhaltenen Gleichungen ist dabei übrigens überhaupt nicht die Rede — eine bemerkenswerte Lücke nicht sowol für Lagrange's eigene Entwicklungen, für welche dieser Punkt nebensächlich ist, als für die darauf gebauten Folgerungen späterer. Weiterhin wird auch bereits der allgemeine Satz ausgesprochen, dass die Anzahl der verschiedenen Werte einer rationalen Function von μ Grössen stets ein Teiler von $\mu!$ ist; der Beweis wird übrigens nur für zweiwertige Functionen explicite durchgeführt, während für alle andern Fälle die Bemerkung genügen muss, dass man in ihnen ebenso schliessen könne. Es folgt dann noch der bekannte Beweis des Lehrsatzes, dass durch eine rationale Function der Wurzeln x einer Gleichung jede andere solche Function y sich rational ausdrücken lässt, welche bei allen den Permutationen der x ungeändert bleibt, die den Wert von t nicht ändern; dass aber y von einer Gleichung m^{ten} Grades mit in t rationalen Coefficienten abhängt, wenn zu einem Werte von t m Werte von y gehören.[1]) Als Beispiele werden wieder die zweiwertigen Functionen von drei und die dreiwertigen von vier Grössen behandelt.

Die Resultate seiner Untersuchung fasst Lagrange (art. 109) folgendermassen zusammen:

„Täusche ich mich nicht, so sind im vorhergehenden die wahren Principien der Auflösung der Gleichungen und das geeignetste analytische Verfahren, um zu ihr zu gelangen, enthalten. Wie man sieht, reducirt sich alles auf eine Art von Combinationsrechnung, durch die man a priori die Resultate erkennen kann, welche man zu erwarten hat. Es würde am Platze sein, die Anwendung auf Gleichungen fünften und höheren Grades vorzunehmen, deren Auflösung bis jetzt nicht bekannt ist; aber diese Anwendung verlangt eine zu grosse Anzahl von Untersuchungen und Combinationen, als dass wir uns jetzt dieser Arbeit unterziehen könnten. Wir hoffen jedoch zu anderer Zeit darauf zurückkommen zu können und wollen uns hier damit begnügen, die Grundlagen einer Theorie gelegt zu haben, die uns neu und allgemein scheint."

Anhangsweise folgen einige Bemerkungen über Gleichungen, zwischen deren Wurzeln eine bekannte Beziehung besteht; es wird auseinandergesetzt

---

1) Über die Art, wie Lagrange die bei diesem Satze auftretenden Ausnahmefälle numerischer Gleichheit der Werte formell verschiedener Functionen behandelt, vgl. man Hölder, Math. Ann. Bd. 34, p. 454 ff. (1889).

und an einigen Beispielen erläutert, in wie fern die Kenntnis einer solchen Beziehung auf Grund der entwickelten Principien zur Reduction der vorgelegten Gleichung führen kann. Übrigens macht dieser Anhang keinen Anspruch darauf, eine vollständige Theorie solcher speciellen Gleichungen darzustellen.

Der 2. Auflage seines „traité sur la résolution des équations numériques" (Paris 1808; oeuvres éd. Serret t. VIII) hat Lagrange als „note XIII" einen Auszug aus den drei ersten Abschnitten der vorbesprochenen Abhandlung beigefügt, der nur in der Theorie der Einheitswurzeln unter dem Einfluss der inzwischen erschienenen disquisitiones arithmeticae von Gauss einige Vereinfachungen, im übrigen aber keinen Fortschritt über die ausführlichere Darstellung hinaus aufweist. Zum Schlusse erwähnt Lagrange noch die sogleich zu besprechende Abhandlung von Vandermonde; er findet, dass dessen Methode aus einem in der Natur der Gleichungen gegründeten Princip entspringe und in dieser Beziehung direkter als seine eigene sei.

4. Vandermonde. Ebenfalls dem Jahre 1770 gehört eine dritte bedeutende algebraische Arbeit an, das „mémoire sur la résolution des équations" von Vandermonde.[1]) Über seine Absicht bei Verfassung desselben gibt Vandermonde in der Einleitung folgende Auskunft:

„... Es scheint mir, als könnte ein Teil der Schwierigkeiten der Natur der analytischen Methoden zugeschrieben werden, die man bisher allgemein benutzt hat; ich habe mich entschlossen einen andern Weg einzuschlagen. Meine Methode verlangt die Einführung keiner einzigen Unbekannten; bei jedem Schritt der Rechnung hat man es nur mit Gleichungen zu thun, die durch Ausführung der angedeuteten Operationen leicht verificirt werden können. ... Die Gleichung:

$$x^2 - (a + b)\, x + ab = 0$$

kann auf zwei Arten betrachtet werden: entweder als Gleichung zweiten Grades, dann stellt die Unbekannte eine zweideutige Function dar; oder als Produkt zweier Factoren ersten Grades; dann ist die Gleichung zweideutig und die Unbekannte hat zwei Werte, die es nicht sind.[2]) Handelt es sich nur um die Auflösung der Gleichungen, so müsste man die letztere

1) Histoire de l'académie des sciences, année 1771 (Paris 1774.) p. 365 ff. Wie eine Note besagt, war die Abhandlung bereits Nov. 1770 gelesen, konnte aber nicht in den Band für 1770 aufgenommen werden, weil Vandermonde damals noch nicht Academiemitglied war; die meditationes algebraicae Waring's und die reflexions Lagrange's lernte Vandermonde in der Zwischenzeit kennen.

2) Die Unbestimmtheit dieser Auseinandersetzungen beruht in letzter Instanz darauf, dass sowol der Begriff der monogenen Function, als der des Rationalitätsbereichs fehlt.

Auffassung vorziehen; verlangt man aber die Zusammensetzung der Wurzel aus $a + b$ und ab, so wird diese Wurzel notwendig zweiwertig sein müssen; denn ... die beiden Bedingungen:

$$a = \text{funct. } [(a + b), ab]$$

und:

$$b = \text{funct. } [(a + b), ab]$$

können nur zusammen bestehen, wenn die Function eine zweideutige ist. Eine solche Function ist z. B.:

$$\frac{1}{2}\left(a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}\right) \ldots''$$

Analog wird weiterhin für die Wurzel der cubischen Gleichung, unter r', r'' die beiden complexen dritten Einheitswurzeln verstanden, der Ausdruck aufgestellt:

$$\frac{1}{3}\left(a + b + c + \sqrt[3]{(a + r'b + r''c)^3} + \sqrt[3]{(a + r''b + r'c)^3}\right);$$

und es wird dann gezeigt, dass sich $(a + r'b + r''c)^3$ und $(a + r''b + r'c)^3$ rational durch $a + b + c$, $ab + ac + bc$ und abc ausdrücken lassen, bis auf ein Glied:

$$\pm (a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2),$$

dessen Quadrat erst diese Eigenschaft hat.[1])

Durch solche Überlegungen gelangt Vandermonde dazu, das allgemeine Problem der Gleichungsauflösung in folgender Weise zu formuliren:

erstens sei eine Function der W u r z e l n zu finden, von der man sagen könne, dass sie jeder beliebigen der Wurzeln in einem gewissen Sinne gleich ist;

zweitens sei diese Function auf eine solche Form zu bringen, dass es gleichgiltig ist, wie man die Wurzeln unter einander vertauscht;

drittens seien in dieselbe die Summe der Wurzeln, die Summe ihrer Produkte zu je zweien u. s. w. einzuführen.

Vandermonde beginnt mit dem dritten Teil dieses Programms, indem er die erforderlichen Formeln ableitet, welche der Theorie der symmetrischen Functionen angehören. Dann schaltet er eine Theorie der Einheitswurzeln ein; dieselbe enthält bereits (art. 6) ohne Beweis die Behauptung, die Gleichung m^{ten} Grades, von welcher die Bestimmung der $(2m + 1)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln abhängt, sei „immer leicht zu lösen".[2])

---

1) Man sieht, dass Vandermonde unter einer „synthetischen" Methode eine solche versteht, welche von einer vorausgesetzten Form der Wurzeln ausgeht und die Gleichungen aufsucht, welchen Wurzeln von dieser Form Genüge leisten.

2) Die expliciten Ausdrücke der elften Einheitswurzeln sind art. 35 mitgeteilt, ohne Angabe ihrer Ableitung.

Hierauf wendet sich Vandermonde (art. 15 ff.) zu dem ersten Teil seiner Problemstellung. Er bildet aus nebeneinander gestellten Quadrat- und Kubikwurzeln eine Reihe von sechs-, acht-, neunwertigen Ausdrücken, findet aber, dass keiner derselben geeignet sei, die Wurzel einer allgemeinen Gleichung des entsprechenden Grades vorzustellen. Für weitergehende Versuche fühlt er das Bedürfnis nach einer abkürzenden Bezeichnung derjenigen Permutationen der Wurzeln, bei welchen die zu betrachtenden Functionen derselben ihren Wert nicht ändern; doch ist die von ihm gewählte (art. 24), wenn man von den einfachsten Fällen absieht, so schleppend, dass sie ihm wenig Vorteil zu gewähren im Stande ist. Gleichwol gelingt es ihm mit ihrer Hilfe, nicht allein die Behandlung der Gleichungen dritten und vierten Grades zu erledigen, sondern auch die Existenz der Resolventen sechsten Grades für die Gleichungen fünften, dann der Resolventen zehnten und fünfzehnten für die Gleichungen sechsten Grades darzuthun, sowie den Zusammenhang dieser letzteren mit der Zerlegung des Polynoms sechsten Grades in cubische, bezw. quadratische Factoren nachzuweisen. Nachdem er dann noch Resolventen von diesen Resolventen gebildet und sich überzeugt hat, dass auch diese ihn nicht weiter führen, bricht er ab (art. 34) mit der Erklärung: er habe vielfach vergeblich versucht, drei- oder vierwertige Functionen von fünf Grössen zu bilden, und er sei daher zu der Überzeugung gekommen, dass es keine solchen Functionen gebe. —

Nicht uninteressant sind die Bemerkungen, mit welchen der Secretär der Academie sein Referat über Vandermonde's Arbeit im Jahresbericht derselben (p. 49) begleitet. Er vergleicht sie mit Lagrange's reflexions und meint, dieser sei überzeugt, dass man einen andern Weg werde einschlagen müssen, um zur Auflösung der Gleichungen höherer Grade zu gelangen, während Vandermonde zu glauben scheine, wenn die Lösung überhaupt möglich sei, müsse sie auf diesem Wege gelingen; er für seine Person neige der letzteren Ansicht zu. Ob er damit die wahre Meinung beider Autoren richtig erkannt hat, steht dahin, da beide es vermieden haben, sich über diesen Punkt unumwunden auszusprechen.

5. Rückblick. Das Jahr 1770, in welchem kurz nach einander die die drei zuletzt besprochenen grossen Arbeiten: Waring's meditationes, Lagrange's reflexions und Vandermonde's mémoire ans Licht traten, bezeichnet in der Geschichte der Algebra den Abschluss einer gewissen Entwicklungsperiode: wie sich auch äusserlich dadurch kundgibt, dass nach ihrem Erscheinen die in ihnen erörterten Fragen fast ein Menschenalter hindurch ruhten. Es wird im Interesse der Übersicht zweckmässig sein, in wenigen Sätzen zu schildern, auf welchen Standpunkt die Lehre von der allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen höherer Grade

durch jene Arbeiten gebracht war. Man wusste aus denselben, dass alle bekannten Methoden zur Auflösung der Gleichungen 2. 3. 4. Grades trotz ihrer äusseren Verschiedenheit in einem Punkte übereinkommen: dass sie nämlich alle zunächst solche rationale Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung bestimmen, welche nur eine kleine Anzahl verschiedener Werte annehmen, wenn man jene Wurzeln auf alle möglichen Arten unter sich vertauscht; dass dann mit deren Hilfe weitere Functionen derselben Art bestimmt werden, welche in diesem Sinne einer grösseren Wertezahl fähig sind u. s. f.; dass aber dieser ganze Process innerhalb des Bereiches der rationalen Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sich abspielt. Man war aber darüber ganz im Unklaren, ob diese Eigenschaft der bekannten Auflösungsmethoden in der Natur des Problems begründet oder nur Ergebnis einer von Zufälligkeiten beeinflussten historischen Entwicklung sei. Man hatte ferner den Zusammenhang erkannt — oder vielmehr wol vielfach als selbstverständlich betrachtet —, welcher zwischen der Anzahl der verschiedenen Werte einer Function der erwähnten Art und dem Grad der Hilfsgleichung besteht, aus welcher sie zu berechnen ist; und man wusste auch, dass verschiedene Functionen, welche bei denselben Vertauschungen der Wurzeln ihren Wert ändern oder nicht ändern, zu dem erstrebten Zwecke gleich tauglich seien, abgesehen natürlich von grösserem oder geringerem Umfang der Rechenarbeit. Aber die Schlüsse, durch welche man die Richtigkeit dieser Erkenntnis darzuthun suchte, genügten vielfach dem Strengebedürfnis eben nur der damaligen Zeit, welche vom Satz des zureichenden Grundes sehr subjective Anwendungen zu machen sich berechtigt hielt. Man war überzeugt, dass es zu weiterem Vordringen auf diesem Gebiet erforderlich sei, die Mannigfaltigkeit der verschiedenen möglichen Vertauschungen der Wurzeln einer planmässigen Untersuchung zu unterziehen; aber es fehlte an einem leitenden Gesichtspunkt, dessen Verfolgung eine solche Untersuchung vor dem Verlorengehen in zahllose Einzelheiten hätte bewahren können. Man war endlich durch die Fruchtlosigkeit zahlreicher Versuche, die Gleichungen höherer Grade durch Wurzelziehen aufzulösen, zu der Vermutung geführt worden, dass solche Auflösung überhaupt nicht möglich sein werde; aber man besass kein Mittel, diese Unmöglichkeit zu beweisen. —

Wenn in späteren Zeiten die Tradition von diesen Erfolgen und Misserfolgen wesentlich an Lagrange's grosse Abhandlung anknüpft, so verdankt sie das wol vor allem ihren formalen Vorzügen: der Ausführlichkeit und Bestimmtheit in der Angabe der leitenden Ideen, der Übersichtlichkeit der Anordnung, der Durchsichtigkeit und — am Massstabe der Zeit gemessen — Strenge der Beweisführung. Sieht man nur auf den Inhalt, so

wird man Waring und Vandermonde das Zeugnis nicht versagen dürfen, dass auch sie unabhängig von Lagrange und gleichzeitig mit ihm einen grossen Teil seiner Resultate erhalten haben.

6. Ruffini; äussere Verhältnisse. Auf dem im vorigen Abschnitt geschilderten Stande blieb die Frage nach der Auflösung der höheren algebraischen Gleichungen während der letzten drei Decennien des achtzehnten Jahrhunderts stehen; selbst die bereits erhaltenen Resultate fanden nur langsam Eingang in die Lehrbücher.[1]) Ein weiterer Schritt vorwärts geschah erst durch Paolo Ruffini (geb. 1765, gest. 1822).[2]) Von den äusseren Schicksalen dieses merkwürdigen Mannes, dessen Leistungen, schon von seinen Zeitgenossen kaum gekannt, bei der Nachwelt noch mehr in Vergessenheit geriethen, sei nur in Kürze folgendes berichtet: Von Beruf eigentlich Arzt — wie einst Cardanus — trieb er nebenbei mathematische Studien, die ihm Lehrstellen an verschiedenen Schulen, zuletzt an der Universität Modena verschafften. Doch blieb er in diesen nicht unangefochten von Seiten einer oder der andern der rasch wechselnden Regierungen jener Zeit, da er in politischen und namentlich in kirchlichen Dingen am Überlieferten festhielt. Übrigens wusste er diese seine Überzeugung mit einem lebhaften italienischen Nationalgefühl zu vereinigen: Lagrange nennt er mit Stolz seinen Landsmann. Seine medicinischen Schriften werden wenig gerühmt, mehr seine unerschrockene Thätigkeit gegenüber den Epidemien, welche im Gefolge der kriegerischen Ereignisse jener Zeit auftraten. Auch als religiöser und philosophischer Schriftsteller hat er sich versucht. Uns gehen hier nur seine algebraischen Arbeiten an und auch von ihnen nur diejenigen, welche mit der Frage nach der allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen von höherem als dem vierten Grade durch Wurzelziehen zu thun haben. Es hat nämlich Ruffini die Unmöglichkeit solcher Auflösung zuerst bestimmt behauptet und zu beweisen versucht; und zwar hat er nicht weniger als sechs verschiedene Redactionen seines Beweises veröffentlicht. Diese sollen im folgenden der Reihe nach samt den sich

---

1) Die Elementi d'algebra von Pietro Paoli (Pisa 1794) enthalten t. I. p. 119 wenigstens ein Citat auf Lagrange; die 5. Ausgabe der Elémens d'Algebre von Clairaut (Paris 1797) in den Zusätzen des Herausgebers (L. C.) Auszüge aus Lagrange.

2) Eine ausführliche Biographie, in der jedoch das mathematische Interesse sehr zurücktritt, findet sich in den memorie della società italiana delle scienze t. 19. p. LXXXV—CX (1826), eine andere in: Biografia degli Italiani illustri, pubbl. per cura d' E. de Tipaldo, vol. 4 (Venezia 1837) p. 225—239. Kürzere Nachrichten bieten: Biographie universelle t. 39 (Paris 1825) p. 274; nouvelle biographie générale t. 42 (Paris 1863) col. 866, sowie Lombardi, storia della litteratura italiana.

an sie anschliessenden Schriften besprochen werden; sie verdienen in der That sämtlich Berücksichtigung, wenn man von Ruffini's Leistungen auf diesem Gebiete ein Bild gewinnen will.

7. Ruffini's Lehrbuch von 1799. Ruffini's erste Veröffentlichung auf algebraischem Gebiete ist ein zweibändiges Lehrbuch der Algebra, das unter dem Titel:

Teoria generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grade superiore al quarto

1799 zu Bologna erschienen ist. Nach Ableitung der allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen und Discussion der Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten, vierten Grades beginnt Ruffini seinen Unauflösbarkeitsbeweis im 13. Cap. dieses Werkes mit einer Classification der verschiedenen „Permutationen." Zum Verständnis dieser Classification ist vorab zu bemerken, dass er die sämtlichen Vertauschungen der Wurzeln, bei welchen eine Function derselben ihren Wert nicht ändert, als eine einzige Permutation bezeichnet; er versteht also unter einer „Permutation" dasselbe, was man seit Cauchy als ein „System conjugirter Substitutionen" und seit Galois als eine „Substitutionsgruppe" zu benennen pflegt. Charakterisirt ist eine solche Gruppe bekanntlich dadurch, dass jede Operation zu ihr gehört, welche darin besteht, dass man zwei ihrer Operationen nach einander vornimmt; dass diese Eigenschaft seinen „Permutationen" zukommt,[1]) ist Ruffini sehr wol bekannt und vielfach von ihm benutzt. Als „einfache Permutationen" bezeichnet er Gruppen, welche (nach jetziger Ausdrucksweise) aus den Potenzen einer einzigen Substitution bestehen; er unterscheidet deren zwei Arten, je nachdem letztere einen oder mehrere Cykeln enthält. Die übrigen Gruppen nennt er „zusammengesetzte Permutationen", und zwar der ersten, zweiten oder dritten Art, je nachdem sie intransitiv, transitiv und imprimitiv oder transitiv und primitiv sind. Bei Bestimmung der Transitivität berücksichtigt er übrigens nur diejenigen Wurzeln, welche in der gerade zu untersuchenden Function wirklich auftreten: eine unzweckmässige Festsetzung, welche ihn öfters zu weitschweifigen Fallunterscheidungen nötigt. Auch noch in einem andern Punkte weicht seine Ausdrucksweise von der jetzt üblichen ab: wo von den verschiedenen Werten derselben Function die Rede ist, sagt er stets: alle diese bleiben bei derselben Permutation ungeändert — während

1) Der Fall, dass zwischen „formell" verschiedenen Functionswerten „numerische" Gleichheit bestehen kann, wird an dieser Stelle von Ruffini noch nicht berücksichtigt; vgl. aber p. 138.

wir jetzt von „durch Transformation aus einander hervorgehenden" Gruppen sprechen. Dieser an und für sich gleichgiltige Umstand ist insofern nicht ohne Einfluss, als er Ruffini den Weg zum Begriff der „ausgezeichneten" Untergruppe versperrt. Übrigens sind seine Definitionen der verschiedenen erwähnten Arten von Permutationen zwar an und für sich betrachtet nicht eben klar; doch geht ihr Sinn aus den folgenden Beispielen und Anwendungen so unzweifelhaft hervor, dass man sicher sein kann, hier nicht spätere Ideen in ihn hineingedeutet zu haben. (Im folgenden soll im Allgemeinen die jetzt übliche Terminologie, nicht die Ruffini's gebraucht werden.)

Die Anzahl der verschiedenen Vertauschungen der Wurzeln, bei welchen eine gegebene Function derselben ihren Wert nicht ändert, nennt Ruffini den „Gleichheitsgrad" (grado di uguaglianza) dieser Function; dieser Begriff entspricht also unserem „Ordnung der zugehörigen Gruppe".[1]) Diese Zahl p bestimmt er nun für sämtliche bei fünf Elementen möglichen Gruppen. Für eine „einfache Permutation I. Art" ist sie — das zeigt er allgemein — gleich der Anzahl der durch sie versetzten Elemente; für eine „einfache Permutation II. Art" gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der betreffenden Anzahlen für die einzelnen „Componenten"; für eine „zusammengesetzte Permutation I. Art" gleich dem Produkt dieser Anzahlen.[2]) An „zusammengesetzten Permutationen II. Art" kennt Ruffini bei fünf Elementen nur eine Art, für welche $p = 8$ ist; die andere mit $p = 4$ (Vierergruppen) scheint er entweder übersehen oder als in der vorigen enthalten nicht besonders behandelt zu haben. Hierauf geht er über zur Discussion aller derjenigen „Permutationen III. Art", deren eine Componente eine cyclische Vertauschung aller fünf Grössen ist; er findet, dass dabei keine andern Werte von p als 10, 20, 60 oder 120 auftreten.[3]) Indem er dann noch allgemein den Satz ableitet, dass für eine Gruppe, welche keine solche cyclische Vertauschung aller fünf Grössen enthält, p niemals ein Vielfaches von 5 sein kann, erhält er als Hauptresultat seiner Untersuchung die Thatsache, dass p niemals gleich 15, 30 oder 40 wird, m. a. W. dass es keine Functionen von fünf Grössen gibt, welche gerade acht, vier oder drei verschiedene Werte annehmen, wenn

---

1) Dass diese Zahl stets ein Teiler von m' ist, behauptet Ruffini nach Lagrange, ohne es zu beweisen.

2) Die Componenten werden hier stillschweigend als „einfach" vorausgesetzt, was für $m = 5$, von einem trivialen Falle abgesehen, in der That gestattet ist.

3) Hier ist die Aufzählung aller möglichen Fälle insofern nicht vollständig, als die aus (12345) und (132) entstehende Gruppe fehlt; doch hat dieses Versehen auf das Resultat keinen Einfluss.

man diese Grössen auf alle möglichen Arten unter einander vertauscht (art. 275). Ausserdem enthält dieser Abschnitt (art. 273) noch einen anderen (ebenfalls durch Discussion aller Einzelfälle bewiesenen) allgemeinen Satz, den man jetzt etwa so aussprechen würde: Enthält eine Gruppe alle diejenigen Substitutionen, welche durch Transformation vermittelst einer bestimmten cyclischen Permutation von fünf Elementen aus einer ihrer Substitutionen hervorgehen, so enthält sie auch diese cyclische Substitution selbst.

Nunmehr geht Ruffini dazu über, die gefundenen gruppentheoretischen Resultate auf das Problem der Gleichungsauflösung anzuwenden. Er beginnt dabei mit dem Satze (art. 277): Besteht zwischen zwei rationalen Functionen M, Z der Wurzeln einer (allgemeinen) Gleichung fünften Grades eine Relation der Form:

$$Z^5 - M = 0,$$

so müssen alle 120 Werte von Z von einander verschieden sein. Stillschweigend ist dabei vorausgesetzt, dass Z bei irgend einer Vertauschung Q der Wurzeln sich ändern soll, bei welcher M ungeändert bleibt. Zum Beweis dient der letzterwähnte Hilfssatz (von art. 273): Es muss nämlich Q eine cyclische Vertauschung aller fünf Wurzeln sein. Würde nun Z bei irgend einer Operation P seinen Wert nicht ändern, so würde es ihn auch nicht ändern bei $Q^{-1}PQ$, also nach jenem Satze auch nicht bei Q selbst, der Voraussetzung zuwider. Daraus folgt zunächst, dass die Auflösung der Gleichung nicht mit der Ausziehung einer fünften Wurzel beginnen kann; sie kann aber auch nicht mit der einer dritten oder vierten Wurzel beginnen, weil keine drei- oder vierwertigen Functionen der Wurzeln existiren; also müsste der erste Schritt die Ausziehung einer Quadratwurzel sein (art. 280). Nachdem aber diese vollzogen ist, kann eine fünfte Wurzel immer noch so wenig wie vorhin ausgezogen werden; ferner keine zweite oder vierte Wurzel, da keine vier- oder achtwertigen Functionen der Wurzeln existiren; endlich auch keine dritte Wurzel; denn es existiren zwar sechswertige Functionen, dieselben werden aber nicht nach Adjunction der ersten Quadratwurzel dreiwertig (wie wieder durch Aufzählung der einzelnen Fälle gezeigt wird). Da nun andere Wurzelexponenten als 2, 3, 4, 5 nicht in Betracht kommen können, so ist dargethan, dass man durch Radiciren niemals zu Functionen der Wurzeln der allgemeinen Gleichung fünften Grades gelangen kann, welche mehr als zwei Werte besitzen, also auch nicht zu den Werten dieser Wurzeln selbst. —

Dieser Beweis unterliegt nun allerdings einer Reihe von Bedenken. Einmal wird fortwährend mit den Wurzeln der Gleichung operirt, ohne

dass ihre Existenz bewiesen würde.[1]) Zweitens sind die häufig vorkommenden Aufzählungen einer Reihe von denkbaren Fällen stellenweise lückenhaft. Drittens bedurften die Lagrange'schen Sätze, auf welchen die ganze Entwicklung beruht, damals zum Teile noch des Beweises; namentlich haben weder Lagrange selbst, noch Ruffini den Beweis dafür durchgeführt, dass die Anzahl der Werte einer Function von n Grössen stets ein Teiler von n' ist. Viertens ist ohne Beweis behauptet (art. 274: dedurremo non difficilmente), dass eine Gruppe, deren Ordnung ein Vielfaches von fünf ist, stets cyclische Permutationen aller fünf Wurzeln enthalten müsse; doch hat Ruffini sich diesen Beweis vielleicht durch vollständige Discussion aller Einzelfälle erbracht gedacht. Endlich — und das ist der schwerwiegendste Einwand — bleibt unklar, ob nur von rationalen Functionen der Wurzeln die Rede sein soll oder auch von irrationalen, sogenannten „accessorischen Irrationalitäten"; im ersten Fall bedürfte diese Beschränkung einer Rechtfertigung, im andern würde ein beträchtlicher Teil der gezogenen Schlüsse nicht zutreffen.

Ruffini beweist dann noch auf Grund derselben Principien die algebraische Unauflösbarkeit[2]) der Gleichungen sechsten und höheren Grades. Hierauf wendet er sich (capp. 15. 16) zu Untersuchungen über solche specielle Gleichungen, bei welchen eine aus der Form der Gleichung ersichtliche oder sonst irgendwoher bekannte Relation zwischen den Wurzeln zur Auflösung führt. Bemerkenswert ist dabei höchstens das art. 346 f. für den Fall gelehrte Verfahren, dass die bekannte Relation irrationale Functionen der Wurzeln enthält. Ruffini schreibt nämlich vor, die Relation von dieser irrationalen Form zu befreien und mit der so erhaltenen rationalen Relation weiter zu operiren; ob man nicht mit der gegebenen irrationalen Form unter Umständen mehr erreichen könne, darüber spricht er sich nicht aus.

Nachdem er hierauf ausführlich von Näherungsmethoden, Reihenentwicklungen, Kettenbrüchen u. dgl. gehandelt hat, kommt er am Schluss des ganzen Werkes art. 496 ff. noch einmal auf seinen Unauflösbarkeitsbeweis zurück, indem er sich folgenden Einwand macht: wenn auch die allgemeine algebraische Lösung der höheren Gleichungen nicht möglich sei, müssten doch bei jeder besonderen Gleichung Relationen zwischen den Wurzeln bestehen, welche man (wie vorher gezeigt) zur Lösung verwerten

---

1) art. 15. 20 scheint dieselbe als Axiom behandelt zu werden.

2) Dass unter einer „algebraischen" Auflösung in jener Zeit immer eine solche „durch Wurzelziehen" zu verstehen, sei hier ein für alle mal betont.

könne. Er erwidert darauf zweierlei: einmal selbst wenn dies der Fall sein sollte, würde es doch der Richtigkeit des Satzes von der Unmöglichkeit der allgemeinen algebraischen Auflösung keinen Eintrag thun; dann aber, keineswegs jede Relation zwischen den Wurzeln führe wirklich eine Reduction herbei. Ob nicht etwa bei jeder Gleichung mit rationalen Zahlencoefficienten (nur an solche denkt er zunächst) eine zur Reduction dienliche Relation besteht, diese Frage lässt er unerörtert.

8. Ruffini's Abhandlung von 1801. Bald nach dem Erscheinen der teoria generale delle equazioni veröffentlichte Ruffini in den memorie della società italiana delle scienze (t. 9, p. 444—526, Modena 1802; datirt vom 21. Oct. 1801) die Abhandlung: della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto. Gegenstand derselben ist die Untersuchung der Frage, wann die algebraische Auflösung einer Gleichung geschehen könne durch Lösung von Gleichungen niedrigerer Grade. Es bleiben also alle diejenigen algebraisch auflösbaren Gleichungen ausgeschlossen, in deren Lösung ein dem Grade der Gleichung gleicher Wurzelexponent vorkommt. Dies hat Ruffini damals übersehen, sein Versehen aber in einer Anmerkung zu seiner nächsten Abhandlung (t. 10, p. 434) richtig gestellt.

Im ersten Teil der Abhandlung werden zunächst die Gleichungen (nur von solchen mit rationalen Zahlencoefficienten ist die Rede) eingeteilt in einfache (d. i. irreducible) und zusammengesetzte (reducible); die letzteren werden ausgeschlossen. Es folgt dann eine Reihe von Erörterungen über die Ableitung einer Function der Wurzeln aus einer andern. Die Übersichtlichkeit derselben leidet sehr darunter, dass Ruffini auch hier zunächst immer nur die Permutationen der in der Function wirklich auftretenden Wurzeln in Betracht zieht. Hierauf wendet sich Ruffini zu den Modificationen, welche die allgemeinen Sätze der Gleichungstheorie erleiden, wenn zwischen den Wurzeln eine bekannte Relation besteht, m. a. W. wenn der Wert einer bestimmten Function derselben als bekannt angesehen wird; dabei knüpft er an die oben (nr. 7 a. E.) besprochenen Schlussabschnitte seiner „teoria“ an, indem er eine Reihe von Fällen aufführt (art. 13 ff.), in welchen die Kenntnis einer solchen Relation nicht zu einer Reduction der vorgelegten Gleichung führt. Am Schlusse dieses Teils (art. 16 ff.) wendet sich Ruffini zu einer nicht uninteressanten Untersuchung der folgenden Frage: Es kann vorkommen, dass die bekannte Function t der Wurzeln bei gewissen Permutationen derselben zwar ihre Form, aber wegen der speciellen Werte der letzteren nicht auch gleichzeitig ihren numerischen Wert ändert, dass etwa die formell verschiedenen Functionen $t' \, t'' \ldots t^{(\alpha)}$ alle den gleichen Wert K besitzen. Alsdann lassen sich die mit t ähn-

lichen Functionen nicht mehr rational durch t ausdrücken und die weiter gezogenen Folgerungen werden hinfällig. Ruffini gibt für diesen Fall folgende Regel zur Bildung einer andern Function T, für welche dieser störende Umstand nicht mehr eintritt:

Es seien $t_1, t_2 \ldots t_p$ die formell verschiedenen Functionen, welche aus t durch die sämtlichen Vertauschungen der Wurzeln sich ergeben; von ihnen sollen $t_1, t_2 \ldots t_\alpha$ den gleichen numerischen Wert besitzen, dagegen $t_{\alpha+1}, t_{\alpha+2} \ldots t_p$ von t_1 numerisch verschieden sein. Man bildet nun zunächst:

$$T_1 = t_1 + t_2 + \cdots + t_{\alpha-1} + t_\alpha$$

so werden aus ihm durch die verschiedenen Vertauschungen der Wurzeln x sich eine Reihe von

$$q = \binom{p}{\alpha}$$

Functionen ergeben, nämlich:

$$\begin{aligned} T_2 &= t_1 + t_2 + \cdots + t_{\alpha-1} + t_{\alpha+1}, \\ T_3 &= t_1 + t_2 + \cdots + t_{\alpha-1} + t_{\alpha+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_q &= t_{p-\alpha+1} + t_{p-\alpha+2} + \cdots + t_{p-1} + t_p. \end{aligned}$$

Solange nun ausser den bereits vorausgesetzten Beziehungen zwischen den x keine weiteren bestehen, wird keine von diesen Functionen den gleichen Wert wie T_1 besitzen; in diesem allgemeinen Fall ist also bereits T_1 eine Function der gewünschten Art.

Aber in speciellen Fällen kann eine solche Gleichheit zwischen den T sehr wol eintreten; alsdann verfährt Ruffini folgendermassen. Er versteht unter ε der Reihe nach die Primzahlen 1, 2, 3, 5, 7 ... ad inf. und denkt sich die Functionen gebildet:

$$\begin{aligned} T_1(\varepsilon) &= t_1^\varepsilon + t_2^\varepsilon + \cdots + t_{\alpha-1}^\varepsilon + t_\alpha^\varepsilon, \\ T_2(\varepsilon) &= t_1^\varepsilon + t_2^\varepsilon + \cdots + t_{\alpha-1}^\varepsilon + t_{\alpha+1}^\varepsilon, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_q(\varepsilon) &= t_{p-\alpha+1}^\varepsilon + t_{p-\alpha+2}^\varepsilon + \cdots + t_{p+1}^\varepsilon + t_p^\varepsilon. \end{aligned}$$

Würde nun für einen bestimmten Index μ die Gleichung:

$$T_1(\varepsilon) = T_\mu(\varepsilon)$$

für unendlich viele Werte von ε bestehen, so würde daraus folgen, dass einer der Werte $t_{\alpha+1}, t_{\alpha+2} \ldots t_p$ numerisch gleich t_1 wäre, der Voraussetzung zuwider.[1]) Da nun auch die Anzahl q der Indices μ eine endliche

1) Ruffini führt diesen Beweis an einem Beispiel; jetzt kann er leicht all-

ist, so muss es Werte von ε geben, für welche kein $T_\mu(\varepsilon)$ dem $T_1(\varepsilon)$ gleich ist.[1]) Ein solches $T_1(\varepsilon)$ ist dann in der That eine Function der verlangten Eigenschaft: alle die formell von ihr verschiedenen Functionen, welche aus ihr durch Permutation der Wurzeln x hervorgehen, haben auch numerisch von ihr verschiedene Werte; und insbesondere behält sie ihre Form und ihren Wert nur bei solchen Permutationen der Wurzeln, bei welchen t_1 seinen numerischen Wert nicht ändert. Übrigens braucht sie nicht bei diesen allen ungeändert zu bleiben[2]); aber dann ist sie (art. 22, nr. 4, 5) zur Reduction der vorgelegten Gleichung nicht weniger, sondern nur um so mehr geeignet. — Der Satz von der Existenz einer solchen Function T leistet Ruffini etwa dieselben Dienste, wie uns jetzt der Satz „dass jede Gattung Functionen von nicht verschwindender Discriminante enthält"; er ist aber nicht mit diesem Satze identisch.

Der zweite Teil der Abhandlung (p. 476 ff.) wendet sich nunmehr der eigentlichen Aufgabe zu. Er beginnt mit dem Beweise, dass die Gruppe[3]) einer irreducibeln Gleichung transitiv sein, dass also die nach den vorher gegebenenen Vorschriften gebildete Function T alle Wurzeln enthalten müsse (art. 26). Hierauf wird gezeigt, dass die Lösung einer Hilfsgleichung niedrigeren Grades nur dann die gegebene Gleichung zu einer reducibeln machen kann, wenn die Gruppe der letzteren vorher imprimitiv war (zusammengesetzt von der zweiten Art nach Ruffini's Terminologie; art. 29). Bis hieher scheinen seine Schlüsse vollkommen richtig zu sein; in der That sind sie, so fremdartig ihre Darstellung auch erscheinen mag, von den jetzt zu gleichem Zwecke angewandten nicht wesentlich verschieden. Nunmehr aber übersieht er, dass eine selbst nicht imprimitive Gruppe doch imprimitive ausgezeichnete Untergruppen besitzen kann und gelangt so zu der folgenden falschen[4]) Verallgemeinerung des vorigen richtigen Satzes:

---

gemein auf Grund der Determinantendarstellung des Differenzenprodukts geführt werden.

1) Die Durchsichtigkeit dieses Beweises leidet bei Ruffini darunter, dass er (art. 18, 19) noch verschiedene Möglichkeiten bespricht, ohne zu bemerken, dass dieselben durch die vorher getroffenen Festsetzungen bereits beseitigt sind.

2) Das würde nur der Fall sein, wenn $t_2, t_3 \ldots t_\alpha$ bei denselben Permutationen wie t_1 ihren Wert nicht änderten; vgl. hiezu Hölder, math. Ann. Bd. 34, p. 40 (1888).

3) Die „Gruppe der Gleichung" erscheint hier immer als „die Permutation, bei welcher T seinen Wert nicht ändert".

4) Für Gleichungen, deren Grad keine Primzahlpotenz ist, ist dieser Satz bekanntlich richtig, aber wol nicht mit so einfachen Mitteln zu beweisen. — Dass Ruffini nicht daran gedacht hat, seinen Satz an den Gleichungen vierten Grades einer Prüfung zu unterwerfen, die die Unrichtigkeit desselben sofort ans Licht gebracht hätte, ist auffallend.

Eine Gleichung ist nur dann durch eine Reihe von Hilfsgleichungen niedrigerer Grade auflösbar, wenn ihre Gruppe imprimitiv ist (art. 33).

Die Aufgabe, zu untersuchen, ob dies bei einer vorgelegten Gleichung der Fall ist, führt auf die Frage, ob diejenigen Resolventen rationale Factoren haben, von welchen die Produkte der Wurzeln zu je μ abhängen; und mit dieser und verwandten Fragen beschäftigt sich der dritte Teil der Abhandlung. Zunächst werden Formeln aus der Theorie der symmetrischen Functionen zusammengestellt, welche zur Aufstellung dieser Gleichungen identisch sind (art. 37). Hierauf wird gezeigt, wie nach Bestimmung des Produkts von μ Wurzeln die übrigen symmetrischen Functionen dieser μ Wurzeln sich auf (im allgemeinen) rationalem Wege durch ein Divisionsverfahren bestimmen lassen. Dasselbe weicht von dem Verfahren von Lagrange ab und ist zunächst nur für diesen speciellen Fall geeignet; es wird aber dann wie folgt verallgemeinert (art. 48): Sei u_1 ein gegebener Wert einer Function u der Wurzeln, t_1 der zugehörige Wert einer ähnlichen Function u. Man bezeichne mit t eine Hilfsgrösse und bilde das Produkt aller möglichen Werte des Trinoms:

$$Z^2 + tZ + u.$$

Die Coefficienten der einzelnen Potenzen von Z in diesem Produkt sind als symmetrische Functionen rational bekannt. Division desselben mit $Z^2 + tZ + u_1$ liefert einen in Z linearen Rest, der für jedes Z verschwinden muss. Von den hieraus entspringenden 2 Gleichungen in t ist t_1 gemeinsame Wurzel und zwar die einzige, also rational bestimmbar, wenn nicht formell verschiedene u numerisch gleiche Werte haben.

9. Abbati.[1]) Im folgenden (10.) Band derselben memorie findet sich p. 385—409 ein Brief von Pietro Abbati (conte Marescotti) an Ruffini (vom 30. Sept. 1802) abgedruckt, in welchem der Verfasser seiner Überzeugung von der Richtigkeit des Ruffini'schen Unauflösbarkeitsbeweises Ausdruck gibt, denselben jedoch zu vereinfachen und zu verallgemeinern unternimmt. Die Vereinfachung besteht vor allem darin, dass er die grosse Anzahl von Einzeluntersuchungen aller möglichen Untergruppen, die bei Ruffini einen so breiten Raum einnahm, durch Entwickelungen allgemeineren Charakters ersetzt. So beweist er den Hauptsatz, dass eine rationale Function von fünf Grössen nicht drei oder vier Werte haben kann, durch folgende einfache Überlegung (art. 26): Eine Gruppe, deren Index kleiner als 5 sein soll, muss jede cyclische Permutation von fünf Buchstaben enthalten; ferner aber von den sechs Substitutionen, welche irgend drei Buchstaben

1) vgl. P. Riccardi, notizie della vita e delle opere del conte Pietro Abbati Marescotti, Modena 1879.

unter sich versetzen, ausser der Identität mindestens noch eine, also entweder eine Transposition oder eine cyclische Permutation von drei Buchstaben. Dass aber eine cyclische Permutation von fünf Buchstaben mit einer Transposition die symmetrische, mit einer cyclischen Permutation von drei Buchstaben die alternirende Gruppe erzeugt, hatte bereits Ruffini dargethan. Auch der Beweis, dass keine achtwertigen Functionen von fünf Grössen existiren, wird in ähnlicher Weise vereinfacht. Die Verallgemeinerung Abbati's besteht darin, dass er ausdrücklich zeigt — was Ruffini unterlassen hatte —, dass auch von mehr als fünf Grössen keine drei- oder vierwertigen Functionen existiren. Auch sonst enthält die Arbeit Abbati's noch manches bemerkenswerte, so z. B. in einer Fussnote zu art. 7 den (soweit mir bekannt) ersten vollständigen Beweis des Satzes, dass die Anzahl der formell verschiedenen Werte einer Function von n Grössen stets ein Teiler von n' sein muss, mit derselben Anordnung der Functionswerte zu einem rechteckigen Schema, deren man sich jetzt allgemein zu diesem Beweise bedient. Ferner findet sich auch (art. 35) ausdrücklich der Satz aufgestellt und bewiesen, dass es keine andern zweiwertigen Functionen gibt, als diejenigen, welche zur alternirenden Gruppe gehören.

10. Ruffini's Abhandlung von 1802. Dieses Schreiben Abbati's gab Ruffini Veranlassung, seinen Unauflösbarkeitsbeweis unter Benutzung von Abbati's Vereinfachungsvorschlägen nochmals in ausführlichster Form zu publiciren.[1]) Nach einleitender Zusammenstellung von Sätzen und Definitionen aus seinem ersten Werke beginnt der erste Teil, der von den Gleichungen fünften Grades handelt, mit der Ableitung einer Reihe von Untergruppen, welche durch verschiedene Combinationen einfacher Permutationen erzeugt werden; diese Entwickelungen gipfeln (art. 14) in dem Abbati'schen Beweis für den Hauptsatz von der Nichtexistenz drei- oder vierwertiger Functionen von fünf Grössen.

Nach diesen gruppentheoretischen Vorbereitungen folgt der algebraische Teil des Beweises in neuer Fassung. Ruffini beginnt wieder mit dem Satze (art. 16), dass eine Gleichung der Form:

$$Z^5 - M = 0,$$

unter M eine zweiwertige Function der fünf Wurzeln einer allgemeinen Gleichung fünften Grades verstanden, nur bestehen kann, wenn Z ebenfalls zweiwertig ist. Denn würde es sich bei einer Operation der alternirenden Gruppe, z. B. bei einer cyclischen Permutation von drei Buchstaben ändern,

---

1) della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto; memorie della società Italiana delle scienze t. 10, p. II (Modena 1803) p. 410—470; datirt vom 18. Dec. 1802.

so könnte es nur in αZ übergehen, wo α eine fünfte Einheitswurzel bedeutet. Eine cyclische Permutation von drei Buchstaben besitzt aber die Periode 3; also müsste $\alpha^3 = 1$ sein, gegen die Voraussetzung. Da nun (art. 20) M in jener Gleichung, wenn Z mehr Werte haben soll als M, auch nicht fünfwertig sein kann (sonst wäre Z 25-wertig), so folgt, dass eine solche Gleichung nur bestehen kann, wenn M mindestens sechswertig ist.

In ganz ähnlicher Weise werden dann noch die Sätze bewiesen:

Eine Function M, welche mit einer andern Z in einer Beziehung der angegebenen Art steht, kann nicht einer Gleichung der Form $M^p + V = 0$ genügen, wenn V zu einer umfassenderen Gruppe als M gehören soll (art. 21).

Besteht eine Gleichung der Form $y^5 = Q$ zwischen zwei Functionen y, Q der Wurzeln, so müssen die fünf Werte von y, die zu einem Werte von Q gehören, durch eine cyclische Permutation aller fünf Wurzeln auseinander hervorgehen (art. 23).

Nach diesen vorbereitenden Sätzen folgt zunächst die Bemerkung, dass eine Gleichung nur dann unmittelbar algebraisch lösbar sei, wenn sie entweder reducibel oder binomisch ist; andernfalls müsse man zur Resolventenbildung schreiten. Es wird nun darauf aufmerksam gemacht, dass keine Resolvente einer allgemeinen Gleichung reducibel sein könne (art. 28). Hierauf folgt der Satz: Soll aus einer Function z sich die Wurzel x einer allgemeinen Gleichung fünften Grades rational bestimmen lassen, so muss z bei einer cyclischen Vertauschung aller fünf Wurzeln seinen Wert ändern; denn sonst würden alle fünf Werte von x in gleicher Weise von z abhängen. Folglich muss der Grad der Gleichung, welcher z genügt[1]), ein Vielfaches von 5 sein (art. 32). Da diese Gleichung (nach art. 20) nicht binomisch sein kann, so muss eine weitere Hilfsgrösse y hinzugezogen werden (art. 34). Durch deren Hinzunahme wird aber nur dann ein Vorteil erreicht, wenn sie mindestens bei einer cyclischen Vertauschung aller fünf Wurzeln x unverändert bleibt. Eine Function dieser Eigenschaft kann (nach art. 21) nur dann einer binomischen Gleichung genügen, wenn sie zweiwertig ist (art. 36, 2). Angenommen, y sei zweiwertig; dann muss der Grad der Gleichung für z auch nach Adjunction von y noch ein Vielfaches von 5 sein (art. 37).

Nunmehr wird der Hilfssatz eingeschoben: Wenn eine Function bei einer cyclischen Vertauschung aller fünf x ihren Wert nicht ändert, so besitzt sie innerhalb der alternirenden Gruppe noch einen, sechs oder zwölf Werte

1) nämlich im Rationalitätsbereich der Coefficienten.

(art. 40; der Beweis wird wieder durch Einzeldiscussion der verschiedenen möglichen Fälle geführt). Daraus folgt, dass nach Adjunction von y die Function $M = z^5$ noch von einer Gleichung sechsten oder zwölften Grades abhängen muss, die nach art. 21 nicht binomisch sein kann (art. 41). Es ist also eine neue Resolventenfunction N zu Hilfe zu nehmen, welche nach Adjunction von y einer Gleichung:

$$N^q + \ldots = 0$$

genügt (art. 42). Soll dieses N bei einer cyclischen Vertauschung aller fünf x unverändert bleiben, so folgt wie eben für M, dass $q = 1$, 6 oder 12 sein muss (art. 43, 1); soll es aber bei jeder solchen seinen Wert ändern, so folgt, dass q ein Multiplum von 5 sein muss (art. 43, 2). In beiden Fällen wird man durch dieselben Schlüsse zur Bildung neuer Resolventen gedrängt, von welchen dann wieder dasselbe gilt; und so immer fort, sodass man nie zum Ziele gelangt (art. 44).

Es folgen noch die Bemerkungen, dass auch die Annahme reducibler Resolventen zu nichts führe, da für ihre irreducibeln Factoren dieselben Schlüsse gelten würden; und dass dasselbe der Fall sei, wenn man nicht mit der Ausziehung einer Quadratwurzel beginnen wollte (art. 46, 1).

Von den fünf Bedenken, zu welchen uns die erste Form von Ruffini's Beweis Anlass gab, fallen dieser neuen Redaction gegenüber das dritte und vierte und zum Teil auch das zweite weg — übrigens ein Fortschritt, der wesentlich auf Rechnung Abbati's zu setzen ist. Das erste können wir mit Rücksicht auf Gauss' inzwischen erschienene Dissertation[1]) bei Seite lassen. Dagegen bleibt das letzte, die „accessorischen" Irrationalitäten betreffende, seinem ganzen Umfange nach bestehen; wie schon die Art zeigt, in welcher Ruffini die Worte „einfach" (reducibel) und „zusammengesetzt" (irreducibel) ohne weitere Determination gebraucht.

Von diesen Einwendungen abgesehen lohnt es sich einen Augenblick bei einer andern Eigentümlichkeit dieser ersten Beweise Ruffini's zu verweilen. Der Abel'sche[2]) Unauflösbarkeitsbeweis beginnt mit der Frage, welches, die Möglichkeit der Auflösung vorausgesetzt, die erste Operation des Auflösungsprocesses sein müsse (das „innerste Wurzelzeichen", wie man wol sagt); die Galois'sche Theorie der durch Wurzelzeichen auflösbaren Gleichungen mit der Frage, welches unter gleicher Voraussetzung die letzte Operation sein müsse. Ruffini fängt an beiden Enden zugleich an und sucht abwechselnd das eine und das andere fortzusetzen, um zu zeigen,

1) Dass dieselbe, wie es scheint, Ruffini unbekannt blieb, kann nicht auffallen.

2) Oeuvres d'Abel, éd. Sylow et Lie, t. I p. 31. 84.

dass doch immer eine unüberbrückbare Kluft zwischen beiden bleibt. Das bedingt den grossen äusseren Umfang und damit die Unübersichtlichkeit seiner Beweisführung, bietet aber vielleicht den vollständigsten Einblick in die Natur der vorliegenden Schwierigkeit bezw. Unmöglichkeit.

Der zweite Teil der Abhandlung enthält den Beweis der Unmöglichkeit, die Gleichungen von höherem als dem fünften Grade durch Wurzelzeichen aufzulösen. Da derselbe in allen wesentlichen Punkten ebenso vorgeht, wie der im vorstehenden dargestellte Beweis für die Unauflösbarkeit der Gleichungen fünften Grades, so mag eine ausführliche Darstellung desselben unterbleiben. Nur darauf sei hingewiesen, dass Ruffini den allgemeinen Satz:

> „Für $n > 4$ existiren keine Functionen von n Grössen, welche mehr als 2 und weniger als n Werte besitzen“

nicht kennt, sondern sich mit dem weniger aussagenden Satze begnügen muss, dass keine solchen Functionen existiren, welche mehr als zwei und weniger als fünf Werte besitzen.

11. Malfatti's Dubbj. Dass die älteren Mathematiker, welche sich mit dem Problem der Gleichungen fünften Grades selbst viel abgemüht hatten und die Hoffnung nicht aufgeben mochten, ihre Versuche doch noch von Erfolg gekrönt zu sehen — dass diese Ruffini's Deductionen nicht ohne Widerspruch lassen würden, war vorauszusehen. Zuerst (soviel mir bekannt) wurde solcher Widerspruch öffentlich erhoben von dem (damals bereits hochbetagten) Ferrareser Mathematiker Gianfrancesco Malfatti.[1]) In der Einleitung seiner Abhandlung erklärt er unter vielen höflichen Redewendungen, dass er an der Richtigkeit von Ruffini's Beweise Zweifel hege; er wolle dieselben darlegen, ausgehend von einer Vorstellung über die Entstehung (la genesi) der Gleichungen, die er seit lange zu benützen gewohnt sei, die sich übrigens dem Wesen nach von der Ruffini's nicht viel unterscheide. Dementsprechend beginnt er mit einer Darstellung seiner eigenen früheren Auflösungsversuche. Er denkt sich zunächst aus der Gleichung r^{ten} Grades die $(r-1)^{\text{te}}$ Potenz der Unbekannten entfernt; die so vereinfachte Gleichung ist ihm dann eine allgemeine (generica) ihres Grades, wenn ihre Coefficienten von $r-1$ unabhängig veränderlichen Grössen abhängen. Er macht darauf aufmerksam, dass Ruffini's Resolventen in diesem Sinne nicht allgemeine Gleichungen ihres Grades sind (p. 589).

1) Dubbj proposti al socio Paolo Ruffini sulla sua dimostrazione della impossibilità di risolvere le equazioni superiori al quarto grado; memorie della società Italiana delle scienze t. 11 (Modena 1804) p. 579—607; datirt vom 26. April 1804.

Die Wurzel einer solchen Gleichung sucht er[1]), unter f eine r^{te} Einheitswurzel verstanden, in folgender Form zu erhalten:

$$x = -(fm + f^2n + f^3p + f^4q + \cdot\cdot).$$

Nach einigen vorbereitenden Sätzen über Einheitswurzeln zeigt er, wie man in der That von dieser Form ausgehend die Lösung der Gleichungen 2., 3., 4. Grades erhalten kann; und zwar zeigt er das immer durch wirkliche Ausführung der Rechnung, nicht durch irgendwelche gruppentheoretische Überlegungen. Auch für Gleichungen fünften Grades unternimmt er die Rechnung, ist aber wegen des rasch wachsenden Umfangs der Formen genötigt, mit der Erkenntnis abzubrechen, dass $mnpq$ Wurzel einer Resolvente[2]) sechsten Grades ist (p. 596). Hier findet sich nun als erster Einwurf: Ruffini behaupte, gestützt auf die Analogie mit der Lösung der Gleichungen niederer Grade, die Ausdrücke für die Wurzeln der Gleichungen fünften Grades müssten unter fünften Wurzeln vierte enthalten; solche Berufung auf Analogie sei nicht zulässig (p. 597). Zweitens sei, selbst zugegeben, dass solche Wurzeln auftreten müssten, daraus doch noch nicht zu schliessen, dass die betreffenden Functionen gerade von Gleichungen vierten Grades abhängen müssten. Er bekräftigt diesen Einwand durch das Beispiel der Gleichung zwölften Grades, deren Wurzel $\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$ ist. Er erklärt nicht einzusehen, weshalb die aufzustellende Resolvente sechsten Grades, oder irgend welche spätere Resolvente, nicht eine Wurzel von dieser oder ähnlicher Form sollte besitzen können, da sie ja doch nicht eine allgemeine Gleichung ihres Grades sei. Der dritte Einwurf Malfatti's endlich besteht in folgendem: Er gibt (p. 599) ein Beispiel einer Gleichung fünften Grades an, deren Resolvente sechsten Grades eine rationale Wurzel besitzt; er vermisst einen Beweis dafür, dass dies bei der Resolvente sechsten Grades der allgemeinen Gleichung fünften Grades nicht eintrete; und wenn er das auch für diese zugeben wolle, so trete doch bei jeder weiterhin zu bildenden Resolvente dieselbe Schwierigkeit von neuem auf. Die Notwendigkeit, dass dann die Resolvente sechsten Grades drei gleiche Wurzeln haben müsse, sehe er nicht ein (p. 606).[3]) Übrigens, so

1) Wie schon Euler, Vandermonde, Waring u. A.

2) Über diese Resolvente von Malfatti vgl. man die Note von Brioschi im 9. Bd. der memorie dell' istituto lombardo, 1863.

3) Diese Einwände sind übrigens bei Malfatti nicht so, wie es im Texte im Anschluss an Ruffini's Antwort der Übersicht halber geschehen ist, unter Rubriken praecis formulirt, sondern müssen aus längeren, immer wieder durch Eingehen auf Malfatti's eigene Versuche unterbrochenen Raisonnements erst herausgeschält werden.

schliesst Malfatti, würde es ihn nur freuen, wenn es Ruffini gelinge, diese Einwände zu entkräften.

12. Ruffini's Entgegnung. Den Zweifeln Malfatti's setzte Ruffini alsbald eine ausführliche Widerlegung[1]) entgegen. Er beginnt mit einer abermaligen ausführlichen Darstellung seines Beweises, welche die früheren Entwickelungen teils wörtlich, teils abkürzend, teils erläuternd wiederholt, im ganzen aber mehr als jene die Hauptabschnitte des Beweisgangs hervortreten lässt (art. 1—12). Hierauf wendet er sich zu den Einwürfen Malfatti's, die er ebenfalls ausführlich wiedergibt. Was zunächst die Berufung auf Analogie betrifft, so protestirt er gegen die Auffassung, dass er sich derselben jemals bedient habe, um damit irgend etwas zu beweisen; nur zur Erläuterung seiner Methoden habe er die bekannten Auflösungen der Gleichungen zweiten, dritten, vierten Grades beigezogen (art. 21). Ebensowenig könne er die Stelle finden, an welcher er behauptet habe, die unter den fünften Wurzeln stehenden Grössen müssten gerade vierte Wurzeln enthalten oder überhaupt von Gleichungen vierten Grades abhängen; nur neben andern als möglich anzunehmenden Fällen habe er auch den Fall der Hilfsgleichungen vierten Grades untersucht (art. 22). Auch habe er nirgends gesagt, dass Grössen, welche vierte Wurzeln enthielten, gerade von Gleichungen vierten Grades abhängen müssten. Desgleichen wisse er auch nicht, welche Stelle seiner Arbeiten Malfatti Anlass zu der Meinung habe geben können, er wolle behaupten, wenn die betr. Resolvente sechsten Grades lösbar sein solle, müsse sie drei gleiche Wurzeln haben (art. 22 a. E.).

Von dem letzten Einwand Malfatti's dagegen: die späteren Resolventen könnten möglicherweise reducibel sein — gesteht Ruffini art. 26, dass derselbe einige Überlegung verdiene. Was er entgegnet, ist etwa folgendes: Sei z eine erste resolvirende Function, dann sei art. 28 der Abhandlung von 1801 gezeigt, dass die zugehörige Resolventengleichung nicht reducibel sein könne, wenn die vorgelegte Gleichung allgemein ist. Man müsse dann, um sie zu lösen, eine weitere resolvirende Function y zu Hilfe nehmen, welche Function der Wurzeln z', z'' ... der ersten Resolventengleichung und folglich auch Function der Wurzeln x', x'' ... der gegebenen Gleichung sei. Nehme man nun alle die verschiedenen Werte, welche y bei den Vertauschungen der z anzunehmen im Stande sei, so genügten diese alle

1) Risposta di P. R. ai dubbj propostigli dal socio G.-Fr. M. sopra la insolubilità algebraica dell' equazioni di grado superiore al quarto; memorie della società Italiana delle scienze t. 12 p. I (Modena 1805) p. 213—267; datirt vom 27. Juni 1805.

einer Gleichung $F(y) = 0$, von der allerdings nicht geschlossen werden könne, dass sie irreducibel sei. Aber die zweite Resolvente sei auch gar nicht in dieser Weise zu bilden, sondern direkt aus der gegebenen, d. h. man habe nur alle diejenigen Werte des y in Betracht zu ziehen, welche aus einem von ihnen durch die sämtlichen Vertauschungen der x hervorgehen. Alle diese genügten einer Gleichung $f(y) = 0$, für deren Irreducibilität derselbe Schluss gelte, wie oben für die der Gleichung in z. Das Polynom $F(y)$ aber könne dann keine andern rationalen Factoren besitzen, als $f(y)$ und diejenigen, welche durch die Vertauschungen der z aus $f(y)$ hervorgehen, könne also keinenfalls zur Lösung der vorgelegten Gleichung bessere Dienste als $f(y)$ leisten.[1])

Ob Malfatti durch diese Deductionen Ruffini's überzeugt worden war, ob er, ohne überzeugt zu sein, sich von einer Fortsetzung der Discussion keinen Erfolg versprach, oder ob nur sein (1807 erfolgter) Tod dazwischen trat — jedenfalls hat er nicht mehr öffentlich geantwortet.

Soll man über die Discussion zwischen Malfatti und Ruffini ein Urteil abgeben, so wird man letzterem Recht geben müssen, wenn er erklärt, die ersten Einwände Malfatti's könnten nur auf Missverständnissen desselben beruhen; allerdings wird man hinzufügen, dass Ruffini's Darstellungsweise wenig dazu geeignet ist, Missverständnisse fernzuhalten. Schwerer wiegt — das räumt Ruffini selbst ein — der Einwand, der die Irreducibilität der Resolventen betrifft. In der That würde eine volle Aufhellung der hier in Betracht kommenden Verhältnisse den Begriff eines bestimmten Rationalitätsbereichs erfordern; dass beide, Malfatti wie Ruffini, von einem solchen noch weit entfernt sind, braucht kaum gesagt zu werden. Nach Einführung dieses Begriffs würden übrigens Ruffini's Darlegungen für die allgemeinen Gleichungen, deren Rationalitätsbereich durch die als unabhängige Veränderliche betrachteten Coefficienten festgelegt ist, ohne Zweifel Gültigkeit besitzen; und dasselbe würde auch nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante noch der Fall sein. Es hängt übrigens diese Frage nahe mit der mehrfach erwähnten andern zusammen, ob nicht von „accessorischen“ Irrationalitäten Vorteil für die Auflösung zu erwarten sei; wir werden auf diese sogleich noch einmal zurückkommen müssen.

Der Zurückweisung von Malfatti's Einwänden hat Ruffini einen zweiten Teil beigefügt, in welchem er selbst noch einige Bedenken gegen seinen

1) Zu beachten ist, dass hier von der Bildung einer zweiten Resolvente die Rede ist nicht nachdem eine erste aufgelöst ist, sondern nachdem eine erste sich als zunächst unzugänglich erwiesen hat. — Übrigens ist die Quadratwurzel aus der Discriminante bei diesen Entwickelungen jedenfalls als adjungirt zu betrachten, wenn Ruffini das auch nicht ausdrücklich sagt.

Beweis aufwirft und denselben ausführliche Widerlegungen entgegensetzt. Das erste dieser Bedenken ist (art. 34), ob nicht die vorhin mit $F(y)$ bezeichnete Function binomisch sein könne, wenn die $f(y)$ es auch nicht seien. Dass das nicht möglich ist, würde man wol am einfachsten folgendermassen beweisen: Sei g der Grad des einzelnen $f(y)$, h ihre Anzahl, also gh der Grad von $F(y)$; seien ferner y', y'' zwei Wurzeln von $f(y) = 0$. Da beide auch Wurzeln der binomischen[1]) Gleichung $F(y) = 0$ sein müssen, so muss:

$$y'' = \alpha y'$$

sein, unter α eine $(gh)^{\text{te}}$ Einheitswurzel verstanden. Wiederholung derjenigen Vertauschung der Wurzeln x, welche y' in y'' überführt, zeigt, dass auch $\alpha^2 y'$, $\alpha^3 y' \ldots$ Wurzeln von $f(y) = 0$ sein müssen. Die Anzahl γ der so erhaltenen verschiedenen Wurzeln aber muss ein Teiler des Grades g von $f(y)$ sein, also das α schon eine g^{te} Einheitswurzel. Demnach wäre $f(y)$ selbst gleich $y^\gamma - C$ oder gleich einem Produkt solcher Factoren, was beides den Voraussetzungen widerspricht. — Ruffini macht, sei es weil er die zu benutzenden Eigenschaften der Einheitswurzeln nicht völlig beherrschte, sei es aus andern Gründen, diesen Schluss nur für $h = 2$, kommt also nur zu der Folgerung, dass $h > 2$ sein müsse (art. 36). Dann fährt er folgendermassen fort: Man setze: $y^g = R$, also $R^h + b = 0$; so wird $h = ik$, wo i die Anzahl der verschiedenen Werte ist, welche R bei den Vertauschungen der x annimmt, während k für R dieselbe Bedeutung hat, wie vorher h für y. Wäre nun $i = 1$ oder 2, so wäre R symmetrisch oder alternirend, also eine Gleichung $y^g = R$ nicht möglich, da $g > 2$ sein und y nicht selbst symmetrisch bezw. alternirend sein soll; also muss $i > 2$ sein (art. 39). Jetzt sind von der Gleichung $R^{ik} + b = 0$ dieselben Eigenschaften nachgewiesen, welche vorher von $y^{gh} + b = 0$ vorausgesetzt worden waren; also folgt wie oben $h > 2$, so jetzt $k > 2$ (art. 40). Sei $R^i = S$, $S^k + b = 0$, $k = qr$, wo q, r analoge Bedeutung haben wie vorher i, bezw. k, so wird ganz ebenso bewiesen, dass $q > 2$, $r > 2$ sein muss. So fortfahrend erhielte man eine unendliche Reihe von Gleichungen:

$$p = gh, \quad h = ik, \quad K = qr, \quad r = st \cdots$$

und jeder der Factoren $i, q, s \ldots$ müsste > 2 sein; das ist nicht möglich, da p eine endliche Zahl ist (art. 41).

Ruffini fügt noch bei, dass diese Schlüsse auch gelten, wenn man vorher die alternirenden Functionen adjungirt hat (art. 44) und dass $F(y)$

---

1) Ruffini hat hier statt der Voraussetzung $F(y) \equiv y^{gh} + b$ die nur scheinbar allgemeinere $F(y) \equiv (y + a)^{gh} + b$.

auch keine andern rationalen Factoren haben kann als eben die $f(y)$ (art. 45).

13. Die Frage der accessorischen Irrationalitäten. Wenn dieser erste von Ruffini sich selbst gemachte Einwand ohne Schwierigkeit zu erledigen war, so betrifft der zweite den bereits mehrfach erwähnten schwächsten Punkt seiner ganzen Argumentation; es scheint daher hier der geeignetste Ort zu ausführlicher Besprechung desselben. Zunächst allerdings trifft Ruffini's Bedenken nur eine Nebenfrage; die Stelle (art. 47) sei — auch als charakteristisches Beispiel für Ruffini's Schreibweise — hier wörtlich mitgeteilt:

„Teoria[1]) nr. 241 und Memoria[2]) Einleitung nr. 3 habe ich gesagt, dass die Function von x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, welche Wurzel einer der Transformirten[3]) ist, welche unmittelbar oder mittelbar zur Lösung der (F)[4]) dienen sollen, immer als rational vorausgesetzt werden kann; denn würde man sie als irrational voraussetzen, so würde erstens die entsprechende Transformirte wegen dieser Irrationalität von höherem Grade und deshalb schwieriger zu lösen werden (nr. 241, 136 Teor.); zweitens bietet der irrationale Zustand der angenommenen Function keinen Vorteil im Vergleich mit einer ähnlichen rationalen Function, wenn man aus einer solchen Function die Werte von x in (F) oder die einer andern Function der x', x'', x''', x^{IV}, x^{V} bestimmen will (nr. 158 Teor.). Seien die beiden[5]):

$$y' = \varphi'(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}). \quad z' = f'(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$$

ähnliche Functionen, d. h. solche, dass bei denselben Permutationen der x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, bei welchen y' seinen Wert beibehält oder ändert, auch z' den seinigen in entsprechender Weise beibehält oder ändert, und sei y' irrational, z' rational, so wird erstens die Transformirte in y von höherem Grad sein als der der Transformirten in z, und zweitens, wenn man beim Aufsuchen des Wertes von x oder von einer dritten Function $u = F'(x)$ aus dem z' auf eine Gleichung vom Grade z. B. q geführt wird, so wird man auch auf eine Gleichung von demselben Grade q geführt werden, wenn man diesen Wert von x oder diese Function u aus dem y' bestimmen will. Das ist der Grund, weshalb sowol in der Teoria, als in der Memoria

---

1) So citirt er das oben nr. 7 besprochene Werk.

2) Die Abhandlung von 1802, oben nr. 10.

3) d. i. Resolventen.

4) Der vorgelegten Gleichung.

5) Die Klammern um die einzelnen Variabeln bedeuten wie bei Lagrange, dass die Function nicht als symmetrisch vorausgesetzt wird.

in Bezug auf die Auflösung der Gleichungen diejenigen Transformirten nicht in Betracht gezogen worden sind, welche irrationale Functionen von x', x'', x''', x^{IV}, x^{V} zu Wurzeln haben; aber wenn auch der Grad der Gleichung in y, falls diese Function irreducibel ist, zu hoch wird, könnte solche Gleichung nicht die mehrerwähnte Form $(y + a)^p + b = 0$ erhalten, oder einen bestimmbaren Factor haben, aus welchem sich ein zur Lösung von (F) unmittelbar oder mittelbar geeigneter Wert von y gewinnen liesse? Wenn man auch bei Bestimmung des Wertes einer Function aus y' auf eine Gleichung von zu hohem Grad geführt wird, wäre nicht die Möglichkeit vorhanden, dass auch in dieser Gleichung in u ein zur Lösung von (F) geeigneter Factor sich bestimmen liesse, oder dass sie auf die Form $(u + a)^q + b = 0$ zurückführbar wäre? Das sind zwei neue Bedenken, die gelöst werden müssen.“

Was nun Ruffini selbst zu diesem Zwecke vorbringt, ist allerdings wenig geeignet diese Bedenken zu zerstreuen. Er beruft sich dabei auf eine Reihe früherer Sätze, die zum Teil überhaupt nur für rationale Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung Geltung besitzen, während für einen andern Teil wenigstens die von Ruffini gegebenen Beweise nur für solche Functionen zwingend sind. Es gilt dies namentlich von denjenigen Sätzen, welche auf den Grad und die Irreducibilität von Resolventen Bezug haben. Dazu kommt, dass er mit einer Vorstellung „Festhaltung des Werts und der Combination der Radicale bei Vertauschung der unter ihnen stehenden x“ operirt, die weder von ihm selbst zu einem bestimmten Begriff praecisirt worden ist, noch einer solchen Praecisirung überhaupt fähig zu sein scheint. Hier enthalten also Ruffini's Unauflösbarkeitsbeweise an einer sehr wesentlichen Stelle eine Lücke, auf die in der That auch schon mehrfach[1]) hingewiesen worden ist.

Bekanntlich deckt Abel's Unauflösbarkeitsbeweis diese Lücke durch eine ausführliche rechnerische Deduction des Satzes: „Ist eine Gleichung durch Wurzelziehen auflösbar, so kann man der Lösung immer eine solche Form geben, dass alle algebraischen Functionen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, sich durch rationale Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung ausdrücken lassen.“ Man findet wol die Meinung ausgesprochen, dass eine solche algebraische, oder wenn man will arithmetische Deduction an dieser Stelle durchaus unentbehrlich sei und durch keinerlei anders geartete Betrachtung ersetzt werden könne.[2]) Wäre dem in der That so,

---

1) Vgl. z. B. Sylow in den Noten zu Abel's oeuvres complètes, éd. Sylow et Lie, Bd. II p. 293, oder die in der Einl. citirte Diss. von Hecker p. 5 u. 26.

2) Vgl. z. B. Netto, Lehrbuch der Substitutionentheorie (Leipzig 1882) § 200.

so würde man das Übel des Ruffini'schen Beweises insofern als unheilbar ansehen müssen, als eine Entwicklung, wie die von Abel durchgeführte, Ruffini's ganzer Arbeitsweise durchaus ferne liegt. Es ist jedoch von Herrn C. Jordan[1]) in Verfolgung Galois'scher Ideen für einen allgemeineren Satz, welcher den vorhin erwähnten als speciellen Fall enthält, ein Beweis gegeben worden, der solcher arithmetischen Vorbereitungssätze nicht bedarf; derselbe beruht hauptsächlich auf dem auch Ruffini's Versuchen zu Grunde liegenden Gedanken, dass mit Adjunction einer irrationalen Function der Wurzeln auch immer zugleich bestimmte rationale Functionen derselben adjungirt werden. Es muss demnach möglich sein, indem man diese Entwicklungen in angemessener Weise specialisirt, den Beweis der Unmöglichkeit „algebraischer" Auflösung der höheren Gleichungen von jenen Vorbereitungssätzen und dem zu ihrer Ableitung erforderlichen Formelapparat in der Weise unabhängig zu machen, dass dieselben erst nachträglich als Corollare auftreten. Einen so geführten Beweis würde man mit einigem Recht als „vervollständigten Ruffini'schen Beweis" ansehen können. —

Es folgen bei Ruffini noch einige Bemerkungen von geringerer Bedeutung. In nr. 51 wird erläutert, dass gleichzeitige Adjunction der Wurzeln mehrerer Hilfsgleichungen die Lösung nicht fördert. Nr. 52 wirft die Frage auf, ob es nicht unabhängig von jeder Methode, vielleicht durch Zufall, möglich sei, dass ein algebraischer Ausdruck gefunden werden könne, der in die gegebene Gleichung eingesetzt, dieselbe befriedige; diese Frage wird dadurch erledigt, dass ausführlich entwickelt wird, wie man in solchem Fall von dem gefundenen Ausdruck aus rückwärts die successiven Resolventen bilden könne, sodass man auf die ursprüngliche Fragestellung zurückgeführt werde.[2])

---

1) traité des substitutions et des équations algébriques (Paris 1870), art. 373 ff. Man vgl. auch die Darstellung bei Hölder, math. Annalen Bd. 34 p. 47 ff. (1889).

2) Derselbe Band der memorie della società Italiana enthält p. 321—336 noch eine kleine Abhandlung von Ruffini: Riflessioni intorno al metodo proposto dal consocio Malfatti per la soluzione delle equazioni di 5⁰ grado (vom 21. Sept. 1805). In derselben zeigt er, wie aus den von Lagrange entwickelten Grundsätzen a priori geschlossen werden könne, dass der Grad von Malfatti's Resolvente gleich 6 sein müsse. Er erörtert ausserdem noch das von Malfatti gegebene Beispiel, in welchem diese Resolvente eine rationale Wurzel besitzt, und macht darauf aufmerksam, dass, sobald dies für die entsprechende Resolvente irgend einer Gleichung fünften Grades zutrifft, diese letztere algebraisch aufgelöst werden könne. (Dass diese Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, hat E. Luther bewiesen: de criteriis quibus cognoscatur an aequatio quinti gradus irreductibilis algebraice resolvi possit, Crelle's Journ. Bd. 34, p. 244, auch Diss. Regiom. 1847.)

14. Ruffini's Abhandlung von 1806. Die nächste Abhandlung Ruffini's über die allgemeine Auflösung der höheren Gleichungen[1]) trägt an ihrer Spitze die Behauptung, solche Auflösung sei stets unmöglich, welche algebraische oder transcendente Methode man auch immer anwenden möge. Durch diese Behauptung haben sich offenbar viele Mathematiker von der Kenntnisnahme von Ruffini's Arbeiten abschrecken lassen, indem sie in derselben einen handgreiflichen Widerspruch fanden. Nachdem wir aber aus seinen bisher besprochenen Abhandlungen gesehen haben, dass wir es in ihm mit einem zwar in der Weise seiner Zeit zuweilen mit unvollständig abgeklärten Vorstellungen arbeitenden, aber doch jedenfalls durchaus ernst zu nehmenden Mathematiker zu thun haben, werden wir uns von jenem anscheinenden Widerspruch nicht davon abhalten lassen, dass wir von dem Inhalt auch dieser Arbeit Kenntnis nehmen und zusehen, in welchem Sinn denn eigentlich jene paradoxe Behauptung zu verstehen sein mag. Dieselbe wird von Ruffini zunächst dahin erläutert, dass es keine „exacte", d. h. aus einer endlichen Anzahl von Termen bestehende Function der Coefficienten gebe, welche an Stelle der Unbekannten in die Gleichung eingesetzt, dieselbe befriedige. Man wird zunächst nicht geneigt sein, in dieser Definition irgend einen bestimmten Sinn zu finden, wenn dieselbe transcendente Functionen mit umfassen soll; allein damals lag die Sache doch anders. Man war seit so langer Zeit gewohnt, gewisse häufig begegnende transcendente Abhängigkeiten — Exponential- und trigonometrische Functionen samt ihren Umkehrungen — durch besondere Functionszeichen auszudrücken und mit ihnen wie mit den Zeichen der algebraischen Functionen zu operiren, dass man gar nicht dazu kam, sich die Frage vorzulegen, durch welche Eigenschaften denn gerade diese vor allen andern Transcendenten eine solche Bevorzugung verdienten. So wurde man unbemerkt dazu gebracht, dass man bald nur an diese speciellen Functionen dachte, wenn man von analytisch darstellbaren und den Regeln des Calculs unterworfenenen Functionen sprach, bald, wenn man solche Beschränkung als unzulässig erkannte, die Eigenschaften, welche man an jenen kennen gelernt hatte, unbewiesenermassen auch allgemeineren zuschrieb. Bei Ruffini scheint beides ineinandergespielt zu haben; diesen Eindruck gewinnt man wenigstens aus seiner Abhandlung[2]) über die allgemeinen

---

1) Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al 4°, qualunque metodo si adoperi, algebraico esso siasi o trascendentale; memorie dell'Istituto Nazionale Italiano, Classe di fisica e matematica, t. 1 p. II (Bologna 1806), p. 433—450 (vom 22. Nov. 1806).

2) Alcune proprietà generali delle funzioni; memorie della società Italiana delle scienze t. 13, p. I (Modena 1807), p. 292—335 (v. 27. Juni 1806).

Eigenschaften der Functionen, auf welcher jene mit dem paradoxen Titel beruht. Auch in dieser suchen wir vergebens nach einer greifbaren Definition dessen, was Ruffini unter einer Function, speciell unter einer einfachen Function versteht. Wir finden nur die beiläufige Bemerkung (art. 1), dass eine einfache Function durch eine einzige Rechnungsoperation zu Stande komme; als Beispiele werden dazu:

$$\sqrt[5]{P}, \quad \cos\left(\frac{1}{n} \text{ arc } \cos P\right), \quad \log P$$

aufgeführt. Es folgen lange Ketten von Schlüssen und Rechnungen, in welchen nun freilich mit vieldeutigen Functionen ohne Angabe des jedesmal zu wählenden Wertes, mit Iteration von Operationen zu gebrochenem oder gar zu irrationalem Index, mit Bestimmung von Functionen aus Functionalgleichungen, die noch unendlich viele andere Lösungen zulassen, und ähnlichen Dingen in so scrupelloser Weise manipulirt wird, dass man schon nach den ersten Sätzen jede Controle darüber verliert, in welcher Weise man die Voraussetzungen hätte einschränken müssen, wenn die Schlüsse zulässig sein sollten. Will man daher von dem ganzen Bau überhaupt etwas retten, so wird nichts übrig bleiben, als diejenigen Eigenschaften, welche Ruffini aus seiner unbestimmten Vorstellung von einer einfachen Function gefolgert zu haben glaubt, mit in die Definition aufzunehmen und zu sagen:

Einfach heisst eine Function im Sinne Ruffini's dann, wenn von ihren zu demselben Werte des Arguments gehörenden Werten jeder eine rationale Function irgend eines unter ihnen ist, und wenn ferner alle diese rationalen Operationen sich durch Iteration einer einzigen unter ihnen darstellen lassen.

Sind dann $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \varphi(x, y, z)$ einfache Functionen, so heissen $f_2(f_1(x)), f_3(f_2(f_1(x))), \varphi(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ u. s. w. zusammengesetzte Functionen, und stillschweigend werden nur solche Functionen in Betracht gezogen, welche in dieser Weise aus einfachen sich zusammensetzen lassen.[1]) Dass durch Functionen dieser Art die Auflösung der algebraischen Gleichungen höherer Grade nicht geleistet werden könne, das ist der eigentliche Sinn, den man jener paradoxen Behauptung beizulegen hat. Nun ist aber mit den Mitteln der modernen Functionentheorie sofort zu

1) Die „einfachen" Functionen würden demnach in der Functionentheorie eine ähnliche Rolle zu spielen haben, wie in der Algebra die Radicale mit Primzahlexponenten. (Von Radicalen mit zusammengesetzten Exponenten sagt Ruffini, dass sie ebensowol als einfache, wie als zusammengesetzte Functionen betrachtet werden können.)

zeigen, dass jene Eigenschaften einer einfachen Function von allen transcendenten Functionen nur dem Logarithmus zukommen. Ruffini's Behauptung würde also schliesslich darauf zusammenschrumpfen, dass die Auflösung der höheren Gleichungen auch mit Hilfe der Logarithmen, resp. der Kreisfunctionen nicht möglich ist; womit es denn allerdings seine Richtigkeit hat.

Übrigens ist ersichtlich, dass eine Fortbildung dieser Gedanken Ruffini's zu Anschauungen ähnlicher Art wie diejenigen führen würde, welche vor einigen Jahren Herr Rausenberger seinen functionentheoretischen Arbeiten zu Grunde legen zu müssen glaubte.

Was Ruffini's eigenen Beweis seiner Behauptung angeht, so ist der Gedankengang desselben etwa der folgende:

Sei P (nr. 1) eine Function der Coefficienten der vorgelegten Gleichung, $y = \psi(P)$ eine „einfache Function" von $P, \psi', \psi'', \psi''' \ldots$ die verschiedenen Werte derselben, $P = \Pi(y)$ ihre Umkehrung. In P und y führe man statt der Coefficienten die Wurzeln x ein. Existirt dann (nr. 2) eine Anzahl von Permutationen der x, welche denselben Wert P, aber verschiedene Werte von y liefern, so sind alle diese unter den $\psi', \psi'' \ldots$ enthalten. Seien nun (nr. 3, I) $y', y'' \ldots y^V$ die 5 Werte von y, welche durch Wiederholung einer cyclischen Permutation von fünf der x aus einander hervorgehen, und sei $y'' = f(y')$, so folgt, dass $f^5(y') = y'$, d. h. dass die fünfte Iteration der Operation f sich auf die Identität reducirt. Bleibt ferner (nr. 3, II) die Function P noch bei einer andern cyclischen Vertauschung von g der x ungeändert, während y' dabei in $y^{(a)} = \Psi(y')$ übergeht, so folgt ebenso, dass $\Psi^g(y) = y$ sein muss. Es werde nun angenommen (nr. 4), dass P sowol bei der erwähnten cyclischen Permutation von fünf Wurzeln x, als auch noch bei irgend einer andern cyclischen Permutation von zweien, dreien oder vieren derselben ungeändert bleibt, und dass y bei der ersten seinen Wert ändert: dann folgt, dass es ihn bei der zweiten beibehalten muss. Denn sei erstens $y^{(a)}$ gleich einem der fünf ersten Werte $y', y'' \ldots y^{(V)}$, etwa $= f^p(y)$, so folgt aus $\Psi^{(g)}(y) = y$, dass $f^{pg}(y) = y$ sein muss, $y^{(a)} = y'$. Ist aber zweitens $y^{(a)}$ von allen jenen fünf Werten verschieden, so setze man $f(y^{(a)}) = f\psi(y') = F(y')$; dann wird y' in $F(y')$ übergeführt, durch eine cyclische Vertauschung von fünf Wurzeln x, sodass, wie im ersten Fall $F^5(y) = y$ und vermöge der Vertauschbarkeit[1]) von f und Ψ: $f^5 \psi^5(y) = y$, also auch $\Psi^5(y) = y$ und damit $\Psi(y) = y$ folgt, der Voraussetzung zuwider. Nr. 5 enthält den analogen und analog bewiesenen Satz für zwei cyclische Permutationen

1) In dieser Vertauschbarkeit liegt der Kern des Beweises.

von drei und von vier Wurzeln x und die Bemerkung, dass hier Specialfälle eines allgemeinen Gesetzes vorlägen. Nr. 7 bringt nach diesen Vorbereitungen die entscheidende Behauptung, dass y bei jeder cyclischen Permutation von fünf Wurzeln unveränderlich bleiben müsse, wenn P ein- oder zweiwertig sei. Denn würde es seinen Wert bei einer solchen Permutation ändern, so müsste es ihn nach nr. 4 bei jeder cyclischen Permutation von drei Wurzeln behalten. Andrerseits kann aber jede cyclische Permutation von fünf Wurzeln aus solchen von jedesmal drei Wurzeln zusammengesetzt werden, sodass man auf einen Widerspruch geführt wird. Damit kann nun in nr. 9 der Unauflösbarkeitsbeweis abgeschlossen werden, indem gezeigt wird, dass fortgesetzte Übereinanderhäufung der Zeichen „einfacher Functionen" niemals von den Coefficienten der Gleichung zu solchen Functionen führen kann, welche bei cyclischer Vertauschung von fünf Wurzeln ihren Wert ändern, wie dies doch für die Wurzeln selbst der Fall ist.

15. Ruffini's Abhandlung von 1813. Eine fünfte und letzte Redaction seines Unauflösbarkeitsbeweises hat Ruffini als besondere Schrift erscheinen lassen.[1]) In der Einleitung derselben recapitulirt er eine Reihe meist Lagrange'scher Sätze aus der Gleichungstheorie; dieselben werden in Noten am Schlusse des Werkes ausführlich erläutert: Erwähnenswert dürfte aus den letzteren vielleicht sein, dass Ruffini auch hier den Unterschied zwischen „formeller" und „numerischer" Gleichheit zweier Werte einer Function ausdrücklich hervorhebt (Nota 4, p. 122), sowie die Thatsache, dass die Substitutionen, welche den numerischen Wert einer Function nicht ändern, keine Gruppe zu bilden brauchen (Nota 5, p. 123). Der erste Teil der Abhandlung enthält dann den Beweis der algebraischen Unauflösbarkeit in derjenigen Form, welche sich aus dem oben (nr. 14) reproducirten Beweis der „transcendenten" ergibt, wenn man überall nur von algebraischen Functionen, bezw. von Radicalen redet. Die wesentlichen Schritte werden dabei folgende:

(nr. 1) Seien y, P zwei Functionen der Wurzeln x der vorgelegten Gleichung, und sei $y^p = P$; P bleibe bei einer cyclischen Vertauschung (12345) von fünf Wurzeln x ungeändert, ein Wert y' von y gehe bei wiederholter Anwendung derselben Vertauschung der Reihe nach in y'', y''', y^{IV}, y^{V} über.

(nr. 2) Dann muss $y'' = \beta y'$, $y''' = \beta^2 y'$, $y^{IV} = \beta^3 y'$, $y^{V} = \beta^4 y'$ sein und β muss eine fünfte Einheitswurzel sein.

---

1) Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali. Opuscolo del. cav. dott. P. Ruffini etc. Modena 1813. VIII, 140 pp. 4°.

(nr. 3) Bleibt P ausserdem noch bei einer cyclischen Permutation (123) von dreien aus jenen fünf Wurzeln x ungeändert, so muss y' bei derselben in γy übergehen und γ muss eine dritte Einheitswurzel sein.

(nr. 4) Beide cyclischen Permutationen nach einander ausgeführt, geben wieder eine cyclische Permutation (13452) von fünf Wurzeln; daraus folgt $\beta^5 \gamma^5 = 1$. Das ist aber nur möglich, wenn γ selbst gleich 1 ist; d. h. y kann sich bei keiner der cyclischen Permutationen (123), (234), (345), (451), (512) ändern.

(nr. 5) Also kann es sich auch nicht bei der zuerst vorausgesetzten cyclischen Permutation von fünf Buchstaben ändern; denn diese lässt sich aus jenen zusammensetzen.

(nr. 6) Also kann man durch Wurzelausziehung nicht über die zweiwertigen Functionen hinausgelangen.

Es braucht wol kaum noch ausdrücklich hervorgehoben zu werden, dass diese Fassung des Unauflösbarkeitsbeweises sich in allen wesentlichen Punkten mit derjenigen deckt, welche als „Wantzel'sche Modification des Abel'schen Beweises“ in den Lehrbüchern mitgeteilt zu werden pflegt.

Über die Frage, wie es mit den accessorischen Irrationalitäten steht, täuscht sich Ruffini diesmal (nota 9, p. 134) mit den Worten hinweg: „wenn aus dem Ausdruck für $x^{(n)}$ nach Einsetzung der Ausdrücke der Coefficienten durch die Wurzeln und gehöriger Reduction nicht alle Radicale verschwänden, so würde ein rationaler Ausdruck, nämlich $x^{(n)}$, einem irrationalen gleich sein müssen, was absurd ist.“

Die folgenden Capitel enthalten eine ausführliche Theorie der Gleichungen dritten und vierten Grades, mit der Absicht, zu zeigen, weshalb auf diese die Schlüsse keine Anwendung finden, welche die Unauflösbarkeit der höheren Gleichungen beweisen. Bemerkenswert ist hier nur allenfalls die Art, wie Ruffini die Unvermeidlichkeit des casus irreducibilis begründet: in dem allgemeinen Ausdruck für die Lösungen dieser Gleichungen müssten die complexen dritten Einheitswurzeln notwendig auftreten, und eben deswegen müssten die Radicanden notwendig complex sein, wenn die Wurzeln der Gleichung reell werden sollen.

Der zweite Teil der Schrift wiederholt den Beweis der Unmöglichkeit transcendenter Auflösung aus den beiden hier unter nr. 14 besprochenen Abhandlungen in meist wörtlichem Abdruck.[1])

---

1) Von Ruffini's späteren Veröffentlichungen stehen die beiden folgenden mit unserem Gegenstande noch in einigem Zusammenhang:

Alcune proprietà delle radici dell'unità; memorie dell'imp. r. istituto del

16. Resumé. Es bleibt noch übrig, dass wir aus dem Inhalt der verschiedenen im vorhergehenden analysirten Schriften Ruffini's ein Gesamtbild seiner Leistungen auf dem betrachteten Gebiete zusammenzufügen versuchen. Sicherlich sind dieselben nicht frei von schweren Mängeln. Dass wir an seinen Definitionen häufig Klarheit und Praecision, an seinen Beweisen Schärfe und Überzeugungskraft vermissen — das ist nun freilich ein Gebrechen, von dem auch die bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit nicht frei sind und das man deshalb ihm persönlich nicht allzuhoch wird anrechnen dürfen. Dieser Mangel allein hätte auch seine Zeitgenossen wol kaum abgehalten, seinen Arbeiten die verdiente Anerkennung zu zollen; und wenn das nicht in ausreichendem Masse geschehen ist, so müssen noch anderere Gründe massgebend gewesen sein. Dahin ist vor allem seine Darstellungsweise zu rechnen, die dem Verständnisse in der That nicht geringe Schwierigkeiten entgegensetzt. Noch grösser müssen dieselben zu einer Zeit gewesen sein, in welcher ein grosser Teil der benutzten Begriffe den Lesern völlig fremd und ungewohnt war — davon geben Malfatti's Einwendungen genügend Zeugnis. Diese neuen Begriffe aber durch ein geeignetes System von Kunstausdrücken und Bezeichnungen zum Gebrauche handlich zu machen hat er nicht verstanden, vielleicht auch nicht gesucht. So wird er zu langathmigen Umschreibungen genötigt und muss oft erst durch eine Reihe von Beispielen dem Leser Gelegenheit geben, sich den

---

regno Lombardo-Veneto vol. III, anni 1816/17 (Milano 1824. p. 67—84), vom 7. März 1816.

(Enthält hauptsächlich Formeln zur Berechnung der symmetrischen Functionen der Einheitswurzeln.)

Intorno al metodo generale proposto dal Sig. Hoëné Wronski, onde risolvere le equazioni di tutti i gradi; memorie della società italiana delle scienze, t. 18. parte contenente le memorie di matematica (Modena 1820) p. 56—68 (vom 20. März 1816).

(Hoëné-Wronski's angebliche Lösung beruhte, wie Ruffini ausführlich darlegt, auf der falschen Voraussetzung, dass es möglich sei, die Wurzel x einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades durch die Wurzeln $\xi_1, \xi_2 \cdot\cdot \xi_{n-1}$ einer Hilfsgleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in der Form auszudrücken:

$$x = \sqrt[n]{\xi_1} + \sqrt[n]{\xi_2} + \cdots + \sqrt[n]{\xi_{n-1}}.)$$

Ein in den Jahren 1807/8 von Ruffini für seine Artillerieschüler verfasstes Elementarlehrbuch (Algebra e suo appendice) habe ich nicht gesehen.

Worauf sich die in Abel's oeuvres complètes éd. Sylow et Lie t. II. p. 293 aus dem Bull. des annonces von Férussac citirte Stelle: „dans les mém. de l'inst. imp. de Milan, t. 1, un autre auteur fait voir etc.“ bezieht, habe ich nicht eruiren können; der betr. Band enthält an hieher gehörigem nur eine (unbedeutende) Abhandlung von Ant. Caccianino, welcher im Gegenteil Ruffini zustimmt.

Sinn eines Satzes zu abstrahiren, den praecis und verständlich zu formuliren ihm selbst nicht gelungen ist. Ähnlich verhält es sich auch mit der Darstellung seiner Beweise: ihren künstlichen Bau beginnt er meist an einem beliebigen Ende und führt ihn ein Stück weit in die Höhe, um dann abzuspringen, an einem ganz andern Ende zu beginnen, wieder ein Stück zu fördern, von neuem zu wechseln, bis er schliesslich alle Stützen beisammen hat, um das Werk mit einer fein zugespitzten deductio ad absurdum krönen zu können. Dazwischen lässt er den Fortgang des Baues auch wol einmal für längere Zeit gänzlich ruhen, um sich mittlerweile erst mit Einwendungen herumzuschlagen, die ihm das bereits vollendet geglaubte wieder zu unterminiren drohen.

Bei einzelnen Fragen ist es überhaupt nicht möglich, über seine Auffassung ins klare zu kommen, indem seine Äusserungen aus verschiedenen Zeiten zu sehr von einander abweichen. (Dieselbe Unbeständigkeit der wissenschaftlichen Überzeugung soll übrigens auch seiner medicinischen Thätigkeit angehaftet haben; so wird z. B. berichtet, er habe seinen Zuhöhern über die Natur des Typhuscontagiums jedes Jahr eine andere Theorie vorgetragen.) Es gilt dies insbesondere auch von der Frage, in wie fern man berechtigt ist, sich bei Untersuchungen über die Auflösung algebraischer Gleichungen auf die Betrachtung rationaler Functionen der Wurzeln zu beschränken. In seinen ersten Veröffentlichungen drückt er sich so aus, dass man annehmen muss, er habe überhaupt gruppentheoretische Sätze mit derselben Leichtigkeit auf irrationale wie auf rationale Functionen der Wurzeln anwenden zu können geglaubt. Später scheint ihm dies doch bedenklich vorgekommen zu sein; in dem zweiten Teil, welcher der Erwiderung auf Malfatti's Einwürfe angehängt ist, lässt er sich über die Frage auf längere Erörterungen ein, denen man zwar keineswegs strenge Beweiskraft wird zuschreiben können, die aber doch vielleicht neueren, im Galois'schen Ideenkreis erwachsenen Anschauungen nicht so sehr ferne stehen. In seiner letzten Schrift endlich täuscht er sich über die ganze Schwierigkeit mit einem — man kann wol sagen Taschenspielerkunststück hinweg.

Aber alle diese Mängel dürfen uns nicht blind gegen die Thatsache machen, dass in Ruffini's Schriften die Algebra doch in einer ganzen Reihe von Punkten wesentlich gefördert worden ist. Er hat zuerst das von Waring, Vandermonde und Lagrange ihren Nachfolgern gestellte Problem einer systematischen Untersuchung der Permutationen, bei welchen rationale Functionen von n Grössen ihren Wert ändern oder nicht ändern, energisch in Angriff genommen und wenigstens für $n = 5$ zu einem gewissen Abschluss gebracht. Namentlich hat er bereits den wichtigen Satz vollständig

bewiesen, dass keine drei- oder vierwertigen Functionen von fünf oder mehr Grössen existiren können. Er hat zuerst den fundamentalen Begriff einer Gruppe von Operationen in seinem speciellen Untersuchungsgebiet zur Geltung gebracht und die hauptsächlichsten Arten von Gruppen für dieses Gebiet zu unterscheiden gelehrt. Er hat den Beweis des Satzes, dass bei Benutzung nur solcher Functionen, welche sich rational durch die Wurzeln ausdrücken lassen, die Auflösung der höheren Gleichungen durch Radicale nicht möglich sei — diesen Beweis hat er nicht nur zuerst durchgeführt, sondern ihn auch nach verschiedenen Umarbeitungen auf die einfache Form gebracht, welche Wantzel zugeschrieben zu werden pflegt. Er hat endlich den Zusammenhang erkannt, in welchem die Reducibilität einer Gleichung mit der Intransitivität ihrer Gruppe, die Auflösbarkeit einer Gleichung durch Hilfsgleichungen niedrigerer Grade mit der Imprimitivität ihrer Gruppe steht.

Ob wir auf Ruffini's Inspiration auch den wesentlichen Inhalt der Arbeit seines Freundes Abbati, welche ebenfalls zwei grundlegende Sätze dieses Teils der Algebra zum ersten Mal vollständig beweist, zurückzuführen, oder ob wir diesen jetzt fast vergessenen Mann neben Ruffini als einen der Begründer der Gruppentheorie zu nennen haben, das wird sich jetzt wol nicht mehr feststellen lassen. Dagegen dürfen wir an einer andern Frage nicht vorübergehen, die wol mancher Leser sich schon aufgeworfen haben wird: was bleibt, wenn diese Darstellung richtig ist, noch übrig von den gruppentheoretischen Verdiensten Cauchy's, dem man den grössten Teil der erwähnten Sätze zuzuschreiben gewohnt ist? Sicherlich ein bedeutender Teil: Cauchy hat nicht nur den von Ruffini überkommenen einzelnen Sätzen eine grosse Anzahl neuer hinzugefügt und das Ganze in systematischer Darstellung zugänglich gemacht, sondern auch in Terminologie und Bezeichnungsweise erst das Handwerkszeug geschaffen, dessen dieser neue Zweig der Mathematik zu seiner Weiterentwickelung bedurfte und das Ruffini ihm nicht in die Wiege gelegt hatte. Aber die wenigen Worte, mit welchen Cauchy in seiner ersten einschlägigen Veröffentlichung[1]) seines Vorgängers gedenkt, unbestimmt und deutbar wie sie sind, sind allgemein in einer Weise verstanden worden, welche Ruffini's Leistungen mehr zu verdunkeln, als ins Licht zu setzen beigetragen hat, und Cauchy hat dieser für Ruffini's Würdigung verhängnisvollen Auslegung seiner Worte nicht widersprochen.

1) Journal de l'école polytechnique Cah. 17 (1815) p. 1 und 8. Die spätere ausführlichere Darstellung (exercices d'analyse et de physique mathématique (t. III p. 151—252; 1844) enthält überhaupt keine Citate).

ÜBER DIE ZURÜCKFÜHRUNG

DER

SCHWERE AUF ABSORPTION

UND

DIE DARAUS ABGELEITETEN GESETZE.

VON

C. ISENKRAHE.



Der Zweck folgender Erörterungen ist vor Allem, eine Reihe der interessanteren Versuche, die Schwere auf Absorption zurückzuführen, nach bestimmten Gesichtspunkten kritisch zu betrachten, sodann den Nachweis zu führen, dafs die Gesetze, zu welchen diese Theorien sich allmählich zugespitzt haben, in Bezug auf die wesentlichsten Punkte schon in den von mir im Jahre 1879[1]) veröffentlichten Formeln als specielle Fälle enthalten sind, und endlich, den Gültigkeitsbereich dieser Formeln, welche damals unter der besonderen Annahme unelastischer Zusammenstöfse zwischen den kleinsten Teilchen des Äthers und der gravitierenden Materie abgeleitet wurden, auf die Absorptionstheorien im Allgemeinen auszudehnen.

I. Absorption von Materie.

Riemann.

Die kühnste Form, in welcher der Gedanke, dafs die Schwere auf Absorption zurückzuführen sei, meines Wissens jemals ausgesprochen worden ist, findet sich in einigen unvollendeten Aufsätzen von Bernhard Riemann vor, welche Prof. H. Weber in dessen nachgelassenen Handschriften vorgefunden und im Anschlufs an die „Gesammelten mathematischen Werke" Riemanns herausgegeben hat.[2]) Diese Aufsätze gehören zu einer Gruppe von kleineren Arbeiten, welche unter der Rubrik „Naturphilosophie" zusammenstehen und die Überschriften tragen: „1) Molekularmechanik, 2) Gravitation und Licht, 3) Neue mathematische Principien der Naturphilosophie." — Für unseren Zweck kommen nur die beiden letzten in Betracht, und es wird aus einem besonderen, später zu erörternden Grunde dienlich sein, den dritten zuerst ins Auge zu fassen, um dann nachher auf den zweiten zurück zu greifen.

---

1) „Das Rätsel von der Schwerkraft", Braunschweig 1879.

2) Bernhard Riemanns gesammelte Werke und wissenschaftlicher Nachlafs, herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber, Leipzig 1876.

Schon durch die Wahl der eben angeführten dritten Überschrift setzt Riemann diese Arbeit zu Newtons grofsem Werk: Philosophiae naturalis principia mathematica in nahe Beziehung; er spricht sich darüber aber noch deutlicher aus in einigen einleitenden Sätzen, welche die Aufgabe: „jenseits der von Galilei und Newton gelegten Grundlagen der Astronomie und Physik ins Innere der Natur zu dringen, ausdrücklich als Zweck der ganzen Untersuchung hinstellen. Diese Vertiefung der Galilei-Newtonschen Naturanschauung nun wird erstrebt auf der Grundlage einer ganz neuen Idee, welche die Newtonsche Physik mit der Herbartschen Seelenlehre auf die überraschendste Weise verknüpft. Riemann trägt diese Idee in folgender Weise vor:

„Der Grund der allgemeinen Bewegungsgesetze für Ponderabilien, welche sich im Eingange zu Newtons Principien zusammengestellt finden, liegt in dem inneren Zustande derselben. Versuchen wir aus unserer eigenen inneren Wahrnehmung nach der Analogie auf denselben zu schliefsen. Es treten in uns fortwährend neue Vorstellungsmassen auf, welche sehr rasch aus unserer Vorstellung wieder verschwinden. Wir beobachten eine stetige Thätigkeit unserer Seele. Jedem Akt derselben liegt etwas Bleibendes zu Grunde, welches sich bei besonderen Anlässen (durch die Erinnerung) als solches kundgiebt, ohne einen dauernden Einflufs auf die Erscheinungen auszuüben. Es tritt also fortwährend (mit jedem Denkakt) etwas Bleibendes in unsere Seele ein, welches aber auf die Erscheinungswelt keinen dauernden Einflufs ausübt. Jedem Akt unserer Seele liegt also etwas Bleibendes zu Grunde, welches mit diesem Akt in unsere Seele eintritt, aber in demselben Augenblicke aus der Erscheinungswelt völlig verschwindet.

Von dieser Thatsache geleitet, mache ich die Hypothese, dafs der Weltraum mit einem Stoff erfüllt ist, welcher fortwährend in die ponderablen Atome strömt und dort mit der Erscheinungswelt (Körperwelt) verschwindet.

Beide Hypothesen lassen sich durch die Eine ersetzen, dafs in allen ponderablen Atomen beständig Stoff aus der Körperwelt in die Geisteswelt eintritt. Die Ursache, weshalb der Stoff dort verschwindet, ist zu suchen in der unmittelbar vorher dort gebildeten Geistessubstanz, und die ponderablen Körper sind hiernach der Ort, wo die Geisteswelt in die Körperwelt eingreift.

Die Wirkung der allgemeinen Gravitation, welche nun zunächst aus dieser Hypothese erklärt werden soll, ist bekanntlich in jedem Teil des Raumes völlig bestimmt, wenn die Potentialfunktion P sämtlicher ponderabler Massen für diesen Teil des Raumes gegeben ist, oder was dasselbe

ist, eine solche Funktion P des Ortes, dafs die im Innern einer geschlossenen Fläche S enthaltenen ponderablen Massen

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial P}{\partial p}\,dS$$

sind. Nimmt man nun an, dafs der raumerfüllende Stoff eine inkompressible homogene Flüssigkeit ohne Trägheit sei, und dafs in jedes ponderable Atom in gleichen Zeiten stets gleiche seiner Masse proportionale Mengen einströmen, so wird offenbar der Druck, den das ponderable Atom erfährt (der Geschwindigkeit der Stoffbewegung an dem Orte des Atoms proportional sein?).

Es kann also die Wirkung der allgemeinen Gravitation auf ein ponderables Atom durch den Druck des raumerfüllenden Stoffes in der unmittelbaren Umgebung desselben ausgedrückt und von demselben abhängig gedacht werden.“ — —

Aus dem hier Dargelegten müssen wir zwei wesentliche Gedanken absondern und von einander trennen, nämlich erstens, dafs die Erscheinungen der Gravitation nicht auf Fernwirkung, sondern auf dem Druck beruhen sollen, den jedes Atom von seiner unmittelbaren Umgebung erfährt; zweitens, dafs dieser Druck verursacht werde durch das Verschwinden materieller Substanz an den Punkten, wo sich „ponderable Atome“ im Raum befinden.

Von diesen Gedanken war zur Zeit, als Riemann sie niederschrieb[1]), der erste schon alt, der zweite vollständig neu. Beide treten übrigens aus dem Rahmen der damaligen Physik, die — wenigstens in Deutschland — von dem Glauben an Fernkräfte ganz beherrscht war, völlig heraus und würden, wenn sie gleich in die Öffentlichkeit gekommen wären, jedenfalls als Hypothesen von grofser Kühnheit aufgenommen worden sein. Jetzt aber ist es schon nichts Seltenes mehr, den ersteren Gedanken aussprechen zu hören, den zweiten hingegen finden wir heute noch eben so kühn, als er zu Anfang der fünfziger Jahre sein möchte, ja noch wohl kühner und verwegener, denn das Dogma von der Erhaltung der Materie bildet gegenwärtig mehr als jemals die Grundlage aller physikalischen und chemischen Theorien. Nie ist auch meines Wissens der Riemannschen Ansicht, dafs da, wo ponderable Materie im Raum sich befindet, fortwährend nicht etwa blos Energie in irgend einer Form, sondern der substantielle Träger dieser Energie, nämlich die Materie selbst, absorbiert werde und aus der Erscheinungswelt verschwinde, von irgend einem Physiker beigepflichtet worden.

1) März 1853, wie aus einer eigenhändigen Anmerkung hervorgeht

Fragen wir nun, in welcher Weise diese extremste aller Absorptionstheorien von ihrem Urheber weiter behandelt und auf einen mathematischen Ausdruck gebracht worden ist, so genügt es an dieser Stelle, das Riemannsche Resultat allein ins Auge zu fassen und bezüglich der Ableitung desselben auf Seite 504 und 505 des vorhin erwähnten Buches zu verweisen. Dieses Resultat liegt vor in einem „Wirkungsgesetze", ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{\partial ds}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \frac{dV' - dV}{dV} \psi(t - t') \partial t' + \int_{-\infty}^{t} \frac{ds' - ds}{ds} \varphi(t - t') \partial t'.$$

Über die Bedeutung desselben und namentlich über die Trennung in zwei Integrale spricht sich Riemann folgendermaſsen aus[1]):

„Die Wirkungen ponderabler Materie auf ponderable Materie sind:

1) Anziehungs- und Abstoſsungskräfte umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung.

2) Licht und strahlende Wärme.

Beide Klassen von Erscheinungen lassen sich erklären, wenn man annimmt, daſs den ganzen unendlichen Raum ein gleichartiger Stoff erfüllt, und jedes Stoffteilchen unmittelbar nur auf seine Umgebung einwirkt. Das mathematische Gesetz, nach welchem dies geschieht, kann zerfällt gedacht werden

1) in den Widerstand, mit welchem ein Stoffteilchen einer Volumänderung, und

2) in den Widerstand, mit welchem ein physisches Linienelement einer Längenänderung widerstrebt.

Auf dem ersten Teil beruht die Gravitation und die elektrostatische Anziehung und Abstoſsung, auf dem zweiten die Fortpflanzung des Lichtes und der Wärme und die elektrodynamische oder magnetische Anziehung und Abstoſsung."

Für die Gravitation soll also nur das Integral

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{dV' - dV}{dV} \psi(t - t') \partial t'$$

in Betracht kommen. Von den darin enthaltenen Gröſsen ist gesagt: „dV bezeichnet das Volumen eines unendlich kleinen Stoffteilchens zur Zeit t, dV' das Volumen desselben Stoffteilchens zur Zeit t'." In Betreff der Funktion ψ aber findet sich bei Riemann nichts weiter vor als die Frage:

1) a. a. O. S. 506.

„Wie müssen nun die Funktionen ψ und φ beschaffen sein, damit Gravitation, Licht und strahlende Wärme durch den Raumstoff vermittelt werden?"

Da eine Antwort hierauf nirgendwo gegeben wird, so darf man schon deshalb das Riemannsche Wirkungsgesetz wohl als ziemlich inhaltsleer bezeichnen; überdies aber haftet auch noch an dem Faktor $\frac{dV' - dV}{dV}$ ein nicht unwichtiges Bedenken. Wie vorhin angeführt, hat Riemann von seinem „Raumstoff" ausdrücklich vorausgesetzt, dafs er eine „inkompressible homogene Flüssigkeit" sei. Damit ist ausgesprochen, erstens, dafs jener Stoff überall, wo er sich befindet, die gleiche Dichtigkeit haben müsse, sonst wäre er nicht homogen, und zweitens niemals und nirgendwo dichter werden könne, als er eben ist, sonst würde er nicht inkompressibel sein. Daher bleibt bezüglich etwaiger Veränderungen seiner Dichtigkeit nur noch die Möglichkeit übrig, dafs dieselbe mit der Zeit immer geringer würde. Allein auch das geht nicht an, und zwar aus einem Grunde, dessen Erörterung uns auf die Eingangs erwähnte Riemannsche Abhandlung: „Gravitation und Licht" führt, die von Herrn Prof. Weber der bis jetzt betrachteten dritten als zweite vorangestellt worden ist. Dort heifst es nämlich zunächst: „Wie[1]) sich aus den Bewegungsgesetzen selbst ergeben wird, behält der Stoff, wenn er in Einem Zeitpunkte überall gleich dicht ist, stets allenthalben die gleiche Dichtigkeit. Ich werde diese daher zur Zeit t überall $= 1$ annehmen." — Sodann heifst es drei Seiten später: „Die Gleichung (I) beweist unsere frühere Behauptung, dafs bei der Stoffbewegung die Dichtigkeit ungeändert bleibe; denn

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt\,,$$

welches zufolge dieser Gleichung $= 0$ ist, drückt die in das Raumelement $dx_1\, dx_2\, dx_3$ im Zeitelement dt einströmende Stoffmenge aus, und die in ihm enthaltene Stoffmenge bleibt daher konstant."

Durch dieses Resultat seiner Rechnung schliefst Riemann also auch die Möglichkeit einer fortwährenden Verdünnung seines Raumstoffes aus. Wenn daher irgend ein Stoffteilchen zur Zeit t das Volumen dV hat, und wenn es, „wie sich aus den Bewegungsgesetzen ergiebt", niemals irgend eine Veränderung seiner Dichtigkeit erleiden kann, so hat es zur Zeit t' offenbar auch noch das Volumen dV, oder, was dasselbe besagt, $dV = dV'$. Daher ist unweigerlich für jeden beliebigen Wert von t der Bruch $(dV' - dV)/dV$ gleich Null zu setzen, und damit wird dann das Riemannsche Wirkungsgesetz:

1) a. a. O. S. 498.

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{dV' - dV}{dV} \psi(t - t') \partial t'$$

erst recht inhaltslos.

Man darf sich gewifs darüber verwundern, dafs Riemann in seiner zweiten Abhandlung die allgemeine Konstanz der Dichtigkeit und damit die Volumkonstanz jeder beliebig gewählten Stoffmenge beweist und dennoch in der dritten auf die Veränderungen dieses Volumens ein Wirkungsgesetz für die Gravitation aufbaut. Dieser sehr auffällige Widerspruch ist nun aber, wie mir scheint, auf die folgende Weise zu erklären.

Aus der von Dedekind verfafsten Lebensbeschreibung Riemanns[1]) geht hervor, dafs letzterer sich mit dem Gravitationsproblem zu zwei verschiedenen Zeiten, und beidesmal sehr eifrig und angelegentlich beschäftigt hat. Zuerst war es im Anfang des Jahres 1853, vor seiner Habilitation, dann aber nach derselben noch einmal, gegen den Schlufs des Jahres 1853 und im Anfang von 1854. Über diese zweite Periode schreibt er selbst am 28. Dec. 1853: „Meine andere Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Elektricität, Galvanismus, Licht und Schwere hatte ich gleich nach Beendigung meiner Habilitationsschrift wieder aufgenommen und bin mit ihr soweit gekommen, dafs ich sie in dieser Form unbedenklich veröffentlichen kann.“ In einem Brief vom 26. Juli 1854 erwähnt er nochmals, dafs er sich nach Fertigstellung der Habilitationsschrift wieder in seine „Untersuchung über den Zusammenhang der physikalischen Grundgesetze vertieft“ habe, und dafs er sogar „teils wohl infolge zu vielen Grübelns, teils infolge des vielen Stubensitzens“ erkrankt sei. — Welche von beiden in den „Gesammelten Werken“ uns vorliegenden Abhandlungen ist nun wohl die Frucht dieser zweiten „Vertiefung?“ Auf welche bezieht sich die Äufserung, dafs er seine Arbeit „in dieser Form unbedenklich veröffentlichen könne?“

Die von Herrn Prof. Weber an die letzte Stelle gesetzte kann es gar nicht sein; denn Riemann selbst hat der Überschrift: „Neue mathematische Principien der Naturphilosophie“ die Bemerkung beigefügt: „gefunden am 1. März 1853“. Will man also nicht etwa annehmen, dafs diese zur Veröffentlichung bestimmte Abhandlung gänzlich verloren gegangen sei, so bleibt nichts übrig, als die vorhergehende, mit der Überschrift: „Gravitation und Licht“ versehene dafür zu halten.

Ist das richtig, dann klärt sich der eben dargelegte Widerspruch sehr einfach auf, denn dann dürfen wir einen wesentlichen Erfolg jener zweiten Vertiefung eben darin erblicken, dafs das Resultat der ersten, wie es in

1) a. a. O. S. 515.

dem „Wirkungsgesetz der Gravitation" vorliegt, von Riemann selbst als unrichtig erkannt und verlassen wurde. Dieses Wirkungsgesetz gründet sich ja auf die veränderliche Dichtigkeit des Raumstoffs, und letztere auf die verwegene Hypothese einer unaufhörlichen Abnahme der in der Welt vorhandenen Materie. In dem Aufsatze: „Gravitation und Licht" hingegen finden wir von dieser Hypothese keine Spur mehr, sondern nur noch die Annahme einer Vermittelung der Kraftwirkung durch ein kontinuierliches flüssiges Medium, und für dieses letztere wird sodann „aus den Bewegungsgesetzen selbst" die Konstanz der Dichtigkeit abgeleitet. Damit ist dem ganzen früheren Wirkungsgesetz der Boden entzogen. — Auf diese Weise stellt sich uns der auffällige Widerspruch nicht mehr als ein Fehler, sondern als ein Fortschritt im Gange der Untersuchung dar.

Glücklicherweise war ich Dank der entgegenkommenden Freundlichkeit des Herrn Prof. Weber in der Lage, denjenigen Teil der hinterlassenen Handschriften Riemanns, welcher sich auf Naturphilosophie bezieht, eingehend zu prüfen und habe auch in diesen noch einige Anhaltspunkte für die Richtigkeit meiner Anschauung entdeckt.

Auf einem mit Bleistift geschriebenen Bogen befindet sich nämlich obenan ein Teil des Aufsatzes über die „Neuen mathematischen Principien der Naturphilosophie", welcher, wie erwähnt, an dritter Stelle abgedruckt ist; es sind dies einige Sätze von Seite 503, sowie die dort befindliche Fufsnote. Dann aber folgen nach einem kleinen Zwischenraum zwei etwas verschiedene Anfänge des Konceptes für die an zweiter Stelle abgedruckte Arbeit: „Gravitation und Licht".

Dieser Umstand läfst, wie mir scheint, keinen Zweifel daran übrig, dafs die ersten Gedanken von No. 2 später koncipiert worden sind, als der Aufsatz No. 3. — Was nun aber die weitere Ausführung betrifft, so ist unter den vorhandenen Blättern, deren Inhalt sich auf No. 3 bezieht, das deutlichste, sauberste und vollständigste zweifellos noch keine für den Druck bestimmte Reinschrift. Dies geht klar hervor aus den mancherlei darin vorkommenden Verbesserungen, Wiederholungen, Textlücken und Gedankensprüngen. Von No. 2 hingegen sind mehrere gute, und darunter ein sehr sorgfältig geschriebenes Manuskript vorhanden, auf welches ebensowohl äufserlich, wie inhaltlich die vorhin angeführte Briefstelle Riemanns pafst, dafs seine Arbeit „in dieser Form" für die Veröffentlichung bereit sei.[1])

---

1) Auf meine Darlegung der vorstehenden Gründe wurde ich von Herrn Prof. Weber, dem Herausgeber des Riemannschen Nachlasses, durch eine zustimmende Äufserung erfreut und in einem späteren Schreiben auch durch die

Aus all diesen Umständen scheint mir hervorzugehen, dafs die Arbeit No. 2 eine spätere und fertigere[1]), No. 3 hingegen eine frühere sei und Ansichten vertrete, welche bei der zweiten „Vertiefung" des Autors in seinen Gegenstand gänzlich verlassen worden sind. Bekanntlich hielt Riemann in späteren Jahren Vorlesungen über Schwere, Elektricität und Magnetismus, welche Hattendorf herausgegeben hat. Von dem vorhin angeführten „Wirkungsgesetz der Gravitation" habe ich auch in diesem Buche keine Spur finden können.

II. Absorption von Energie.

A. Euler.

Während meines Wissens Riemann allein es versucht hat, die Erscheinungen der Schwere durch ein Verschwinden von Substanz zu erklären, sind die Gravitationstheorien, welche irgend eine Art von Energie-Absorption zu Grunde legen, sehr zahlreich und mannigfaltig. Bei all diesen Theorien kommt es offenbar wesentlich an auf folgende Fragen:

1) Bei welcher Substanz und in welcher Form ist jene Energie vor ihrer Absorption vorhanden?

2) Wie und wo und warum wird Energie absorbiert?

3) Wie wird aus dieser Absorption das Näherungsbestreben, die sogenannte Centripetalkraft, abgeleitet?

4) Wie wird diese Kraft auf einen bestimmten Ausdruck gebracht, und zwar:

a) in Bezug auf ihre Abhängigkeit von derjenigen Energiemenge, von welcher die absorbierte Energie ein Teil ist,

b) in ihrer Abhängigkeit von der Entfernung der gravitierenden Körper,

c) in ihrer Abhängigkeit von der Masse der letzteren.

Bezüglich der beiden letzten Punkte wird man noch, falls sich Abweichungen von dem Newtonschen Gesetz ergeben, seine Aufmerksamkeit auf die Frage zu richten haben:

Mitteilung, dafs er in der eben bevorstehenden neuen Auflage von Riemann die beiden Stücke III_2 und III_3 vertauschen und in einer Bemerkung meine Gründe anführen werde.

1) Auf den Inhalt derselben braucht hier nicht weiter eingegangen zu werden, weil Riemann darin die Substanz-Absorption eliminiert und keine andere Absorption irgendwelcher Art dafür eingeführt hat. Damit aber ist die ganze Überlegung aus dem Gesichtsfelde der gegenwärtigen Arbeit herausgeschoben.

5) Wie werden die Abweichungen von dem Newtonschen Gesetz auf einen bestimmten mathematischen Ausdruck gebracht? —

Da ich eine Reihe von Versuchen der eben bezeichneten Art in meinem Buche „Über das Rätsel der Schwerkraft" schon eingehend besprochen habe, so beschränke ich mich hier auf die Behandlung einiger wichtiger dort übergangener oder später erst veröffentlichter Gravitationstheorien und nehme die Eulersche zuerst vor, weil diese mit den vorhin dargelegten Gedanken Riemanns in einem deutlich erkennbaren Zusammenhange steht.

Riemann scheint gewufst zu haben, dafs er mit seinen Untersuchungen über das Problem der Schwere wenigstens zum Teil in den Fufsstapfen Eulers wandelte. Zwar kommt in den vorhin besprochenen gedruckten Abhandlungen Eulers Name, soviel ich sehe, nirgendwo vor, allein unter seinen nachgelassenen Papieren fand ich ein Blatt, wo derselbe genannt wird und zwar in einer mit Bleistift niedergeschriebenen Bemerkung, welche also lautet:

„Im Folgenden ist der Versuch gemacht, die allgemeinen Gesetze der toten Natur auf ihren gemeinschaftlichen tieferen Grund zurückzuführen. Für den dabei einzuschlagenden Weg dienen als Norm die Sätze:

1) dafs jede Wirkung eines Dinges auf ein anderes, deren Gröfse von der Entfernung abhängt, eine durch den Raum fortgepflanzte sein mufs.

Dieser Satz wurde von Newton und Euler stets festgehalten; erst später, durch den zusammenwirkenden Einflufs der Encyklopädisten und Kants, wie es scheint, ist er aus der naturwissenschaftlichen Litteratur verdrängt worden.

In der That ist es zwar nicht gerade unmöglich, den Umstand, dafs die Gröfse einer Wirkung von der Entfernung abhängt, auf andere Weise zu erklären, aber jeder Versuch, dies zu thun, führt zu äufserst künstlichen und daher unwahrscheinlichen Annahmen.

2) Dafs die Fortpflanzung aller Wirkungen von ponderablen Körpern auf ponderable Körper durch ein den Raum stetig erfüllendes Medium geschieht. —"

Hier wird Euler nur als Mitvertreter für den ersten Satz angeführt, thatsächlich hat er aber nicht blos diesen ersten, sondern auch den zweiten und überdies noch einen dritten vertreten, welcher dem Standpunkte der dritten Riemannschen Abhandlung vollkommen entspricht, den Satz nämlich, dafs die Ursache der Schwere auf Absorption beruhe und auf dem Drucke, welchen die Körper von dem raumerfüllenden Stoff, der sie rings umgiebt und durchdringt, unaufhörlich erleiden. Ja es ist merkwürdig, in wie enger und inniger Beziehung die Riemannsche Theorie überdies noch zu einer bestimmten Frage steht, welche Euler am Schlusse seiner

Untersuchungen über die Schwere als das erste Ziel jeder weiteren Forschung hingestellt hatte. Der letzte Hauptsatz seiner Abhandlung[1]) enthält nämlich die Worte: „Alles kommt demnach darauf an, daſs man die Ursache ergründe, warum die elastische Kraft (des Äthers) von einem jeglichen Himmelskörper vermindert werde . . .“

Riemanns Hypothese giebt hierauf die bestimmte Antwort: Weil in allen ponderablen Atomen unaufhörlich Äther verschwindet. — Euler selbst würde zu einem solchen Ausspruche wohl kaum den Mut gehabt haben; er überläſst die Ergründung jener „Ursache“ seinen Nachfolgern und begnügt sich bei seiner mathematischen Entwickelung des Problems mit der Annahme, daſs der Druck des Äthers nicht überall gleich, sondern in der Richtung auf den Mittelpunkt eines jeden Gravitationscentrums zu „dergestalt abnehme, daſs die Verminderung sich umgekehrt wie die Entfernung davon verhalte“.

Aus dieser letzteren Annahme wird derjenige Teil des Newtonschen Gesetzes, welcher sich auf die Abhängigkeit der Schwerkraft von der Entfernung bezieht, auf folgende einfache Weise abgeleitet. — Der angezogene Körper sei zerlegt in Säulen von der Grundfläche a^2 und der Höhe b, welche letztere gegen ein Gravitationscentrum gerichtet ist. Die Entfernungen der beiden Grundflächen von diesem Centrum seien x und $x + b$, der Druck des Äthers in unendlicher Entfernung von jedem Gravitationscentrum sei h, dann ist der Druck auf die beiden Endflächen der Säule $a^2\left(h - \frac{A}{x}\right)$ und $a^2\left(h - \frac{A}{x+b}\right)$, wobei A irgend einen konstanten Koefficienten bedeutet. Hieraus ergiebt sich in der Richtung auf das anziehende Centrum ein Drucküberschuſs von der Gröſse: $\frac{A \cdot a^2 b}{x(x+b)}$. Ist nun b gegen x unendlich klein, so geht dieser Ausdruck in die Form $\frac{A \cdot a^2 b}{x^2}$ über, und hieraus ergiebt sich durch Summation der Teile unter Vernachlässigung der Variationen von x schlieſslich der Bruch $\frac{A \cdot V}{x^2}$, wobei V das Volumen des angezogenen Körpers bedeutet.

Weniger einfach gestaltet sich die Einführung des Massenproduktes, und die beiden Faktoren desselben werden sogar auf verschiedene Weise in das Wirkungsgesetz hineingebracht. Bezüglich des angezogenen Körpers bedient Euler, um statt des Volumens V die Masse in den Zähler des obigen Ausdrucks hineinzubringen, sich der in seiner Naturlehre zu den

1) Opera Postuma II Cap. 19. No. 146. Vgl. hierzu auch meine Abhandlung über „Eulers Theorie von der Ursache der Gravitation“ in der hist. lit. Abteilung d. Zeitschr. für Math. u. Phys. XXVI, 1.

mannigfaltigsten Zwecken benutzten Annahme von den zweierlei Poren, den offenen und den geschlossenen, die jeder Körper haben soll. Dann bildet er den Begriff der „wahren Gröſse eines Körpers", welche gleich dem Reste ist, der übrig bleibt, wenn man von seiner scheinbaren Gröſse das Volumen sämtlicher Poren abzieht. Wofern nun einerseits das Volumen der geschlossenen Poren im Verhältnis zu dem der offenen als gering angenommen wird, und wofern andererseits der Äther durch die letzteren völlig ungehindert ein- und austreten kann, so darf man unter V sich das wahre Volumen des Körpers denken. Dieses ist aber der Masse proportional, wenn mit diesem Worte nichts anderes, als die Menge der in einem Körper vorhandenen Materie bezeichnet wird, und hiermit ist dann der eine Faktor des Newtonschen Massenproduktes in den Zähler des vorhin bezeichneten Bruches eingeführt. — Der zweite Faktor, die Masse des anziehenden Körpers nämlich, soll nun in der Gröſse A stecken. Euler läſst ein und dasselbe Objekt von mehreren Gravitationscentren zugleich angezogen werden; die entsprechenden Entfernungen seien x, y, z, v etc. Dann ist die elastische Kraft des Äthers am Orte des angezogenen Körpers gleich

$$h - \frac{A}{x} - \frac{B}{y} - \frac{C}{z} - \frac{D}{v} - \text{etc.},$$

und nun wird einfach bemerkt, die Gröſsen A, B, C, D seien den Massen der einzelnen Gravitationscentra proportional. Von irgend welcher Begründung dieser Behauptung aber findet sich keine Spur, vielmehr weist Euler diese Aufgabe einfach seinen Nachfolgern zu, indem er den vorhin citierten Hauptsatz dahin ergänzt: es müssen die Ursachen ergründet werden „warum diese Verminderung (des Ätherdrucks) sich einesteils wie die Massen des himmlischen Körpers und andernteils umgekehrt wie die Entfernungen von demselben verhalten". Dem fügt er als einzigen Fingerzeig am Schlusse des Kapitels noch die Worte bei: „Der Grund muſs augenscheinlich in der groben Materie, aus welcher der Körper besteht, gesucht werden, und die grobe Materie muſs in dem Äther eine Bewegung veranlassen, wodurch das Gleichgewicht gehoben wird. Wenn man erst soweit gekommen, so ist leicht zu zeigen, daſs solchergestalt der Druck des Äthers vermindert werden müsse."

Hiermit schlieſst Euler seine Entwickelungen ab. Prüfen wir dieselben nun nach den oben angezeigten fünf Gesichtspunkten, so ist zu sagen:

1) Vorhanden ist die Energie im Äther, und zwar nicht als kinetische, sondern als potentielle Energie, nämlich als Druck einer elastischen Flüssigkeit.

2) Die Energie wird absorbiert von den ponderablen Körpern an

deren Oberflächen, und zwar nicht nur an den äufseren, sondern, da die Körper porös sind, auch an den inneren Oberflächen. Eine Ursache für diese Absorption wird nicht angegeben.

3) Das Näherungsbestreben wird durch die Verschiedenheit des Druckes begründet, welchen der angezogene Körper beiderseits erleidet; auf der dem anziehenden Körper zugewandten Seite ist dieser Druck nämlich deshalb geringer, weil diese Seite näher bei dem Orte ist, wo die Absorption stattfindet.

4a) Die Abhängigkeit der absorbierten Energie von der Energie des Mediums bleibt unbestimmt.

b) Der Ausdruck für die Abhängigkeit der Absorption von der Entfernung beruht auf einer willkürlichen Wahl, welche getroffen wurde blos mit Rücksicht auf den Zweck, dafs die erste Differenz einen Bruch liefern solle, in dessen Nenner das Quadrat der Entfernung vorkommt. Dabei müssen aber die Dimensionen des angezogenen Körpers im Verhältnis zur Entfernung vernachlässigt werden.

c) Die Masse des angezogenen Körpers wird eingeführt auf Grund der Voraussetzung, dafs der Äther durch alle Poren desselben ohne jedes Hindernis ein- und austreten könne. Die Masse des anziehenden Körpers wird ohne jede Begründung eingeführt mit dem Hinweis auf künftige Forschung.

5) In den mehrfachen Vernachlässigungen, welche bei der Rechnung vorgekommen sind, wären wohl Abweichungen von dem Newtonschen Gesetze begründet. Euler hat dieselben aber nicht ferner beachtet, somit auch nicht auf einen mathematischen Ausdruck gebracht.

B. Dellingshausen.

Die Vorstellung einer lückenlosen Erfüllung des Raumes mit Materie ist der gemeinschaftliche Boden, auf welchem mit Riemann und Euler auch der Baron von Dellingshausen steht; in der Art aber, wie auf dieser Basis eine Lösung des Gravitationsrätsels versucht wird, weicht letzterer von den beiden ersten wesentlich ab.

Zunächst mufs gesagt werden, dafs die Dellingshausensche Theorie auch noch in ihrer letzten mir bekannt gewordenen Fassung[1]) an einem inneren Widerspruche leidet, welcher das ganze Gebäude einfach über den Haufen wirft. Dieser Schriftsteller gehört nämlich zu der Zahl jener

---

1) Die Schwere oder das Wirksamwerden der potentiellen Energie, von Baron N. v. Dellingshausen, Stuttgart 1884.

wenigen Physiker, welche den zweiten Teil des Galileischen Trägheitsgesetzes nicht unter die Voraussetzungen aufnehmen wollen, auf die sie ihre Schlüsse gründen und der Meinung sind, sie könnten auch ohne denselben alle jene Erscheinungen erklären, welche man sonst auf das sogenannte Beharrungsvermögen zurückführt.

Dies geschieht in dem erwähnten Buche auf eine scheinbar sehr einfache Weise. — Dellingshausen zerlegt in Gedanken die gesamte kontinuierliche Materie in materielle „Punkte“ und unterwirft die Bewegungen der letzteren einer eingehenden Betrachtung, wobei folgende grundlegenden Sätze vorkommen:

„Jeder Punkt beschreibt seine eigene Bahn und niemals dürfen die Koordinaten[1]) zweier Punkte ... für einen bestimmten Zeitmoment gleich werden. ... Keine Elasticität oder sonstigen Kräfte treiben im Innern der Körper ihr geheimnisvolles Spiel, sondern jeder Punkt schiebt und wird geschoben, wo ihm die übrigen Punkte durch ihre Bewegung Platz dazu lassen; kein Beharrungsvermögen ist erforderlich, um diese Bewegungen aufrecht zu erhalten, sondern ihre ununterbrochene Fortdauer beruht auf der vollkommenen Gegenseitigkeit aller Wechselwirkungen, wodurch ein einzelner Punkt nicht plötzlich stille stehen kann, während alle übrigen Punkte ihre Bewegungen fortsetzen.“

Freilich! ein einzelner Punkt, auch wenn er kein Beharrungsvermögen hätte, würde schon wegen der angenommenen Undurchdringlichkeit in dem Gedränge der übrigen nicht plötzlich stille stehen können. Aber warum überhaupt drängen denn die übrigen? warum „setzen sie ihre Bewegungen fort?“

Nehmen wir einmal an, die materielle Welt sei wirklich so eingerichtet und beeigenschaftet, wie Dellingshausen es angiebt, und bis jetzt habe eine ausreichende Zahl von irgend welchen Ursachen — mögen diese sein, welche sie wollen — sämtliche grofsen und kleinen Bewegungen im Universum hervorgebracht. Nehmen wir ferner an, von dem gegenwärtigen Augenblicke ab würde die Materie den genannten Eigenschaften ganz allein überlassen, und alles, was sonst noch darin gewaltet und gewirkt haben möchte, verschwände plötzlich: was müfste geschehen?

---

1) a. a. O. S. 12. Dieses mit Benutzung eines mathematischen Terminus ausgedrückte Verbot ist offenbar mit der Voraussetzung, dafs die Materie undurchdringlich sei, inhaltlich einfach identisch. D. aber erblickt darin eine Begründung der Undurchdringlichkeit und sagt: „die Punkte schliefsen sich daher gegenseitig aus und begründen dadurch einen Zustand, den man bisher als die Undurchdringlichkeit der Materie bezeichnet hat, der aber allein auf der Harmonie der inneren Bewegungen beruht.“

Jeder materielle Punkt ist im Besitze seiner eigenen Koordinaten. Da die Materie undurchdringlich ist, haben wir nirgendwo eine Verdichtung; da sie kontinuierlich ist, nirgendwo eine Lücke. Da das Beharrungsvermögen fehlt, hat kein Punkt das Streben, in der bis dahin beschriebenen Bahn sich weiter zu bewegen. Da die Elasticität fehlt, wird kein Punkt von seinen Nachbarn nach irgend welcher Richtung hingedrängt. Da es keine Fernkraft giebt, so bleibt er auch von den ihm nicht benachbarten Punkten gänzlich unbehelligt. — Also wird jeder materielle Punkt von nun an im friedlichen, unangefochtenen Besitze seiner augenblicklichen Koordinaten verharren; die ganze Welt kommt sofort in Ruhe und bleibt in Ruhe.

Wenn daher die Dellingshausensche Materie auch fähig wäre zu Bewegungen, die ihr von irgendwoher angethan würden, so ist sie doch unfähig, vermöge ihrer eigenen Eigenschaften allein irgend eine Bewegung in sich zu erhalten und fortzusetzen. Daher würde mit einer solchen Weltsubstanz ein Philosoph, welcher nicht nur einen *primus motor,* sondern auch noch einen unaufhörlich weiter wirkenden immateriellen Treiber und Lenker zu Hülfe nimmt, vielleicht arbeiten können, die „kinetische Naturlehre" aber kann, wenn sie konsequent sein will, mit diesem Stoffe, soviel ich abzusehn vermag, nicht das mindeste anfangen. Das ganze Gebäude der „kinetischen" Gravitationstheorie und alle Schlüsse, welche Dellingshausen auf die Fortdauer irgend welcher Bewegungen gründet, werden daher durch seine vorhin angeführten grundlegenden Sätze völlig untergraben. Überhaupt würde er nichts, auch nicht den kleinsten Schritt zu Stande gebracht haben, wenn er das abgewiesene und ausgemerzte „Beharrungsvermögen" nicht nachher doch wieder durch eine Hinterthür hereingebracht hätte. Dieser interessante Vorgang vollzieht sich auf folgende sonderbare Weise:

Dellingshausen sagt[1]): „Die inneren Bewegungen der Körper sind die letzten mechanischen Ursachen, welche allen Naturerscheinungen zu Grunde liegen. . . . Keine Erscheinung . . . darf als erklärt betrachtet werden, bevor sie nicht auf diese Bewegungen zurückgeführt ist; sie selbst aber bedürfen keiner weiteren Erklärung mehr . . . weil an den einzelnen (materiellen) Punkten überhaupt nichts mehr zu erklären übrig bleibt . . . . Die inneren Bewegungen der Körper tragen daher ihre Ursache in sich selbst, und es liegt keine Veranlassung vor, nach einer weiteren Erklärung zu suchen, wodurch unserem Kausalitätsbedürfnis vollkommen genügt wird." — Und auf die Frage, von welcher Art denn diese innere Bewegung der materiellen Punkte sei, antwortet Dellingshausen: „Die inneren Be-

1) a. a. O. S. 12.

wegungen der ruhenden Körper sind Rotationen. .... Aus der Vereinigung der rotierenden und translatorischen Bewegungen eines Punktes resultieren aber, wie leicht ersichtlich .... schraubenförmige Kurven, welche uns somit die wahre Form für die Bewegungen der Punkte im Raume darstellen."

Diese „schraubenförmigen Kurven" also sind diejenigen Bewegungen, bei denen nach D. unser Kausalitätstrieb sich zufrieden giebt mit dem Bescheide: dieselben geschehen von selbst; Ursachen dafür zu suchen „liegt keine Veranlassung vor". — Demgegenüber sagt bekanntlich die Physik seit Galilei: Ein bewegter Körper oder ein materieller Punkt behält die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung in gerader Linie „von selbst" bei; erst wenn er eines oder das andere oder beides nicht beibehält, fragen wir nach Ursachen, d. h. nach der Kraft, welche diese Veränderung bewirkt habe.

Das ist also der ganze Unterschied: Unser bisher geradlinig gewesenes „Beharrungsvermögen" hat Dellingshausen zu unbestimmten Schraubenlinien zusammen gekrümmt und es dann in dieser Form seiner Theorie wieder einverleibt!

Auf diese Weise setzte er, wie es scheint, seine Materie, welcht sonst hoffnungslos stagniert haben würde, wiederum in den Stand, allerlei kreisende und wirbelnde Bewegungen annehmen und fortsetzen zu können; allein nicht ohne Grund wirft ihm schon Rosenberger[1]) vor, er habe gar nicht nachgewiesen, wie in einer „homogenen, unzusammendrückbaren, kontinuierlichen Materie einzelne Bewegungen auch nur möglich" seien. Dafs diese Möglichkeit keineswegs auf der Hand liegt, ergiebt sich z. B. aus den von Paul du Bois-Reymond gegen dieselben gemachten Angriffen.[2])

Allein wenn man davon auch ganz absieht, so scheint mir völlig klar zu sein, dafs auf dem Boden einer physikalischen Grundvorstellung, welche jedem einzelnen materiellen Punkte unter Entbindung von aller Grundbeifügung die Bewegung in unbestimmten Schraubenlinien gestattet, der Aufbau einer Mechanik der Materie ganz unmöglich ist. —

Vielleicht wäre es gerechtfertigt, hiermit die Besprechung der Dellingshausenschen Theorie abzubrechen, aber ich will doch noch die früher aufgestellten fünf Hauptfragen auch auf dieselbe anwenden und in Kürze beantworten.

1) Die bei der Gravitation in Betracht kommende Energie ist nach Dellingshausen eine dreifache. Zunächst nämlich wird die Voraus-

---

1) Gesch. d. Phys. III 591.

2) „Über die Grundlagen der Erkenntnis in den exakten Naturwissenschaften". S. 24 u. 25.

setzung gemacht, dafs die den Weltenraum kontinuierlich ausfüllende, undurchdringliche Substanz von wellenförmigen Bewegungen durchzogen sei. Hierunter befinden sich sowohl stehende als fortlaufende Wellen, und jede Gattung wird zu besonderen Zwecken verwandt.

Gegen diese Grundvoraussetzung ist zu erinnern, dafs Wellen in einem solchen Fluidum etwas der heutigen Physik, soviel ich weifs, Fremdes sind. Sie entsprechen offenbar weder dem, was wir unter Luftwellen, noch was wir unter Wasserwellen uns vorzustellen gewohnt sind; noch weniger können sie den wellenförmigen Bewegungen in festen Körpern gleichen. Bei Luftarten nehmen wir ja die Zusammendrückbarkeit der Substanz, bei Flüssigkeiten eine freie Oberfläche, bei festen Körpern ersteres oder beides zu Hülfe, um Wellenbewegungen zu erzielen. Wie D. sie nun ohne Zusammendrückbarkeit bei einer den ganzen Weltraum kontinuierlich erfüllenden Substanz zu Stande bringen will, darüber suche ich bei ihm vergebens Aufklärung. Ebensowenig finde ich den Hinweis auf irgend eine Litteraturstelle, wo die Möglichkeit solcher Bewegungen nachgewiesen ist. Wahrscheinlich ist es dieser fundamentale Mangel, welcher Herrn Rosenberger zu dem Ausspruch veranlafst hat: „Bevor nicht der Mathematiker die Wellenbewegungen und die Interferenzen derselben in Dellingshausens Materie aus den einfachen Bewegungsgleichungen abgeleitet hat, eher wird auch dem Physiker nicht die ganze Theorie als etwas mehr, denn ein Produkt dichtender Phantasie erscheinen."

Der zweite Teil des bei den Gravitationserscheinungen in Betracht kommenden Energievorrats steckt in den schraubenförmigen Bewegungen der einzelnen Teilchen der gravitierenden Körper, ist also, wie der eben beschriebene erste, kinetischer Natur. Im Gegensatz dazu wird der dritte Teil dieses Vorrats „potentiell" genannt und seine Existenz folgendermafsen erläutert: Wenn ein materieller Punkt von zwei einander entgegengesetzten Wellen gleichzeitig getroffen wird, so kommt der Punkt in Ruhe und verliert also seine kinetische Energie vollständig. In diesem Falle jedoch erhält er eben das, was D. potentielle Energie nennt.

Worin besteht also die potentielle Energie der ruhenden Punkte? — Darin, dafs in ihnen die Wellen „ohne sich zu vernichten, sich gegenseitig **neutralisieren.**" — Der dritte Vorrat ist demgemäfs „die Energie der interferierenden und sich gegenseitig neutralisierenden[1]) Bewegungen".

2) Was nun die Absorption der Energie betrifft, so äufsert Dellingshausen darüber Folgendes: „In derselben Weise, wie gegen die Licht-

---

1) a. a. O. S. 29. Das Wort ist da, aber eine Angabe über die zugehörige mechanische Vorstellung fehlt.

und Wärmewellen, müssen die Körper sich auch gegen die sie treffenden Ätherwellen verhalten und durch ihre Absorption . . . eine störende Wirkung . . . auf die Bildung der stehenden Wellen in dem Weltäther ausüben . . . die Energie der Gravitationswellen wird durch ihre Centralkörper bestimmt, da für jede Ätherwelle, welche derselbe absorbiert, andere Ätherwellen als fortschreitende Wellen weiter bestehen und zur Bildung der Gravitationswellen beitragen müssen. . . . Durch die Bewegungen, welche die Gravitationswellen den Weltkörpern (indem letztere die ersteren absorbieren) ununterbrochen zuführen, müfste die Temperatur derselben beständig zunehmen und zuletzt ins Unermefsliche steigen. Da solches nicht eintritt, so ist damit der Beweis geliefert, dafs der beständigen Zufuhr von Bewegung eine ebenso beständige Ableitung entgegenwirkt. . . . . Durch das Gleichgewicht der einstrahlenden Gravitationswellen und der ausgestrahlten Licht- und Wärmewellen wird die Eigenwärme der Weltkörper bestimmt" etc.

Wie aus diesen Äufserungen hervorgeht, besteht die sogenannte Absorption bei Dellingshausen lediglich darin, dafs die Körper die einströmenden Gravitationswellen einfach in Licht- und Wärmewellen umwandeln und sie als solche wieder herauslassen. Auf welche Weise die Körper das aber machen, darüber suche ich bei ihm vergebens Auskunft, doch ist wenigstens angegeben, wie er sich den Unterschied dieser beiden Wellenarten denkt. Derselbe soll nämlich weder in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, noch in der Wellenlänge, noch in der Schwingungsdauer gesucht werden dürfen, sondern in Folgendem: „Während sich die Licht- und Wärmewellen als transversale Schwingungen erwiesen haben, können die Bewegungen in den Gravitationswellen sich vielleicht (!) durch eine longitudinale Komponente auszeichnen und deshalb besonders dazu geeignet sein, Bewegungen ... in der Richtung der Fortpflanzung hervorzubringen."[1])

Also läuft die ganze Absorption darauf hinaus, dafs von den in einen Körper eindringenden Wellen diejenigen, welche eine „longitudinale Komponente" besitzen, ohne diese letztere aus dem Körper wieder austreten. — D. sagt in dem eben angeführten Satze, es „könne vielleicht" so sein, wie er es darstellt. Ob es aber so ist, und ev. wie diese Absorption zugehe, und warum sie so geschehe, das fügt er nicht bei. Und doch ist der Punkt, um den es sich bei dieser longitudinalen Komponente handelt, ein sehr wichtiger, nämlich die Beantwortung der Hauptfrage:

3. Wie wird aus der Absorption die Centripetalkraft abgeleitet? — Der Zweck nämlich, weshalb die Körper den eintretenden

1) a. a. O. S. 33.

Wellen gerade ihre longitudinalen Komponenten wegnehmen, besteht darin, dafs ihre eigenen Massenpunkte mit Hülfe dieser Komponenten in die Lage kommen sollen, ihre korkzieherartigen Bahnen etwas mehr auseinander zu dehnen. Wenn nun diese Dehnung beharrlich nach einer Richtung hin geschieht, so würde das gleichwertig erscheinen mit einer beschleunigten Bewegung des ganzen Körpers nach dieser Seite; und wenn nachgewiesen würde, dafs das eben die Seite ist, nach welcher hin sich in einiger Entfernung ein anderer Körper befindet, so wäre damit eine Art von Centripetalkraft konstruiert. Diesen Hauptteil seiner Theorie trägt D. folgendermafsen vor.[1])

„Indem die Gravitationswellen den frei beweglichen Körpern neue Bewegungen zuführen . . . werden notwendigerweise gewisse Richtungsänderungen der inneren Bahnen der Körper hervorgebracht. Lassen sich nun diese Richtungsänderungen in einem freibeweglichen Körper als eine Zunahme des Steigungswinkels seinen inneren, nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten, schraubenförmigen Bewegungen darstellen, so erkennt man leicht, dafs die unmittelbare Folge davon eine relative Bewegung des Körpers in Bezug auf die Erde sein mufs. Durch die Zunahme des Steigungswinkels wird nämlich . . . seine Bewegung in derselben Richtung beschleunigt. Wiederholt sich dieser Vorgang beständig von neuem, so . . . wird (der Körper) dadurch in eine gleichförmig beschleunigte, nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtete Bewegung versetzt, d. h. in eine Bewegung, die wir als das Fallen der Körper bezeichnen. Die Beschleunigung der fallenden Körper ist somit (!) eine unmittelbare Folge der Formveränderungen, welche die inneren Bewegungen unter dem Einflusse der Gravitationswellen erleiden . . .“

Diese ganze Beweisführung ruht auf den Schultern der beiden Sätze: „Lassen sich . . . darstellen“ und: „Wiederholt sich dieser Vorgang beständig von neuem.“ Beide stehen aber, wie man sieht, blos als Bedingungssätze da, und ob und warum diese Bedingungen wirklich zutreffen, ist weder ausgeführt, noch durch den Ort, wo diese Ausführung zu finden wäre, begründet worden. Daher finde ich das „somit“ am Schlusse unberechtigt und kraftlos. — Die Möglichkeit, dafs umgekehrt die Schrauben von ihren eigenen „longitudinalen Komponenten“ einen Betrag an die Wellen abtreten könnten, hat D., soviel ich sehe, gar nicht besprochen, also auch nicht ausgeschlossen. Solange aber keine mechanischen Gründe dafür angegeben werden, warum dieser Komponentenaustausch immer in dem von

1) a. a. O. S. 40.

ihm vorausgesetzten Sinne stattfinden mufs, schwebt der Nachweis einer centripetalen Wirkung der Absorption in der Luft.

Die eben angeführten Sätze stehen dort, wo es sich um die Konstruktion der irdischen Schwere handelt. In einem späteren Abschnitte, nämlich da, wo die kosmische Seite der Frage ins Auge gefafst wird, mufste der vorliegende Punkt No. 3 natürlich wieder zur Sprache kommen. Aber bei dieser Gelegenheit wird der gerügte Mangel nicht etwa gehoben, sondern es heifst dort[1]) einfach ohne Ortsangabe: „Wir fanden, dafs durch die Veränderungen der inneren Bewegungen, welche die Gravitationswellen in den freibeweglichen Körpern hervorbringen, diese in eine beschleunigte, nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtete Bewegung versetzt werden ... Genau denselben Einflufs ... üben die Gravitationswellen auch auf die einzelnen Weltkörper aus und versetzen dieselben dadurch in eine gegen einander gerichtete Bewegung.“

4) Bezüglich der Frage nach der mathematischen Formulierung des absorbierten Energiebetrages ist wenig zu bemerken. Die Abhängigkeit desselben von der Energie des Mediums wird als einfache, direkte Proportionalität hingestellt.[2]) Die Abhängigkeit von der Entfernung wird durch das Verhältnis der Kugeloberflächen zum Radius in bekannter Weise begründet. Bei der Einführung der Massen finde ich folgenden Widerspruch. Dellingshausen sagt:

a) Die Gravitationswellen verlieren beim Durchgang durch die Körper an Energie.[3])

b) Der Betrag der von einem Körper absorbierten Energie ist proportional der Energie der ihn durchströmenden Gravitationswellen.[4])

c) Die Beschleunigung, welche ein Körper durch Gravitation bewirkt, ist proportional der von ihm absorbierten Energie.[5])

---

1) a. a. O. S. 64.

2) a. a. O. S. 67.

3) S. 41 heifst es: „... damit soll jedoch nicht gesagt sein, dafs die Gravitationswellen, indem sie die Körper durchströmen und ihnen einen Teil ihrer Bewegungen abgeben, nicht auch dabei einen entsprechenden Teil ihrer Energie einbüfsen.“ — So gering also auch nach D. dieser eingebüfste Teil sein mag, so ist er doch auf keinen Fall gleich Null.

4) S. 67 „... zugleich ist notwendigerweise die Menge der von ihnen (den gravitierenden Körpern) absorbierten ... Energie um so gröfser oder kleiner, je gröfser oder kleiner die Energie der ihn durchströmenden Gravitationswellen selbst ist.“

5) S. 67. „Deshalb ist auch die Beschleunigung eines ponderablen Körpers stets der Energie der von ihm absorbierten oder ihn durchströmenden Gravitationswellen proportional.“

Nun denke ich mir eine Bleikugel von dem Volumen $2v$, umgebe dieselbe mit einer bleiernen Hohlkugel, deren Volumen ebenfalls $2v$ ist, schneide das Ganze mitten durch und nehme aus der einen Hälfte den halbkugeligen Kern heraus, dann verhalten sich die übrig bleibenden Massen offenbar wie $2v$ Kubikmeter Blei zu $1v$ Kubikmeter Blei, also wie $2:1$. Nun stelle ich die gefüllte und die leere Schale so im Weltraume auf, dafs die ebenen Teile der Oberflächen einem und demselben, mitten dazwischen liegenden dritten Körper x zugewandt sind: Wie müssen sich dann die Beschleunigungen, welche letzterer von den beiden ersteren erfährt, zueinander verhalten?

Hierauf giebt Dellingshausen die Antwort: Wie die absorbierten Mengen von Energie.

Nun absorbieren zunächst die beiden gleichen Schalen gleichviel Energie, aber der Kern der einen Schale kann, eben weil diese letztere schon einen Teil der Energie der durchpassierenden Gravitationswellen absorbiert hat, trotz seiner ebenso grofsen Masse doch nicht mehr soviel Energie absorbieren, als die Schale, da ja nach dem vorhin unter b aufgeführten Satze das absorbierte Quantum dem durchpassierenden proportional ist. Daher kann nach Dellingshausen das Verhältnis der Beschleunigungen nicht gleich $2:1$, d. h. nicht gleich dem der Massen sein. Dennoch aber läfst er aus seinen eben angeführten Sätzen, ohne dabei über das Verhältnis der Wirksamkeit innerer Teile zu der der äufseren noch erst zu reden, sich sogleich den Schlufs ergeben, „dafs die Beschleunigung der Weltkörper zueinander der Masse des Centralkörpers direkt ... proportional ist."

Dellingshausen setzt sich hier über die gröfste Schwierigkeit aller kinetischen Erklärungen der Schwere hinweg, ohne sie ernstlich ins Auge gefafst zu haben. Mit all seinen Bemühungen, das über dem Begriff der Masse lagernde Dunkel aufzuhellen, ist hier nicht viel geholfen. Denn bei gleichartigen Körpern tritt statt des Massenverhältnisses das Verhältnis der Volumina auf. Der dunkle Begriff ist dadurch vollständig eliminiert, aber die Schwierigkeit ist ganz so grofs geblieben, wie sie war. Wie kann nämlich die Absorption in den inneren Schichten genau ebensogrofs sein, als in den äufseren Schichten von gleichem Rauminhalt? (Der Versuch, die Absorption gleich Null zu setzen, ist natürlich auch aussichtslos; denn mit Annulierung der Ursache, und wenn sie nach D. auch nur eine „veranlassende Ursache" sein sollte, wird auch die Wirkung einfach annulliert.)

Ich glaube, darauf verzichten zu können, einige andere Punkte in den Dellingshausenschen Erörterungen, welche mir ungereimt erscheinen und welche speziell mit seiner Unterscheidung zwischen den blos veran-

lassenden und den eigentlichen Ursachen der Schwere zusammenhängen, noch besonders zu besprechen und wende mich nunmehr zu den in den letzten Jahrzehnten immer mehr und mehr entwickelten Stofstheorien.

C. Lesage, W. Thomson, Tolver Preston.

Vorab ist hier zu bemerken, dafs es unter den Vertretern der auf Stofswirkungen gegründeten Erklärungen der Schwere einige giebt, welche gegen die Einfügung ihrer Systeme in die allgemeine Klasse der „Absorptionstheorien“ vielleicht lebhaften Widerspruch erheben würden, weil sie von Energieabsorption nichts wissen wollen und des Glaubens sind, sie hätten auch ohne solche ihr Ziel erreicht. Allein diese Meinung scheint mir — was ich im Späteren noch begründen werde — irrig und verdankt ihre Entstehung wohl nur einem Mangel an Klarheit und Anschaulichkeit, der den betreffenden Theorien an gewissen wichtigen Punkten anhaftet.

Zwar gehen alle Stofstheorien von der Annahme aus, dafs es einen gasförmigen Äther gebe, d. h. ein Medium, bestehend aus unermefslich vielen, sehr kleinen Körperchen, welche mit aufserordentlich grofser Geschwindigkeit nach allen Richtungen hin den Weltraum durchfliegen. Wenn wir nun aber schon unsere erste Hauptfrage aufstellen und sagen: Ist denn nun die in diesen Körperchen vorhandene lebendige Kraft diejenige Energie, deren Absorption die Erscheinungen der Schwere zur Folge hat? Dann gehen die Meinungen schon sehr auseinander. Unbedingt bejahen können wir dies nur bezüglich derjenigen Theorien, welche die Ätherteilchen als unelastische Körper behandeln. So oft diese letzteren nämlich mit den gravitierenden Massen zusammenstofsen, geht nach bekannten mechanischen Gesetzen lebendige Kraft verloren, und dieser absorbierte Betrag steht, sobald die Frage nach der Herkunft der Energie fallender Körper erhoben wird, zur freien Verfügung. Freilich wird man dabei nicht umhin können, sich wegen der Benutzung unelastischer Stöfse mit dem Gesetz von der Erhaltung der Energie auseinander zu setzen. — Ich habe über diesen Punkt an mehreren Stellen meines Buches über „das Rätsel von der Schwerkraft“[1]) sowie in meiner Schrift über die Fernkraft und das Ignorabimus von Paul du Bois-Reymond[2]) eingehend gesprochen. Zwar schon Redecker 1736

---

1) u. a. in der Vorrede, S. 70 Anm. S. 73 Anm. S. 152.

2) S. 15 Anm. Ich will hier noch den Hinweis auf einen naheliegenden Gedanken beifügen. Man kann den Versuch unternehmen, einerseits auf Grund der blofsen Trägheit und Undurchdringlichkeit, also unter Verzicht auf jede elastische Kraft solche Bewegungen der sinnfälligen Materie zu konstruieren, welche sich von dem nach den Newtonschen Gesetze erfolgenden unmerkbar wenig

und etwas später Lesage[1]) hatten mit unelastischen Atomen die Absorption begründet, allein in jener Zeit war die bezeichnete Schwierigkeit natürlich noch nicht vorhanden, weil damals ja die Möglichkeit eines Verlustes an lebendiger Kraft bei manchen physikalischen Vorgängen nicht bestritten wurde. Alle übrigen Stofstheoretiker aber, soviel mir bekannt, haben geglaubt mit dem Energiegesetz dadurch in Frieden auszukommen, dafs sie entweder die Ätherteilchen elastisch machten oder dieselben zwar unelastisch liefsen, aber dennoch die für elastische Körper geltenden Stofsgesetze zur Anwendung brachten. Letzteres geschieht z. B. von Fritsch, welcher übrigens seine in meinem Rätsel[2]) kritisierten Deduktionen seitdem aufgegeben und durch andere ersetzt hat.[3]) Zu den Anhängern der elastischen Atome aber gehören u. a. Schramm, Thomson, Tolver Preston, Rysáneck.

---

unterscheiden, also innerhalb der jetzigen Grenzen unserer Naturbeobachtung „konservativ“ sind, sodann andererseits auf Grund dieses konservativen Charakters der Bewegungen die Herrschaft des Energiegesetzes in den bezeichneten Grenzen abzuleiten, und man würde hiernach einen Widerspruch dieses Gesetzes, sowie der physikalischen Empirie überhaupt nicht mehr zu befürchten haben.

1) Die hier gebotene Gelegenheit möchte ich benutzen, um einen in meinem „Rätsel“ S. 72 geäufserten Zweifel zu beseitigen. — Aus den dort angegebenen Quellen war nicht mit Bestimmtheit zu ersehen, ob Lesages „corpuscules ultramondains“ elastisch oder unelastisch waren. Dafs letzteres aus der von mir damals citierten Stelle Thomsons: „Auf diese Weise wird die von Lesages Theorie geforderte Bedingung erfüllt, ohne die neuere Thermodynamik zu verletzen“ schon mit Gewifsheit hätte erschlossen werden müssen, wie eine Hallenser Dissertation von Herrn Wilhelm Stoss (S. 19) behauptet, scheint mir irrig. Denn wenn Herr Stoss meint, auf die Frage: „Was ist das, womit Lesage nach Thomsons Ansicht die neuere Thermodynamik verletzt?“ wäre nur die Antwort möglich gewesen: „Ohne Zweifel die absolute Härte der Atome“, so ist, ganz abgesehen davon, ob dies wirklich die einzig mögliche Antwort gewesen wäre, in obigen Worten Thomsons die Berechtigung dieser Fragestellung überhaupt nicht enthalten. Thomson behauptet darin ja gar nicht, dafs Lesage die Thermodynamik verletzt habe, sondern sagt einfach, Lesages Theorie fordere eine Bedingung, und diese Forderung verletze die Thermodynamik nicht. Übrigens führt Thomson in dem oben citierten Satze unmittelbar fort mit den Worten: „und in Übereinstimmung mit Lesage mögen wir uns hierbei beruhigen etc.“ Da nun Thomson selbst mit elastischen Gebilden arbeitete, so schien mir wohl die Wahrscheinlichkeit, wenigstens aber doch die Möglichkeit vorzuliegen, dafs Lesage dasselbe thue. — Aus dessen eigenen Schriften und hinterlassenen Manuscripten geht aber hervor, dafs seine „corpuscules“ unelastisch waren. Auch hat W. Thomson an anderen Stellen, die mir damals nicht vorlagen, hierüber keinen Zweifel gelassen.

2) S. 96 u. ff.

3) Programm des Realgymn. in Königsberg 1886.

Schramm läſst die Ätheratome nach ihrem Zusammenstoſs mit den Körpermolekülen ebenso schnell zurückfliegen, wie sie angekommen sind. Er hält also die für vollkommen elastische Körper übliche Vorstellung fest; zu der gewünschten Absorption aber gelangt er nur mit Hülfe eines Rechenfehlers.[1])

Tolver Preston hat sich um den Nachweis der Absorption weiter keine Mühe gegeben. Er steht in dieser Beziehung einfach in den Schuhen W. Thomsons und spricht sich darüber folgendermaſsen aus[2]): „Thomson hat zuerst (Philosophical Magazine Mai 1873 S. 329) die Erklärung von diesem Geschwindigkeitsverlust in Einklang mit der vollkommenen Elasticität der Atome, resp. mit der Erhaltung der Kraft gebracht. Seine Erläuterung könnte principiell folgendermaſsen in etwas veränderter Form gegeben werden. Wegen der verhältnismäſsig sehr groſsen Dimensionen des groben Moleküls kann das kleine Gravitationsatom bei seinem Anprall nur gewissermaſsen einen einzigen Punkt der Oberfläche des groben Moleküls berühren. Deshalb wird natürlich die innere Bewegung des groben Moleküls durch den Stoſs kaum afficiert (oder das Molekül wird kaum erschüttert). Dagegen kann das Gravitationsatom seiner Kleinheit wegen voll mit seiner ganzen Fläche auf das grobe Molekül anschlagen, und das Atom wird dadurch heftig erschüttert — resp. in starke innere Bewegung (Vibration und Rotation) versetzt. Diese innere Bewegung des Atoms kann aber selbstverständlich nicht aus Nichts erzeugt werden. Deshalb verliert das Atom beim Stoſse einen Teil seiner translatorischen Bewegung durch Umwandlung derselben in innere Bewegung. Man könnte diese Thatsache leicht experimentell illustrieren beim Werfen irgend eines kleinen elastischen Körpers, z. B. eines Stahlringes gegen die Oberfläche eines harten Ambosses. Der Stahlring springt mit einer Verminderung seiner translatorischen Bewegung zurück — wegen Umwandlung derselben in Vibrationsbewegung. Wenn man also nur die ungeheure Verschiedenheit der Dimensionen (und deshalb die Verschiedenheit der Biegsamkeit oder Starrheit) zwischen Atom und Molekül in Rechnung zieht, so wird man ersehn, daſs der Verlust an translatorischer Bewegung schon im Voraus als eine notwendige Deduktion sich ergiebt, auch wenn die Erklärung der Gravitation nicht zu dieser Annahme führen würde.“

Bevor ich diese Darlegung vom rein mechanischen Standpunkte aus in Betracht ziehe, möchte ich nicht versäumen, zuerst in aller Schärfe noch

---

1) „Rätsel etc.“ S. 77.

2) Sitzungsb. der k. Akad. der Wissensch. II. Abt. Aprilheft 1883. S. 7 Anmerkung.

einmal darauf hinzuweisen, welche Hypothese es eigentlich ist, die unter der Flagge der „Elasticität" hier fast unvermerkt eingeschmuggelt wird.

Nach Thomson fliegt das Projektil nach dem Stofse weg mit kleinerer translatorischer Geschwindigkeit, aufserdem aber rotiert und vibriert es. — Dafs es abfliegt mit irgend einer Geschwindigkeit und dafs es rotiert: beides läfst sich bekanntlich aus der Undurchdringlichkeit und der Trägheit der Materie in aller Strenge ableiten, auch ohne Elasticität. — Warum aber vibriert es?

Nehmen wir z. B. einen kreisförmigen T. Prestonschen Stahlring oder noch einfacher eine elastische Kugel und denken uns, diese sei infolge ihres Anstofses zu einem (Rotations-) Ellipsoid abgeplattet worden. Nach dem Abprallen vibriert sie nun, d. h. ihre Form wird abwechselnd ellipsoidisch, rundet sich wieder zur Kugel ab, wird darauf entgegengesetzt ellipsoidisch, rundet sich nochmals ab, und wechselt in dieser Weise ihr Thun unaufhörlich. — Fassen wir jetzt einmal den Moment ins Auge, wo die Hauptaxe des Ellipsoids eben ihre gröfste Ausdehnung hat. Was verhindert den Körper, grade so, wie er eben ist, zu bleiben? — Welche Ursache, welcher Kobold, könnte man fast sagen, steckt denn in diesem Ellipsoid und bewirkt, unzufrieden mit der augenblicklichen Form desselben, dafs die Endpartikel der längeren Axe einander sich wieder nähern müssen? — Paul du Bois-Reymond meint, diese Ursache könne nur wieder eine Fernkraft sein, und daher laufe die Benutzung der Elasticität bei der Konstruktion der Schwere lediglich darauf hinaus, dafs man eine Fernkraft durch eine andere Fernkraft erkläre. — Ich möchte nicht soweit gehen, aber ich sage, wenn die Ursache der Vibrationen auch vielleicht keine Fernkraft, keine *„actio in distans"* zu sein brauchte, wie die Gravitation, so ist sie doch erstens eine *„qualitas occulta"*, grade wie die Gravitation, und zweitens eine „veränderliche Ursache", ebenfalls wie die Gravitation. — Letzteres könnte man zu bezweifeln geneigt sein, aber es folgt sofort aus dem Umstande, dafs bei der oscillierenden Kugel die Geschwindigkeitskomponenten der einzelnen Teile periodische Funktionen der Zeit sind. In den extremen Lagen nämlich ist die Geschwindigkeit all dieser Teile (bezogen auf ein mit dem Mittelpunkt fest verbundenes Koordinatensystem) gleich Null, kehrt daselbst ihr Vorzeichen um, wächst nachher so lange, bis die Kugelform erreicht ist, nimmt dann wieder ab etc.[1]) Es bleibt also für die

1) So würde es wenigstens den Bewegungsgesetzen der gewöhnlichen elastischen Körper entsprechen. Allein vielleicht nimmt ein Vertreter der elastischen Stofstheorie sich die Freiheit, über die vibrierende Bewegung seiner Projektile eine andere Hypothese zu ersinnen. Wie er sich die aber auch zurechtlegen mag:

Forschung nicht blos die Frage übrig: Welche Ursache bewirkt, dafs die Teilchen nach dem Stofse fortfahren, sich relativ zu einander zu bewegen, sondern auch die weitere Frage: welche Ursache bewirkt, dafs die erstere Ursache in ihrer Wirkungsweise sich verändert, dafs nicht etwa blos die Geschwindigkeiten, sondern auch die Beschleunigungen jener Teilchen gröfser und kleiner werden, dafs sie bald diese, bald die entgegengesetzte Richtung haben?

Auf diese Fragen wird vom Standpunkte aller Atom-Elastiker nur die Antwort geboten: Solche Ursachen können wir nicht näher angeben. Wir behaupten nur, dafs sie existieren, legen ihnen den Namen Elasticität oder elastische Kraft bei und kümmern uns nicht weiter darum. Herr Tolver Preston fügt noch hinzu: „Die Erklärung dieser Elasticität mag wohl ein sehr interessantes Problem für die Zukunft sein.“[1]) —

Nun aber wollen wir von alledem ganz absehn und, zur rein mechanischen Betrachtung zurückkehrend, die Frage aufwerfen, ob Thomson durch die vorhin mitgeteilte Erörterung denn wirklich „die Erklärung von diesem Geschwindigkeitsverlust in Einklang mit der vollkommenen Elasticität der Atome . . gebracht“ hat. — Wann nennen wir eine Elasticität denn vollkommen? — Thomson denkt sich die Moleküle der sinnfälligen Materie ungeheuer grofs und ungeheuer starr im Vergleich mit den Gravitationsatomen. Nehmen wir also, um die Sache zu veranschaulichen, eine sehr grofse starre Wand und lassen gegen dieselbe eine Kugel anfliegen. Diese möge einen gewissen Grad von Elasticität haben, fliegt also mit irgend einer Geschwindigkeit zurück, und je mehr diese letztere der Fluggeschwindigkeit vor dem Stofse sich annähert, desto gröfser schätzen wir den Grad von Elasticität, den die Kugel besitzt. Wann aber nennen wir diese Elasticität eine vollkommene? — Nach dem in der Mechanik bisher üblichen Sprachgebrauch, soviel ich weifs, nur dann, wenn die Geschwindigkeit nach dem Stofs der ursprünglichen gleichkommt. Der Unterschied dieser beiden Geschwindigkeiten müfste gleich Null sein, wenn die Elasticität eine vollkommene genannt werden soll, und der Tolver Prestonsche „Einklang“ zwischen Geschwindigkeitsverlust und dieser Vollkommenheit der Elasticität ist hiernach einfach begrifflich ausgeschlossen; seine Herstellung kann überhaupt versucht werden nur auf Grund einer Umänderung des Begriffes der vollkommenen Elasticität.

---

an der Veränderlichkeit kommt er auf keine Weise vorbei, da es ja im Wesen der Vibrationsbewegung liegt, dafs die Komponenten der Geschwindigkeit in gewissen Augenblicken ihr Vorzeichen umkehren.

1) a. a. O. S. 2. — Sein Ausspruch S. 3: „Ich wende (bei der Erklärung der Gravitation) keine Kräfte an“, ist offenbar irrig.

Es nützt nichts, zur Entgegnung darauf hinweisen zu wollen, wie in Wirklichkeit alle bekannten Körper nach dem Stofse einen Geschwindigkeitsverlust zeigen, und wie man diese Thatsache mit dem Gesetze von der Erhaltung der Energie ja doch auf einfache Art in Einklang zu bringen gewufst habe. Denn eben die Thatsache, dafs bei jedem Stofs translatorische Energie in Wärme, d. h. in eine andere Art von kinetischer Energie umgesetzt wird, pflegt man ja als einen Beweis von unvollkommener Elasticität zu betrachten und zu sagen: Vollkommen elastische Körper kennen wir nicht, keineswegs aber zu sagen: Wenn trotz des Geschwindigkeitsverlustes die Summe der äufseren und inneren kinetischen Energie erhalten bleibt, so dürfen wir die stofsenden Körper deswegen vollkommen elastische nennen.

Also die Leistung, welche nach Tolver Preston Herrn W. Thomson „zuerst" gelang, involviert notwendig eine Begriffsumänderung, und es fehlt auch nicht an Anhaltspunkten dafür, dafs dieser Umstand Herrn Thomson nicht entgangen sei. Tolver Preston beruft sich nämlich auf einen Artikel im Philosophical Magazine, und in diesem Artikel wird von Thomson selbst der § 301 des bekannten Lehrbuches beigezogen, welches er mit Tait unter dem Titel: „Natural Philosophy" herausgegeben hat. Nun ist aber für die vorliegende Frage weniger § 301, als vielmehr § 302 wichtig, welcher die Überschrift: „Verteilung der Energie nach dem Stofse" trägt. Dort wird mit klaren Worten gesagt, dafs bei aufeinander stofsenden elastischen Körpern „stets ein Teil der früheren kinetischen Energie in der Form von Vibrationen zurückbleibe", und dafs man diesen Verlust „**unpassend** die Wirkung der unvollkommenen Elasticität **nenne**".[1]) — Nun mögen Thomson und Tait ja wohl ihre guten Gründe haben, wenn sie es im allgemeinen passend finden, auch solche Körper noch vollkommen elastisch zu nennen, welche nach dem Stofse langsamer fliegen, als vor dem Stofse, jedenfalls aber leuchtet ein, dafs die Lösung des Rätsels von dem „Einklang", welche auf diese Weise Herrn W. Thomson „zuerst gelungen" ist, in der bezeichneten terminologischen Änderung ihre eigentliche Wurzel hat. Wir wollen daher von dieser Wortfrage im Folgenden ganz absehn und unser Augenmerk auf den mechanischen Kern richten.

Wenn die gesamte Energie jedes Thomsonschen Ätheratoms aus den drei Summanden: translatorische, rotatorische, vibratorische Energie besteht, so können diese einzelnen Summanden durch das Zusammenprallen mit den

---

1) Zitiert nach der von Helmholtz und Wertheim besorgten deutschen Ausgabe I. S. 237.

Körpermolekülen zwar offenbar auf mannigfache Weise verändert und ineinander übergeführt werden, ohne dafs die Summe selbst sich zu ändern braucht. Allein die von Thomson vertretene Theorie hätte vor allem, weil sie ja darauf baut, den Nachweis zu liefern, dafs diese Umwandlung — im Durchschnitt gerechnet — wesentlich auf Kosten des ersten Summanden geschieht. Ein solcher Nachweis aber ist zunächst bei Tolver Preston nicht vorhanden. Ferner ist er in der von ihm angeführten Thomsonschen Abhandlung im Philosophical Magazine nicht vorhanden, vielmehr finde ich dort den Satz: „Selbst für den einfachsten Fall, nämlich den der weichen elastischen Kugeln, hat noch niemand durch abstrakte Dynamik das schliefsliche (d. h. nach dem Stofse stattfindende) mittlere Verhältnis der vibratorischen und rotatorischen Energie zu der translatorischen ermittelt."[1]) — Das läfst schon vermuten, dafs der fragliche Beweis überhaupt noch fehlt. An der entscheidenden Stelle jenes Artikels, dort nämlich, wo die Behauptung von der verlangsamten Geschwindigkeit nach dem Stofse aufgestellt ist, wird der vorhin schon erwähnte § 301 beigezogen. Ich habe aber weder in diesem Paragraphen, noch überhaupt in dem Buche von Thomson und Tait jenen Beweis finden können. Dagegen steht in § 305 der Satz: „die mathematische Theorie der Vibrationen fester elastischer Kugeln ist noch nicht ausgearbeitet worden, und ihre Anwendung auf den Fall der durch einen Stofs erzeugten Vibrationen bietet beträchtliche Schwierigkeiten dar."

Hierdurch wird die Vermutung, dafs die oben erwähnte unterste mechanische Grundlage bisher noch nicht gelegt sei, wiederum bestärkt. Weiterhin kommt aber noch eine Stelle in Betracht, worin Thomson von der Möglichkeit spricht, dafs der verminderte translatorische Energie-Summand auch wieder auf Kosten der beiden anderen vermehrt werden könne, nämlich durch die Zusammenstöfse der Ätheratome mit ihresgleichen. Er spricht dies aus in Form des Satzes: „Das Verhältnis der Gesamtenergie der Körperchen zu dem translatorischen Teil ihrer Energie ist im Durchschnitt nach dem Zusammenstofs mit mundaner Materie gröfser, als nach dem Zusammenstofs mit ultramundanen Körperchen", und diesen Satz bezeichnet er ausdrücklich als eine blofse Annahme („supposition"), keineswegs aber als das Resultat irgend einer mechanischen Deduktion. Dafs er nicht im Besitze einer solchen war, scheint daher wohl angenommen werden zu dürfen, und wenn wir mit Rücksicht hierauf die Frage stellen, in welcher

1) Even for the simplest case — that namely of smooth elastic globes — no one has yet calculated by abstract dynamics the ultimate average ratio of the vibrational to the translational energy.

Weise die Grundlagen der Gravitationstheorie Lesages durch Thomson umgestaltet worden sind, so ist, wie mir scheint, zu sagen, dafs Letzterer den Hypothesen des Ersteren noch drei weitere beigefügt hat, nämlich erstens: es giebt eine unbekannte, veränderliche Ursache, welche die Ätheratome fortdauernd in Stand setzt, alle erlittenen Formveränderungen wieder auszumerzen; zweitens: die Ätheratome sind weicher als die Körperatome; drittens: die „mathematische Theorie“ des Zusammenstofses elastischer Kugeln wird das Resultat ergeben, dafs der translatorische Teil ihrer Energie durchschnittlich einen kleineren Bruchteil der gesamten Energie ausmacht nach Zusammenstöfsen mit härteren, als nach Zusammenstöfsen mit weicheren Körpern. —

Auf diesen Annahmen ruht der unterste Grundstein der Thomsonschen und Tolver Prestonschen Gravitationstheorie, aber dieselben reichen doch noch nicht einmal aus, um unsere erste Hauptfrage: aus welcher Quelle stammt die Energie, die ein fallender Körper gewinnt? zu beantworten. — Soviel ich weifs, hat Lesage die Frage überhaupt nicht prägnant gestellt, aber die Antwort würde ihm, wie Allen, welche unelastische Stöfse zu Grunde legen, nicht schwer gefallen sein, weil ja nach dieser Theorie die Ätheratome aus den gravitierenden Massen mit Energieverlust heraustreten. Thomson aber hat sich diese Quelle ausdrücklich verstopft, indem er sagt, die austretenden Körperteilchen müfsten dieselbe Energie wieder mit herausnehmen, die sie auch hereingebracht haben (must carry away the same energy with them, as they brought. S. 329). — Unter diesen Umständen wird die Frage nach der Herkunft der Fallenergie sehr unbequem und in der That habe ich weder bei Thomson noch bei Tolver Preston eine Antwort darauf gefunden. Es ist aber ebenso interessant als wichtig zu untersuchen, auf welche Antwort eine konsequente Durchführung dieser Theorie hinauslaufen mufs.

Wenn z. B. der vom Gipfel eines Felsens losgebröckelte Stein herabsaust, und wenn er die kinetische Energie, welche er während des Fallens erwirbt, nicht von der Anziehungskraft der Erde enthält, die ja *per hypothesin* ausgeschlossen ist; wenn er sie zweitens nicht von dem Äther erhält, der ja ohne Energieverlust[1]) aus dem Steine wieder heraustritt; wenn drittens nach der Theorie Erde, Äther und Stein die einzigen bei

1) Hierdurch wird auch der etwa noch denkbaren Annahme, dafs die Fallenergie zwar nicht von der Anziehung, aber vielleicht von irgend einem anderen in der Erde steckenden geheimnisvollen Energiequantum herrühren und durch den Äther nach dem Steine transportiert würde, ein Riegel vorgeschoben. Der Äther soll ja seine gesamte in den Stein hineingebrachte und transportierte Energie auch wieder aus ihm mit hinwegnehmen.

der Erklärung des Phänomens in Betracht kommenden Faktoren sind, so bleibt offenbar nur übrig zu sagen: die lebendige Kraft des fallenden Steines stammt aus dem Steine selbst, mit anderen Worten: sie steckte schon vor dem Falle in demselben, und während des Fallens wird ein gewisser Prozentsatz dieser früher verborgenen Energie umgewandelt in diejenige kinetische Energie, mit welcher der Stein auf der Erde anlangt.

Die Notwendigkeit einer solchen Annahme scheint mir unausweichlich, und Dellingshausen hat sich ja auch schon zu derselben bekannt, obschon bei ihm der Äther noch mit einigem Energieverlust aus dem fallenden Körper heraustritt. Bei Thomson hingegen, der dies leugnet, bleibt, soviel ich irgend absehe, keine andere Fundgrube für die Fallenergie übrig.

Was folgt nun aber aus der Notwendigkeit, eine solche Hypothese der Theorie Thomsons unter die Füſse zu schieben? — Zunächst die weitere Notwendigkeit, irgend eine mechanische Ableitung dafür zu geben, wie durch die Stöſse des elastischen Äthers die in einem fallenden Körper verborgen vorhandene Energie in die lebendige Kraft der Fallbewegung umgewandelt wird. Eine solche Ableitung ist aber gar nicht möglich, wenn nicht eine bestimmte mechanische Vorstellung von der Natur jenes verborgenen Energievorrats zu Grunde gelegt wird, und diese fehlt, soviel ich sehe, bei Thomson sowohl, wie bei Tolver Preston.

Wäre aber auch diese mechanische Grundlage wirklich gelegt, so würde jeder, der wie Thomson den Anspruch erhebt, die Stoſstheorie mit dem Gesetz von der Erhaltung der Energie in Einklang gebracht zu haben, noch eine andere und gröſsere, in den näheren Beziehungen der Gravitationswirkungen zu Zeit und Raum begründete Schwierigkeit hinweggeräumt haben müssen. Er müſste — um zunächst ganz einfache Fragen anzuführen — mechanisch abgeleitet haben, warum in dem Apfel, der am Stiele hängt, die durchpassierenden Ätheratome alle innere Energie in ihrem Zustande belassen, warum sodann bei der Loslösung vom Baume der Umwandlungsprozeſs seinen Anfang nimmt und sich in der Weise vollzieht, daſs im ersten Zeitteilchen ein gewisser Energiebetrag, im zweiten deren aber drei, im dritten fünf umgewandelt werden etc.; warum der Knabe, welcher den Apfel aufhebt und zu seiner alten Stelle wieder heraufbringt, durch diese Arbeit — mag sie in beliebiger Zeit und auf beliebigem Wege ausgeführt werden — eben jene während des Fallens in lebendige Kraft umgewandelte Energie in dem Apfel wieder in ihren ursprünglichen latenten Zustand zurückverwandelt. Er müſste sodann bezüglich der kreisenden und Wurfbewegungen gezeigt haben, warum die Umwandlung der inneren Energie im allgemeinen weder der Zeit, noch dem Wege, noch der Ge-

schwindigkeit proportional ist; er müfste die enge Beziehung derselben zum Radiusvektor dargelegt haben, müfste überhaupt in jener bekannten Gleichung, welche das Gesetz von der Erhaltung der Energie ausdrückt, denjenigen Summanden, welcher bei der bisherigen Attraktionshypothese unter dem Namen der „potentiellen Energie“ aufgeführt wird, durch eine andere Energie ersetzen und die Schwankungen dieses Summanden aus seiner mechanischen Theorie heraus so begründen, dafs bei allen Schwankungen der „kinetischen Energie“, wie sie die auf Gravitation beruhenden Fall-, Wurf- und Rotationsbewegungen mit sich bringen, dennoch die erwähnte Gleichung stets befriedigt bleibt. — Da dies alles bei Thomson und Tolver Preston fehlt, so scheint mir die Behauptung, ihre Theorie sei mit dem Gesetze von der Erhaltung der Energie in Einklang gebracht, irrig. —

Hiermit sind wir an dem Punkte angelangt, wo wir die Besprechung der von diesen Forschern vertretenen Theorie mit einem Rückblick auf unsere fünf kritischen Fragen zum Abschlufs bringen können.

1) Wo die Energie fallender Körper vor dem Falle gewesen ist, bleibt dunkel.

2) Wie die Umwandlung in Fallenergie, und zwar

3) mit centripetaler Richtung sich vollzieht, dafür wird keine genügende mechanische Ableitung gegeben.

4) Ein bestimmter Ausdruck für die Beziehung der Fallenergie zu der Gesamtenergie, von welcher sie stammt, ist nicht vorhanden. Bezüglich des Einflusses der Entfernung und Masse bewendet es bei den Resultaten Lesages.

5) Abweichungen von dem Newtonschen Gesetze bleiben aufser Betracht.

D. Rysáneck und Paul du Bois-Reymond.

Im 24. Bande von Exners „Repertorium der Physik“ hat Prof. Adalbert Rysáneck unter dem Titel „Versuch einer dynamischen Erklärung der Gravitation“ eine Theorie veröffentlicht, welche der Lesage-Thomson-Tolver Prestonschen sehr verwandt ist, aber doch in einzelnen Punkten davon abweicht und namentlich in Bezug auf die mathematische Durchführung wesentlich über dieselbe hinausgeht.

Was zunächst die mechanische Grundlage dieser Theorie betrifft, so heifst es darüber gleich in der Einleitung (S. 90) folgendermafsen: „Um . . . auf das Gravitationsgesetz zu kommen, nahm ich meine Zuflucht zu der . . . Annahme, dafs der Schweräther auf dem Wege durch die Himmelskörper einen Teil seiner Energie, und zwar proportional der im Körper

zurückgelegten Strecke und der daselbst vorhandenen Massendichte verliere. ... Die absorbierte Energie geht teils auf die Atome der groben Materie, teils auf die des Lichtäthers über, wobei Schweräther und Lichtäther als voneinander verschiedene Stoffe aufzufassen sind."

Hiermit ist nicht nur im allgemeinen die Zugehörigkeit zu den Absorptionstheorien deutlich ausgesprochen, sondern auch schon unsere erste Frage bestimmt beantwortet, und zwar in dem Sinne, dafs die Energie der fallenden Körper in dem postulierten Schweräther ihre Quelle haben soll.

Stellen wir nun aber die zweite Frage: auf welche Weise denn die Energieabsorption eigentlich vor sich gehe, dann stehen wir auch bei Rysáneck sofort wieder vor dem alten Rätsel. Ich lese darüber Folgendes: „Damit nun dieses Medium den Himmelskörpern Bewegung mitteilen könne, soll angenommen werden, dafs es selbst in Bewegung sei und dafs diese Mitteilung durch Stöfse geschehe. ... Auf dem Wege (durch die Himmelskörper) stöfst ein Teil des Schweräthers mit der groben Materie zusammen, wobei es zu einem Verluste der kinetischen Energie desselben kommt, welche eine Erwärmung des durchdrungenen Körpers zur Folge hat. Wenn es sich nun um die Berechnung des Energieverlustes handelt, so kann man die Betrachtung so anstellen, als ob man es mit dem Stofse unvollkommen elastischer Atome zu thun hätte. Damit soll aber durchaus nicht die vollkommene Elasticität des Schweräthers aufgegeben werden; denn durch diese Stöfse geht von der Gesamtenergie nichts verloren."

Wie wird denn nun trotz der vollkommenen Elasticität der Verlust an kinetischer Energie mechanisch begründet? — Einfach gar nicht; und so steckt denn ziemlich das ganze Hypothesen-Nest, welches wir vorhin bei Thomson bez. Tolver Preston fanden, auch in der Theorie von Rysáneck.[1])

Eine kleine Polemik, welche letzterer in seiner „Einleitung" gegen mich richtet, könnte übrigens einigermafsen geeignet sein, über diesen Mangel in der mechanischen Begründung den Leser hinwegzutäuschen, weshalb ich mit einigen Worten darauf eingehen mufs. Es heifst u. a. dort (S. 91):

„Wenn Wärmestrahlen von einem Körper absorbiert werden, oder wenn zwei Bleikugeln zusammenstofsen, so erfolgen die Stöfse zwischen den Körper- und Ätheratomen so, dafs dabei an Energie nichts verloren geht. Wir können diese Eigenschaft der Atome mit dem Namen Elasticität be-

1) Herr Rysáneck äufsert bezüglich einer Theorie von Odstrčil, welche er auf S. 92 seiner Abhandlung kurz bespricht: „die Schwerkraft tritt hier wieder als *qualitas occulta* in der Elasticität auf". — Diese Bemerkung trifft, wie mir scheint, ihn selbst nicht weniger, als Herrn Odstrčil.

zeichnen, jedoch würden wir die Grenzen der Physik überschreiten, wollten wir auch auf die inneren Vorgänge in den Atomen bei dieser Bewegungsübertragung eingehen. (Ich meine im Gegenteil, die Physik würde Herrn R. vermutlich dafür dankbar gewesen sein, wenn er diese Vorgänge auf eine plausible mechanische Grundlage gestellt und damit auch seiner Theorie ein solides Fundament gegeben hätte.) Zur Annahme unelastischer Atome liefs sich Isenkrahe durch die Betrachtung verleiten, dafs unter der Voraussetzung vollkommener Elasticität die Gegenwart eines Körperatoms auf den Bewegungszustand des ringsumherfliegenden Schweräthers keinen Einflufs ausübt. Denken wir uns ein Körperatom an der Grenze eines Moleküls zwar ringsumher von Schweräther, aber auf einer Seite in der nächsten Nähe auch von Körper- und Lichtatomen umgeben, so werden die Stöfse, die es auf der einen Seite vom Schweräther empfängt, auf der anderen Seite nicht immer wieder auf den Schweräther übergehen, sondern auch zum Teil an die Licht- und Körperatome, und diese übertragene Energie kann als Wärme entweichen."

Ich weifs nicht, was Herr Rysáneck mit dieser Überlegung dargethan zu haben glaubt. Gegen denjenigen Teil meiner Entwickelung (Rätsel von der Schwerkraft S. 135 u. 136), wonach „unter der Voraussetzung vollkommener Elasticität die Gegenwart eines Körperatoms auf den Bewegungszustand des ringsumherfliegenden Schweräthers keinen Einflufs ausübt", wendet er ja nichts ein. Nun unterscheidet er bei einem solchen Körperatom, welches „an der Grenze des Moleküls" liegt, die eine und die andere Seite; die Stöfse, die es auf der einen empfängt, sollen — so behauptet er — auf der anderen nicht immer wieder auf den Schweräther übergehen. Um die andere Seite handelt es sich aber zunächst gar nicht, sondern um die eine. Warum gehen die Stöfse, die das Grenzatom bekommt, eben an derselben Seite, wo es sie bekommt, nicht wieder auf den Schweräther über? — Bei der vorausgesetzten „vollkommenen Elasticität" bedürfte ein solcher Verlust eines besonderen Grundes; den finde ich aber bei Rysáneck nicht. Fehlt dieser Grund, so bleibt die Stofsenergie an der einen, der auswendigen Seite, dem Schweräther erhalten. Und wenn ich nun diese Betrachtung auf sämtliche Grenzatome des ganzen Moleküls ausdehne, so springt in die Augen, dafs der Äther um das ganze Molekül herum seine Energie einfach beibehält.

Es wäre also gar nicht nötig, die andere, inwendige Seite der Grenzatome überhaupt in Betracht zu ziehen. Zieht man sie aber, wie Rysáneck es thut, wirklich in den Kreis der Deduktion hinein und behauptet, die von auswärts herkommende Stofsenergie ginge auf der Innenseite zum Teil an die benachbarten Licht- und Körperatome über, so fragt sich doch,

warum diese denn das, was sie erhalten, da sie doch vollkommen elastisch sind, nicht auch wieder weiter und weiter geben, bis schliefslich am entgegengesetzten Ende das dort liegende Grenzatom die Rückgabe jenes Energiebetrages an den umgebenden Äther besorgt. — Und wenn man ferner behauptet, ein Teil dieser Energie ginge in Wärme über und könne als solche entweichen, so wird der Mechaniker natürlich fragen: Wie geschieht denn die Umwandlung der Atomstöfse in die wellenförmige Bewegung desjenigen Stoffes, vermittelst dessen die Wärmestrahlen „entweichen?"

Das alles ist dunkel, und ich darf demgemäfs auf unsere zweite kritische Frage wohl nur die Antwort geben: Wie und warum in den gravitierenden Körpern Energie absorbiert wird, ist in der Theorie Rysánecks nicht entwickelt worden. Da dieselbe aber in ihrem ganzen Aufbau eben auf dieser Absorption beruht, so fehlt es ihr an der nötigsten mechanischen Grundlage.

Was die dritte Frage, die Ableitung der Centripetalkraft aus der Absorption betrifft, so ist diese bei Rysáneck dieselbe, wie bei den vorhin erörterten anderen Stofstheorien.

Bezüglich des vierten Punktes jedoch, nämlich der Entwickelung eines mathematischen Ausdrucks für diese Kraft finden wir eine Reihe von Formeln, auf die näher eingegangen werden mufs. — Zuvörderst ist zu bemerken, dafs Herr Rysáneck seine Ätheratome mit Geschwindigkeiten fliegen läfst, welche nach dem Maxwellschen Gesetze verteilt sind. Unter einer hinreichend grofsen Anzahl N von Atomen besitzen also „eine zwischen v und $v + dv$ liegende Geschwindigkeit $N(v)$ Atome, welche gegeben sind durch die Gleichung:

$$N(v) = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(2 \frac{G^2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3 v^2}{2 G^2}} \cdot v^2 dv \text{."}$$

So oft es sich aber um irgend eine Schlufsformel handelt, welche für die Gravitationstheorie Geltung haben soll, wird dieser Ausdruck natürlich nach v integriert von 0 bis ∞. Hierdurch kommen sämtliche Ätheratome in Rechnung, und statt $N(v)$ tritt dann einfach die Gesamtzahl N in die Formel ein, während gleichzeitig statt der Einzelgeschwindigkeit v irgend ein Mittelwert derselben auftritt. Demnach hat die Einführung des Maxwellschen Gesetzes auf die Schlufsresultate der Rechnung gar keinen Einflufs. — Dieses zeigt sich denn auch in dem für die centripetale Kraft abgeleiteten Ausdruck (S. 105)

$$k = h \cdot N \cdot \frac{\nu G^2}{2} \cdot \varrho_1{}^2 \pi \cdot \frac{\varrho_2{}^2 \pi}{\nu_2} \cdot dw \cdot \int_{l_1}^{l_2} d_2 \cdot dl,$$

worin ja die Funktion $N(v)$ fehlt.

Indem wir diesen Ausdruck nun nach den früher angegebenen drei Gesichtspunkten einer näheren Erörterung unterziehen, haben wir zuerst die Beziehung dieser centripetalen Energie zu derjenigen Energie ins Auge zu fassen, aus welcher sie durch Absorption oder Umwandlung entstanden ist, also zur Energie des Äthers.

Diese Beziehung liegt in dem Faktor $N \frac{\nu G^2}{2}$, einer Gröfse, für welche auf S. 106 das einfache Symbol E eingeführt wird, und die nichts anderes, als „die mittlere kinetische Energie des Schweräthers in der Raumeinheit" bedeutet. Der in obiger Gleichung bezeichnete Wert von k ist also dieser mittleren Energie, und damit auch dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit[1]) der Ätheratome proportional.

In den Ausdrücken, welche ich selbst (Rätsel S. 174 u. ff.) für die Centripetalkraft abgeleitet habe, erscheint dieselbe (nach Ausscheidung des Einflusses der Entfernung und Masse) proportional dem Produkte $\nu \cdot c$, wobei c ebenfalls die mittlere Geschwindigkeit der Ätheratome bedeutet. Diese Gröfse tritt also bei Rysáneck in der zweiten, bei mir in der ersten Potenz auf, und es könnte deshalb scheinen, als ob eines von diesen beiden Rechnungsresultaten falsch sein müsse. Dies ist indessen nicht der Fall, vielmehr stimmt Rysáneks Resultat in diesem Punkte mit dem meinigen vollständig überein, wie sich leicht zeigen läfst. Die Konstante ν bedeutet nämlich bei mir „die Anzahl von Ätheratomen, welche in der Zeiteinheit durch eine beliebig im freien Raume fixierte Ebene von der Gröfse 1 hindurchpassieren" (S. 143). Im Anschlufs daran habe ich (S. 169) das Resultat abgeleitet: „In der Raumeinheit befinden sich durchschnittlich $\frac{2\nu}{c}$ Ätheratome." Aus $N = \frac{2\nu}{c}$ folgt aber $\nu = \frac{cN}{2}$, und wenn dieser Wert in das Produkt νc eingesetzt wird, so erscheint ebenfalls die Geschwindigkeit c in der zweiten Potenz. — Es ist also gleichgültig, ob man sagt, die Schwere sei der mittleren Geschwindigkeit der Ätheratome, oder dem Quadrat dieser Geschwindigkeit proportional, wenn man nur im ersten Falle die Zahl der in der Zeit Eins durch die Fläche Eins hindurchpassierenden, im anderen Falle die Zahl der im Raume Eins vorhandenen Atome als zweiten Faktor hinzufügt.

---

1) Auf die in der kinetischen Gastheorie gebräuchlichen verschiedenen Mittelwerte und deren Unterschiede brauchen wir hier nicht näher einzugehen.

Was nun ferner den Einfluſs des Abstandes betrifft, so ist bei allen Stoſstheorien der Nachweis der Übereinstimmung mit dem Newtonschen Gesetz, wenigstens für gröſsere Entfernungen, leicht zu führen. In der vorhin angegebenen Formel Rysánecks tritt diese Beziehung nicht so klar hervor, weil die negative zweite Potenz des Abstandes nicht ausdrücklich darin auftritt. Dieselbe ist aber, wie sich leicht zeigen läſst, in dem letzten Faktor der Formel enthalten. Kurz nach Entwickelung derselben heiſst es nämlich bei Rysáneck (S. 106): „Das Körperelement . . hat . . die Masse $l^2 dw d_2 dl$.“ Wenn man hierüber das Integral nach l nimmt zwischen den Grenzen l_1 und l_2 und die dadurch entstehende Masse mit M bezeichnet, so entsteht:

$$dw \int_{l_1}^{l_2} d_2 dl = \frac{M}{l^2},$$

und die Einführung dieser Substitution an das Ende der Rysáneckschen Formel ergiebt die Newtonsche Beziehung der Gravitation zur Entfernung; denn l kann bei Rysáneck, sobald die Dimensionen der Körper im Verhältnis zu ihrem Abstande klein sind, als das Maſs des letzteren betrachtet werden.

Wir kommen nun zum dritten und wichtigsten Punkte, zur Frage nämlich, wie die Centripetalkraft zu der Masse der Körper sich verhält. In dieser Beziehung stützt sich die Deduktion der Rysáneckschen Kraftformel (S. 105) ausdrücklich auf eine frühere Überlegung (S. 100), worin der Satz vorkommt: „Die (an die Körpermoleküle) anstoſsende Schweräthermasse ist der Dichte des durchdrungenen Körpers und dem in ihm zurückgelegten Wege proportioniert.“ — Der mathematische Ausdruck dieses Satzes ist enthalten in der Gleichung:

$$\mu' = \mu \cdot N_2 \cdot \varrho_2{}^2 \pi \cdot l.$$

Letztere aber entstand aus der Gleichung:

$$\mu' = \mu\left(1 - e^{-N_2 \varrho_2{}^2 \pi l}\right)$$

dadurch, daſs in der Exponentialreihe auſser dem absoluten und linearen Gliede alle übrigen vernachlässigt wurden.

Was nun die Ableitung der Funktion $e^{-N_2 \varrho_2{}^2 \pi l}$ angeht, so hatte Herr Rysáneck den anziehenden Körper ebenso, wie ich es im 16. Kapitel meines Buches schon gethan, senkrecht zur Richtung der Anziehung in Molekülschichten zerlegt. Die geometrische Reihe, welche sich ihm wie mir dabei ergiebt, hat er sodann dadurch, daſs er wiederum einige Gröſsen, namentlich auch den gegenseitigen Abstand der Schichten, als verschwindend klein vernachlässigt, mit Hülfe einer Reihe von Rechnungsoperationen in

die obige Exponentialfunktion umgewandelt. — Der mathematische Kern dieser Summation einer Reihe, bei welcher die Glieder schliefslich unendlich dicht aneinander gerückt werden, ist, wie man leicht erkennt, eine Integration, und die entsprechende physikalische Anschauung läuft darauf hinaus, dafs die Körper nicht mehr betrachtet werden als aus Molekülen bestehend, die durch verhältnismäfsig grofse Zwischenräume voneinander getrennt sind, sondern einfach als eine absorbierende Masse, welche zwischen den Grenzen jener Integration den Raum stetig erfüllt. In der That gelangt man auf Grund einer solchen Anschauung sehr rasch zu derselben Exponentialfunktion.

Läfst man nämlich durch irgend ein stetiges, homogenes Medium in einer bestimmten Richtung irgend ein absorbierbares Etwas (sei es ein Stoff, sei es Wärme, Licht oder eine andere Form der Energie) hindurchgehn, teilt senkrecht zu dieser Richtung das Medium in unendlich dünne, gleiche, ebene Schichten von der Dicke dl, setzt dann die Absorption proportional einerseits dieser Dicke, andererseits einer konstanten Gröfse k, so hat man dafür das Produkt $k \cdot dl$. Bezeichnet man ferner das ursprüngliche Quantum jenes absorbierbaren Objekts mit a, den vor seinem Anlangen an einer beliebig ausgewählten Schicht schon absorbierten Teil desselben mit x, den wirklich anlangenden Rest also mit $a - x$ und den in der Schicht selbst zur Absorption kommenden kleinen Betrag mit dx, so folgt aus der Homogenität des Mediums, dafs das Verhältnis zwischen diesem Betrag und dem anlangenden Quantum überall dasselbe ist, mithin hat man die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{a - x} = k \cdot dl, \quad \text{woraus:} \quad \log(a - x) = -kl + \text{Konst.}$$

Da mit l auch x zu Null wird, ist die Konstante gleich $\log a$, und man findet sehr rasch:

$$x = a(1 - e^{-kl}),$$

ein Resultat, worin man die Rysáneckſche Funktion wiedererkennen wird.

Bei dieser Überlegung waren die Schichten eben und von gleicher Ausdehnung gedacht. Läfst man aber das absorbierbare Etwas von allen Seiten her nach einem Centrum sich bewegen, giebt dem absorbierenden Körper die Form eines Kugelschalenstücks von beliebiger Dicke und Umgrenzung, so kommt man zu genau demselben Resultat. Denn wenn auch die Schichten dieses Körpers in der Richtung nach dem Mittelpunkte hin an Flächenausdehnung abnehmen, so wächst doch andererseits die Koncentration des absorbierbaren Objekts genau in demselben Verhältnis, und die Differentialgleichung bleibt dieselbe. — Einen singulären Fall hiervon, bei

welchem es sich um einen abgestumpften Kreiskegel mit parallelen sphärischen Grundflächen handelt, hat Herr Paul du Bois-Reymond im dritten Jahrgang der Naturwissenschaftlichen Rundschau (S. 27 u. 28) behandelt. Er ist natürlich zu dem gleichen Resultate gekommen und betrachtet dasselbe als einen wesentlichen Beweispunkt für die Unmöglichkeit einer mechanischen Erklärung der Schwerkraft. Auf seine diesbezüglichen Argumente bin ich in meiner Schrift: „Über die Fernkraft und das durch Paul du Bois-Reymond aufgestellte dritte Ignorabimus“ S. 24 u. ff. ausführlich eingegangen. Herr Rysáneck erblickt in ganz derselben Exponentialfunktion keine Instanz gegen seine Theorie und geht über die darin liegende Schwierigkeit hinweg mit den Worten: „Falls aber $N_2 \varrho_2^2 \pi l$ eine sehr kleine Zahl ist, so kann man auch setzen: $\mu' = \mu N_2^2 \varrho_2^2 \pi l$. Die anstofsende Schweräthermasse ist also (!) der Dichte des durchdrungenen Körpers und dem in ihm zurückgelegten Wege proportional. Dieses Resultat führt dann in seinen weiteren Folgen zum Newtonschen Gravitationsgesetze.“ (l. c. S. 100.) —

Fassen wir nunmehr die Antwort auf unsere vierte kritische Frage knapp zusammen, so können wir sagen: Die Theorie Rysánecks bietet bezüglich der Abhängigkeit der Fallenergie von der Energie des Äthers und von der Entfernung der gravitierenden Körper nichts wesentlich Neues. Bezüglich ihrer Abhängigkeit von der Masse aber wird unter Vernachlässigung einiger kleinen Werte zunächst eine Exponentialfunktion entwickelt und sodann aus dieser, um die Übereinstimmung mit dem Newtonschen Gesetze zu erzielen, ein einfaches Produkt abgeleitet, und zwar dadurch, dafs die Exponentialreihe schon gleich hinter dem linearen Gliede abgeschnitten wurde.

Hiermit ist auch schon ein Teil der fünften Frage, welche, wie früher bemerkt, die Abweichungen vom Newtonschen Gesetze zum Gegenstande hat, beantwortet. Ein zweiter Teil dieser Frage betrifft diejenige Abweichung, welche durch die Bewegungen der gravitierenden Massen begründet wird. Ich selbst habe schon im 18. Kapitel meines Buches über diesen Punkt gesprochen. Herr Rysáneck nun stellt eine Reihe von, wie mir scheint, nicht ganz einwandfreien Rechnungen an, welche in ihrem Verlauf und auch in ihren Schlufsresultaten noch so kompliziert sind, dafs es kaum thunlich sein würde, in Kürze darauf einzugehen. Ich mufs also in dieser Hinsicht auf die Abhandlung selbst verweisen und kann nur hervorheben, dafs — wie ja vorauszusehen war — der Einflufs der Bewegung auf das Kraftgesetz um so mehr verschwindet, je gröfser die Geschwindigkeit des Äthers angenommen wird.

Schlufs.

Wir stehen nunmehr zunächst vor der Aufgabe, das Resultat der Entwickelungen Rysáneeks, welche unter den mir bekannt gewordenen die am weitesten durchgeführten sind, mit den in meinem Buche abgeleiteten Formeln zu vergleichen und darzulegen, wieweit jene in diesen als Spezialfälle schon enthalten sind.

Die von mir im 17. Kapitel entwickelte „vierte Annäherung“ schliefst ab mit der für die einzelnen Schichten aufgestellten Reihe:

$$\Delta v \cdot \Delta c \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)^0 + f(n)$$

$$\Delta v \cdot \Delta c \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)^1 + f(2n)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Delta v \cdot \Delta c \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)^{p-1} + f(pn),$$

deren Summe gleich

$$\frac{\Delta v \cdot \Delta c \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)^p\right]}{1 - \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)} + \sum_1^p f(pn)$$

oder gleich $v \cdot c \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)^p\right] + \sum_1^p f(pn)$ ist.

Fassen wir den zweiten Summanden zuerst ins Auge. Die Einführung desselben beruhte auf der Überlegung, dafs eine gewisse, wenn auch kleine Zahl von Ätheratomen bei ihrem Wege durch den gravitierenden Körper möglicherweise an mehreren Atomen einer und derselben Schicht anstofsen, auch sogar auf vorhergehende Schichten zurückgeworfen werden, überhaupt gewisse „überschüssige Reflexionen“ und damit auch überschüssige Energieschwächungen erleiden könnten, welche in dem ersten Summanden nicht berücksichtigt worden sind.[1]) Herr Rysáneck läfst diese Art von Stöfsen ganz aufser Betracht, also werden wir unserem zweiten Summanden in seinen Rechnungen nicht begegnen.

Was nun den ersten betrifft, so kann der in der Klammer enthaltene Ausdruck (auf den es bezüglich des Masseneinflusses allein ankommt) ersichtlicherweise, weil ja identisch $x = e^{\log x}$ ist, ohne Weiteres auch so aufgeschrieben werden:

---

1) Rätsel etc. S. 194.

$$1 - \left[e^{\log\left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)} \right]^p \quad \text{oder} \quad 1 - e^{p \cdot \log\left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)}.$$

Hier bezeichnet $\frac{\Delta v}{v}$ das Verhältnis zweier Zahlen, von welchen die erstere angiebt, wieviel Atome bei den Molekülen der ersten Körperschicht anstofsen, die letztere, wieviel Atome bei dieser Schicht überhaupt anlangen. Um dieses Verhältnis in den Konstanten Rysánecks auszudrücken, nennen wir mit ihm den Radius der Wirkungssphäre zwischen Körpermolekül und Ätheratom ϱ_2, die mittlere Entfernung der ersteren δ, die Zahl der in der Raumeinheit vorhandenen Moleküle N_2, dann ergiebt sich leicht, u. a. schon aus meiner Entwickelung S. 169[1]), dafs:

$$\delta = \left(\frac{c}{2v}\right)^{\frac{1}{3}} = N_2^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{N_2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

zu setzen ist. Sodann ist klar: wenn in jeder, also auch in einer würfelförmigen Raumeinheit N_2 Moleküle angetroffen werden, dann befinden sich längs der Kante deren $N_2^{\frac{1}{3}}$, also in der Grenzfläche deren $N_2^{\frac{2}{3}}$. Diese sperren dem Ätherhagel von jeder Flächeneinheit einen Teil ab, welcher gleich $N_2^{\frac{2}{3}} \cdot \varrho_2^2 \pi$ ist, also haben wir

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{N_2^{\frac{2}{3}} \cdot \varrho_2^2 \pi}{1} = N_2^{\frac{2}{3}} \cdot \varrho_2^2 \pi.$$

Was nun den zweiten Bruch $\frac{\Delta c}{c}$ betrifft, so drückt dieser das Verhältnis des Geschwindigkeitsverlustes, welchen ein stofsendes unelastisches Ätheratom erleidet, zur ganzen Geschwindigkeit aus, welche dasselbe vor dem Stofse hatte. Diesen Verlust habe ich in meinem 14. Kapitel bestimmt und als eine einfache Funktion der beiden Massen dargestellt.

Da Rysáneck vollständige Elasticität voraussetzt und dennoch zu seinen Rechnungen einen Geschwindigkeitsverlust gebraucht, so ist sein dafür abgeleiteter Ausdruck unbestimmt und enthält eine nicht genügend fundierte, willkürliche Gröfse q. Dazu kommt, dafs er in seinen Rechnungen die Fälle nicht mit einschliefst, wo die durch den gravitierenden Körper hindurchpassierenden Ätheratome mehr als einmal gegen Moleküle anprallen. Dadurch wird der von diesem Geschwindigkeitsverlust herrührende Faktor von der Schichtenzahl unabhängig und scheidet sich aus der

1) Da ja Ruhe und Bewegung, so lange weder Verdichtung noch Verdünnung eintritt, in Bezug auf diese Konstanten keinen Unterschied begründen, die Gleichungen also für ruhende Körpermoleküle dieselben bleiben, wie für die durcheinanderfliegenden Ätheratome.

hier in Rede stehenden Klammer heraus. Innerhalb derselben fehlt aus diesem Grunde bei Rysáneck eine unserem Bruche $\frac{\varDelta c}{c}$, den wir übrigens im Folgenden der Kürze halber mit ζ bezeichnen wollen, entsprechende Gröfse.

Nach diesen Substitutionen geht unsere letzte Formel über in:

$$1 - e^{p \cdot \log(1 - N_2^{\frac{2}{3}} \varrho_2^2 \pi \zeta)}.$$

Will man nun statt der Schichtenzahl p noch die Ausdehnung derselben in der Richtung der Centripetalkraft, d. h. die Rysánecksche Gröfse l einführen, so ist dies leicht, weil ja längs der Längeneinheit $N_2^{\frac{1}{3}}$ Moleküle sind, demnach längs einer Strecke von l Einheiten auch $N_2^{\frac{1}{3}} \cdot l$ Moleküle angetroffen und daher ebensoviele Schichten gebildet werden müssen. Hiernach hat man:

$$1 - e^{N_2^{\frac{1}{3}} l \cdot \log(1 - N_2^{\frac{2}{3}} \varrho_2^2 \pi \zeta)}$$

oder auch, was dasselbe ist:

$$1 - e^{\frac{l}{\delta} \log\left[1 - \left(\frac{\varrho_2}{\delta}\right)^2 \pi \zeta\right]}.$$

Von diesem Ausdruck nun enthält die oben angeführte Rysánecksche Formel denjenigen Spezialfall, welcher entsteht, wenn man (nach Ausscheidung von ζ) den Logarithmus in eine Reihe entwickelt und diese schon gleich hinter dem linearen Gliede abbricht. In der That ergiebt sich dann:

$$1 - e^{-\frac{l}{\delta}\left(\frac{\varrho_2}{\delta}\right)^2 \pi},$$

oder, was wiederum dasselbe ist:

$$1 - e^{-N_2 \varrho_2^2 \pi l}.$$

Dieses sein Resultat (vgl. die Klammer auf S. 197) geht daher nicht über die von mir abgeleitete Reihe hinaus, sondern hat vielmehr eine eingeschränktere Gültigkeit. —

Gehen wir nunmehr dazu über, das Ergebnis der im vorigen Abschnitte unter Voraussetzung einer stetigen und homogenen Raumerfüllung innerhalb des absorbierenden Körpers ausgeführten Integration mit der unter Voraussetzung einer diskontinuierlichen Raumerfüllung berechneten Summenformel zu vergleichen, so zeigt sich, dafs der Bau der in beiden Fällen erhaltenen Funktionen keinen Unterschied aufweist, und dafs nur statt des im ersten Falle benutzten konstanten Koefficienten k im zweiten Falle der Ausdruck

$$\frac{1}{\delta} \cdot \log\left[1 - \left(\frac{\varrho_2}{\delta}\right)^2 \pi \zeta\right]$$

auftritt. Diese Gröſse ist abhängig erstens von der mittleren Entfernung δ der Körpermoleküle, zweitens von dem Radius ϱ_2 der Wirkungssphäre zwischen den Körper- und Äthermolekülen, drittens von dem in der Gröſse ζ steckenden Massenverhältnis dieser beiden. Will man nun noch den Schritt, der von Manchen als notwendig, ja als selbstverständlich hingestellt worden ist, thun und in letzter Instanz die Einerleiheit aller Materie annehmen, dann tritt statt dieses Massenverhältnisses das Volumverhältnis ein, und damit ist dann überhaupt der dunkle und vielumstrittene Begriff der Masse aus dem Gravitationsgesetze weggeschafft. Alle noch darin vorkommenden Gröſsen sind räumliche und zeitliche Bestimmungen.

Dies gilt auch von denjenigen Faktoren, welche vor der zuletzt in Rede stehenden Klammer sich befinden. Von diesen sind vorhin schon die Gröſsen ν und c erörtert worden; dazu müſste allerdings noch das Symbol μ für die Masse der Äthermoleküle hinzukommen, allein statt dessen kann ebensogut das Volumen derselben eintreten, wenn wir dasselbe mit irgend einem konstanten, von der Wahl der Einheiten abhängigen Koefficienten multiplizieren. — —

Die geometrische Reihe[1]), deren Summe nach der Multiplikation mit μ von der Funktion:

$$\mu \cdot \nu \cdot c\left[1 - e^{\frac{l}{\delta}\log\left(1 - \left[\frac{\varrho}{\delta}\right]^2 \pi \zeta\right)}\right]$$

gar nicht verschieden ist, wurde von mir zwar unter bestimmten, in meinem Buche angegebenen Voraussetzungen abgeleitet. Es ist aber leicht einzusehen, daſs ihr Gültigkeitsbereich weiter geht.

Das Produkt $\mu \cdot \nu \cdot c$ bedeutet die Bewegungsquantität derjenigen Menge von Ätheratomen, welche in der Zeiteinheit von allen Seiten her durch eine in den Raum beliebig hineingelegte Ebene von der Gröſse Eins hindurchpassieren. Wegen der Substitution:

$$N = \frac{2\nu}{c}, \quad \text{also} \quad \mu \cdot \nu \cdot c = N\frac{\mu c^2}{2} = E$$

bedeutet es ebensowohl die lebendige Kraft der in der Raumeinheit durchschnittlich vorhandenen Äthermenge. Wir dürfen uns als Besitzer dieser Energie aber auch statt der durcheinanderschwirrenden Atome irgend etwas anderes vorstellen (wenn wir das können), z. B. irgend eine Substanz, welche wellenförmige oder sonst wie beschaffene Bewegungen macht. Lassen wir

1) Siehe „Rätsel“ S. 194.

dann diese Energieform koncentrisch durch ein absorbierendes Kugelschalenstück von der Dicke l und von stetigem, homogenem Stoffe hindurchpassieren und bezeichnen den Absorptionskoefficienten mit k, so resultiert daraus eine Schein-Anziehung, welche nach dem Früheren proportional ist dem Ausdrucke:

$$E(1 - e^{-kl}).$$

Wird das Kugelschalenstück jedoch nicht als ein stetig den Raum erfüllender Körper betrachtet, läſst es sich aber in unter sich gleichartige Schichten zerlegen, welche um den Abstand δ von einander entfernt sind, und bezeichnet man in diesem Falle den durch den Bau der einzelnen Schichten begründeten Absorptionkoefficienten mit $\varkappa$, so ergiebt sich das Resultat:

$$E \cdot \left[1 - e^{\frac{l}{\delta} \log(1 - \varkappa)}\right].$$

Zwischen den Konstanten k und $\varkappa$ besteht die Relation $\varkappa = 1 - e^{-k\delta}$.

Für das Gravitationsproblem stellen diese Formeln aber offenbar immer nur eine mehr oder minder enge Annäherung dar, da bei ihrer Ableitung die Voraussetzung zu Grunde liegt, einerseits daſs jede Schicht in ihrer ganzen Ausdehnung durchaus gleichmäſsig absorbiere, die am Rande liegenden Teile nicht mehr noch weniger als die inneren, andererseits daſs die Wirkung einer Schicht (auſser von ihrer eigenen Ausdehnung und Struktur) lediglich abhängig sei von denjenigen Schichten, welche dem angezogenen Objekte abgewandt sind, von den übrigen aber nicht. Daſs letzteres, wenn auch in verhältnismäſsig geringem Betrage, dennoch der Fall sein könne, ist aber durch die Grundannahmen der Theorie keineswegs ausgeschlossen. Daher hatte ich meinen Formeln am Schlusse die unbestimmte, vorhin in dem Ausdruck $\sum_{1}^{p} f(pn)$ zusammengefaſste Funktion beigefügt, um über den allen vorhergegangenen Rechnungen (wie überhaupt allen bisherigen Gravitationstheorien) anhaftenden Charakter der bloſsen Annäherung meinerseits keinen Zweifel zu lassen.

$\varphi = +49^{\circ}$.

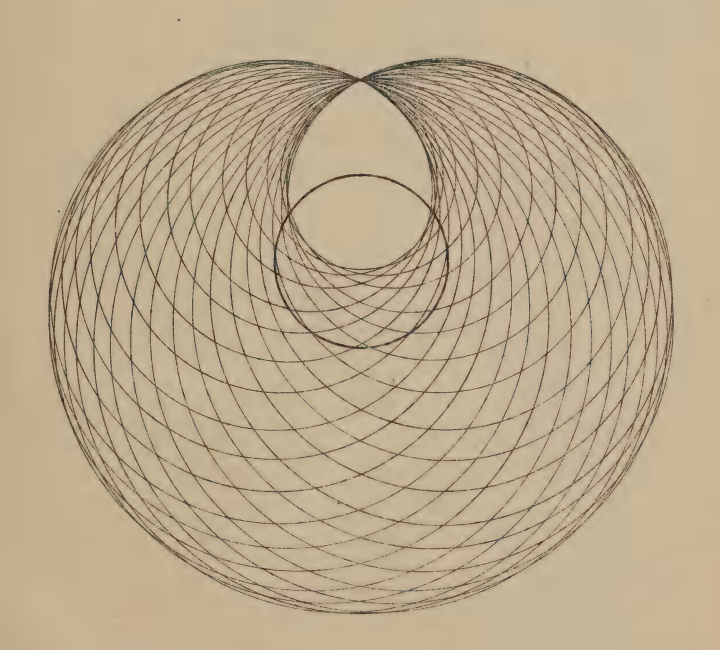
März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	August.	September.	October.	November.	December.	Januar.	Februar.

♓ ♈ ♉ ♊ ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐ ♑ ♒ ♓

I

II

III



Lith. Eschebach & Schaefer, Leipzig

